**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 87/88 (1926)

**Heft:** 16

**Artikel:** Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme

**Autor:** Hofacker, Karl

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-40877

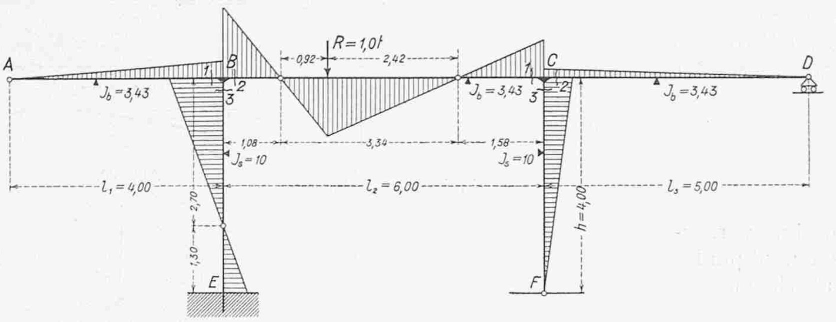


Abb. 38.

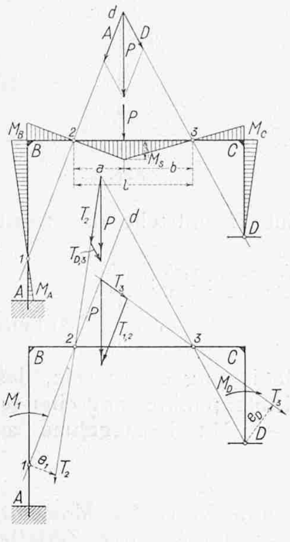

Abb. 35 und 36.

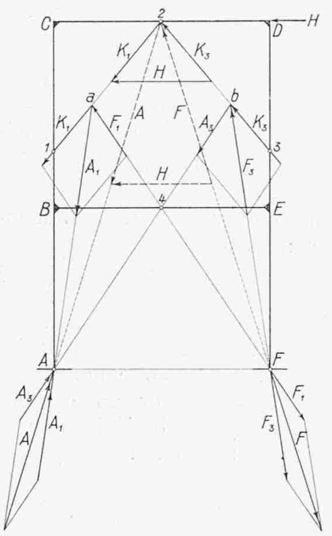

Abb. 37.

matorenkessel mit einem leichten Deckel abgeschlossen. Beim Auskochen unter Vakuum wird ein besonderer druckfester und mit dem Kessel gut abdichtbarer Deckel aufgesetzt.

Zur Bestimmung der Isolierfähigkeit des Oels ist ein Prüftransformator von 3 kVA Leistung und für 0 bis 75000 Volt Sekundärspannung aufgestellt. Die Regulierung der Spannung erfolgt vermittelst eines Induktionsreglers. Das Oel-Laboratorium enthält ferner alle Apparate, die zur raschen Bestimmung der physikalischen und chemischen Eigenschaften des Oels erforderlich sind.

(Fortsetzung folgt.)

## Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme.

Von Ing. KARL HOFACKER, Luzern.

(Fortsetzung von Seite 193.)

Unter dem Titel: „Das Arbeiten mit dem Nupubest-Gerät" veröffentlicht Ing. Rieckhof in der Zeitschrift „Der Bauingenieur" vom 22. Januar an Hand interessanter Skizzen weitere Erkenntnisse für die Handhabung von Modellversuchen nach seinem in letzter Nummer besprochenen Verfahren, indem er in klarer Weise die auftretenden Fälle gruppiert. Grundsätzlich lassen sich die Tragwerke in zwei Hauptgruppen trennen, wovon die eine jene Systeme umfasst, die durch die Momenten-Nullpunkte so zerlegt werden, dass sie direkt als statisch bestimmte behandelt werden können, während die andere alle jene Systeme vereinigt, die nach der Fixierung der Momenten-Nullpunkte noch der Steifigkeits-Verhältnisse der Stäbe benötigen, um die weitere Momenten-Ermittlung zu ermöglichen. Diese zweite Hauptgruppe zerfällt in die beiden Untergruppen: a) Stabsysteme, bei denen keine Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten, und b) Stabsysteme, bei denen solche auftreten.

*I. Stabsysteme, die statisch bestimmt werden.*

Die Hauptgruppe I umfasst eine sehr grosse Anzahl von Stabsystemen, so die beiden früher betrachteten Beispiele 1 und 2, und das folgende Beispiel 3 (Abb. 35). Der durch die Einzellast $P$ beanspruchte Rahmen weist die Momenten-Nullpunkte 1, 2 und 3 auf, durch die der Rahmen in lauter statisch bestimmte Systeme zerlegt wird. Unter der Einzellast $P$ ist für den einfachen Balken 2-3 das Moment $M_s = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$. Die Eckmomente $M_B$ und $M_C$ ergeben sich durch Rückwärtsverlängern der Momentenlinie S 2 bzw. S 3, das Einspannmoment $M_A$ erhält man analog durch die Weiterführung der Momentenlinie von $M_B$ durch den Nullpunkt 1 nach A.

Wie schon im zweiten Beispiel gezeigt wurde, können solche Systeme auch als kombinierte Dreigelenkbogen aufgefasst werden, so, dass einmal der Teil 1 2 3, und das andere Mal der Teil 2 3 D wie ein Dreigelenkbogen wirkt, wobei der Stab 2 3 einen gemeinsamen Bestandteil beider Bogen darstellt. Dass das System nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn sich die Reaktionen der unbelasteten Scheiben auf der gegebenen Einzellast schneiden, zeigt Abb. 36. Die Kraft $P$ liege ausserhalb (links) des Schnittpunktes $d$ der Reaktionen. Fassen wir den Teil 1 2 3 als Dreigelenkbogen auf, so sind $T_{1,2}$ und $T_3$ die entsprechenden Kämpferdrücke. Die Scheibe 3 D wird belastet durch $T_3$, welche Kraft in Bezug auf Gelenk D ein Moment $T_3 \cdot e_D = M_D$ ausübt, d. h. das als Viergelenkbogen wirkende System erlaubt endliche Drehungen. Gleiches gilt, wenn der Teil 2 3 D als Dreigelenkbogen vorausgesetzt wird; der Kämpferdruck $T_2$ am Hebelarm $e_1$ dreht die Scheibe 1 2 um den Punkt 1.

Selbst mehrfache Rahmen, wie z. B. der in Abb. 37 dargestellte zweistielige Stockwerkrahmen, lassen sich für gewisse Belastungen auf Dreigelenksysteme zurückführen. In der genannten Abbildung 37 sind das Netzbild und die Momenten-Nullpunkte des Rahmens dargestellt für die Belastung durch eine Horizontalkraft $H$ in Höhe des oberen Riegels. Die Zerlegung von $H$ im Scheitelgelenk 2 des Dreigelenkbogens 1 2 3 in die Richtungen 1 2 und 2 3 liefert die Kräfte $K_1$ und $K_3$, die ihrerseits auf den untern Dreigelenkbogen A 4 F wirken. In den Punkten a und b findet die Zerlegung der oberen Kämpferdrücke in die Komponenten $A_1$ und $F_1$ bzw. $A_3$ und $F_3$ der Kämpferdrücke $A$ und $F$ des unteren Dreigelenkbogens statt. Die letztgenannten schneiden sich bei genauer Konstruktion in 2 auf der Horizontalkraft $H$, ihre Resultierende muss wieder $H$ ergeben. Ist der Rahmen neben der Belastung auch noch in Bezug auf Trägheitsmomente symmetrisch, so liegen die Momenten-Nullpunkte 1 und 3 gleich hoch und die Punkte 2 und 4 in Riegelmitte (Verhältnisse, die der Abb. 37 zu Grunde liegen).

*II. Stabsysteme, die nicht statisch bestimmt werden.*

*a) Stabsysteme, bei denen keine Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten.* Das feste Lager $A$ des in Abb. 38 skizzierten Rahmens nimmt die horizontalen Komponenten der auf den Rahmen wirkenden Kräfte auf, weshalb eine Verschiebung der Knotenpunkte nicht möglich ist. Die Momente des mittleren Feldes B C lassen sich nach dem früher gesagten ohne weiteres bestimmen, teils als solche eines einfachen Balkens, teils als Momente von Konsolträgern. Fortgeführt werden dann die Eckmomente in B und C im Verhältnis der Steifigkeit der anschliessenden Stäbe. Vorausgesetzt, dass hier der Einfluss der stets kleinen Verschiebungen der Momenten-Nullpunkte vernachlässigt werde, und $a$ die Länge vom untersuchten Knotenpunkt bis zum nächsten Momenten-Nullpunkt bedeute, ist für jeden Stab die Steifigkeit $\frac{J}{a}$, $J$ das Trägheitsmoment des Stabes darstellend. Gelenklager und Rollenlager sind bekanntlich gleichbedeutend mit Momenten-Nullpunkten.

In $B$ sei das Konsolmoment $M_{B2}$ bereits berechnet. Es handelt sich nun darum, das Moment weiterzuleiten in die Stäbe B A und B E, d. h. die Momente $M_{B1}$ und $M_{B3}$

zu bestimmen. Die Steifigkeit des Stabes BA beträgt nach obigem: $J/a = 3{,}43/4{,}00 = 0{,}86$, jene des Stabes BE $10/2{,}70 = 3{,}70$; die Summe der beiden Werte ist 4,56. Es sei der Wert von $M_{B2}$ zu 0,782 ermittelt worden.

Dann ist $$M_{B1} = \frac{0{,}782 \cdot 0{,}86}{4{,}56} = 0{,}148 \text{ mt}$$

$$M_{B3} = \frac{0{,}782 \cdot 3{,}70}{4{,}56} = 0{,}634 \text{ mt}$$

Um die Aufgabe allgemein zu lösen, d. h. ohne vorauszusetzen zu müssen, dass der Einfluss der Momentennullpunkt-Verschiebung vernachlässigt werden dürfe, überlegen wir folgendermassen:

In Systemen mit unverschieblichen Knotenpunkten sind die Stabdrehwinkel Null, der Knotendrehwinkel eines Knotenpunktes mithin gleich den Tangentenwinkeln aller anschliessenden Stäbe. Der Tangentenwinkel berechnet sich als Auflagerkraft eines mit der reduzierten Momentenfläche belasteten, einfachen Balkens. Wir berechnen für den Stab AB (Abb. 39) den Tangentenwinkel in A,

$$\tau_A = \frac{1}{l\,EJ}\left(\frac{M_A \cdot a}{2} \cdot (b + 2/3\,a) - \frac{M_B \cdot b}{2} \cdot b/3\right)$$

$$M_B = M_A \cdot \frac{b}{a}$$

$$\tau_A = \frac{M_A}{6\,l\,EJ}\left(3ab + 2a^2 - \frac{b^3}{a}\right)$$

Der Tangentenwinkel eines Stabes mit Gelenk oder Rollenlager am Ende ist ein Spezialfall des hier abgeleiteten, und wird für $b = 0$ also $a = l$ zu

$$\tau = \frac{M}{3\,EJ} \cdot a$$

Für den Knotenpunkt B in Abb. 38 erhält man durch Gleichsetzung der Tangentenwinkel der Stäbe BE (allgem. Fall) und BA (Spezialfall) das Verhältnis der Momente $M_{B1}$ und $M_{B3}$

$$M_{B1} : M_{B3} = \frac{J_b}{l_1} : \frac{2\,h\,J_s}{3ab + 2a^2 - \frac{b^3}{a}}$$

Die Brüche des zweiten Verhältnisses stellen nun die genauen Steifigkeitswerte dar, und zwar der erste für Stäbe mit Gelenke am Ende und der zweite für Stäbe mit Momenten-Nullpunkten. Zum Vergleich wollen wir die oben, in vereinfachter Form, berechneten Momente nach der genauen Lösung bestimmen: Die Steifigkeit des Stabes BE beträgt

$$\frac{2 \cdot 4{,}00 \cdot 10}{3 \cdot 1{,}30 \cdot 2{,}70 + 2 \cdot 2{,}70^2 - \frac{1{,}3^3}{2{,}70}} = 3{,}30$$

Totale Steifigkeit $0{,}86 + 3{,}30 = 4{,}16$

$$M_{B1} = \frac{0{,}782 \cdot 0{,}86}{4{,}16} = 0{,}162 \text{ mt}$$

$$M_{B3} = \frac{0{,}782 \cdot 3{,}30}{4{,}16} = 0{,}620 \text{ mt}$$

Wir erkennen, dass der genaue Wert von $M_{B1}$ um 9 % vergrössert wurde, während jener für $M_{B3}$ um 2 % kleiner ausfällt.

*b) Stabsysteme, bei denen Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten.* Auch hier lassen sich die Momente des belasteten Stabes ohne weiteres bestimmen; die übrigen Momente ermitteln sich auf Grund folgender Ueberlegungen:

Stellt die Abb. 40 die Biegelinie eines beliebigen Stabstückes mit zugehöriger Momentenfläche dar, so berechnet sich die Durchbiegung $y$ des Stabes in G senkrecht zur Tangente in F nach dem allgemeinen Ausdruck

$$y = \cdot \frac{M \cdot x}{2}\,\frac{2}{3}\,x \cdot \frac{1}{EJ}$$

aus dem die erste Grundgleichung folgt:

$$M = \frac{3\,y\,EJ}{x^2}$$

In Abb. 41 greifen wir einen Knotenpunkt eines Stabsystems heraus und erkennen die Biegelinien der einzelnen Stäbe. Abb. 42 zeigt die entsprechende Momentenfläche. Durch Anwendung der ersten Grundgleichung können wir das Verhältnis der Knotenpunktmomente aufstellen:

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = \frac{3\,y_1\,E_1\,J_1}{x_1^2} : \frac{3\,y_2\,E_2\,J_2}{x_2^2} : \frac{3\,y_3\,E_3\,J_3}{x_3^2} : \frac{3\,y_4\,E_4\,J_4}{x_4^2}$$

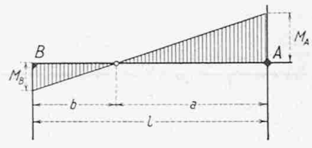

Abb. 39.

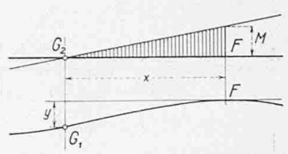

Abb. 40.

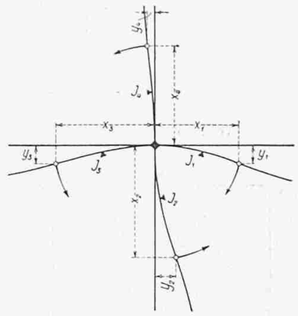

Abb. 41.

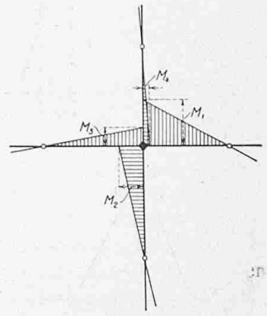

Abb. 42.

Für konstanten Elastizitätsmodul $E$ entsteht die zweite Grundgleichung

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = \frac{y_1\,J_1}{x_1^2} : \frac{y_2\,J_2}{x_2^2} : \frac{y_3\,J_3}{x_3^2} : \frac{y_4\,J_4}{x_4^2}$$

Sowohl für die Längenmasse als auch für die Trägheitsmomente sind nur Verhältniszahlen erforderlich.

Zur Kontrolle muss die Bedingung erfüllt sein, dass die Summe aller an einem Knotenpunkte angreifenden Momente gleich Null sein muss. Mit Bezugnahme auf Abb. 42 ist somit:

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4$$

Setzen wir hier voraus, der absolute Wert des Momentes $M_1$ z. B. sei bekannt, dann gelingt es uns, durch Zerteilen von $M_1$ nach Massgabe der Steifigkeitswerte der Stäbe, die Grösse der andern Momente zu ermitteln.

Es sind ausnahmsweise Fälle möglich, für die ein Stab keinen Nullpunkt erhalten kann; dann ist die Kontrollgleichung $\Sigma(M) = 0$ mit ins Gleichungssystem einzubeziehen. Diese Lösung gilt für die ganze Hauptgruppe II.

Auch bei diesen Modellversuchen spielt der Elastizitätsmodul keine Rolle, solange äussere Kräfte in Frage kommen, also keine Widerlager-Verschiebungen oder Temperatur-Aenderungen zu berücksichtigen sind.

Die Genauigkeit der experimentellen Lösung zur rein rechnerischen schwankt zwischen 1 und 8 %, wobei aber zu bemerken ist, dass der erforderliche Zeitaufwand des Experimentes gegenüber der Rechnung ein äusserst geringer ist. (Schluss folgt).

## Zur Frage der einheitlichen Güterzugbremse.

Von fachmännischer Seite werden wir darauf aufmerksam gemacht, unsere auf Seite 120 dieses Bandes (27. Februar 1926) unter obigem Titel erschienene Mitteilung könnte in nicht unterrichteten Kreisen den irrtümlichen Eindruck erwecken, die französischen Eisenbahnfachleute hätten sich schon mehr oder weniger damit abgefunden, auch in ihrem Lande und in den alliierten Staaten die Kunze-Knorr-Bremse als die zukünftige europäische Güterzugbremse anzuerkennen. Dies sei aber durchaus nicht der Fall. Vielmehr hätten am 17. November letzten Jahres Frankreich und alle ihm verbündeten Staaten auf Grund der Bestimmungen des „Versailler-Vertrages" dem Deutschen Reiche offiziell mitgeteilt, dass sie sich gemeinsam zur Annahme der *Westinghouse*-Bremse als Güterzugbremse entschieden hätten. Die Ansicht von Ingenieur Tolmer (der offenbar mit seinem Spiegelbild „Remlot", dem uns nicht bekannten Verfasser des von uns zitierten Artikels, identisch ist) stelle nicht die Ansicht der massgebenden französischen Kreise dar; das im Schlussatz unserer Mitteilung erwähnte „Comité pour le freinage des trains" sei keine offizielle Stelle.

Hierzu müssen wir nun allerdings bemerken, dass die französischen Eisenbahn-Verwaltungen in ihrem Bericht an die Technische Kommission der Union Internationale des Chemins de Fer (anläss-