Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 87/88 (1926)

Heft: 18

Artikel: Zur Theorie des Wärmeüberganges von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände

Autor: Stodola, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40984

Band 88. Nachdruck von Text und Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 18

Zur Theorie des Wärmeüberganges von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Seit Reynolds wird bekanntlich die Analogie zwischen dem molekularen Impuls- und Wärmetransport, wie er sich in Gasen abspielt, durch Prandtl und v. Kármán mit grossem Erfolg auf die Theorie des Wärmeüberganges auch in Flüssigkeiten, insbesondere bei turbulenter Strömung, angewendet. Dabei handelt es sich in vielen technischen Problemen nicht um die „ausgebildete Turbulenz" sondern um die „Anlaufstrecken", wo in der Hauptmasse eine Potentialströmung stattfindet, die an der Wand in die berühmten Grenzschichten Prandtl's übergeht. Der Anfang der Grenzschichte weist, wie Burgers[1]) durch Versuche erwiesen hat, laminare Strömung auf, die später in turbulente übergeht unter Beibehaltung eines schmalen laminaren Streifens an der Wand. Die Theorie v. Kármáns[2]) beruht auf der Annahme, dass die turbulente Strömung bis an die Wand reicht. Der nachfolgende Beitrag setzt sich zum Ziel, die Theorie auf den allgemeinen Fall auszudehnen und insbesondere *die Reibungswärme* der Turbulenz streng zu berücksichtigen. Die Arbeiten von Prandtl, v. Kármán, Latzko[3]) und Pohlhausen[4]) werden als bekannt vorausgesetzt.

Wir beschänken uns auf eine ebene Strömung längs einer Platte. Es bezeichnen:

x, y rechtwinklige Koordinaten,
u, v Geschwindigkeits-Komponenten nach x, y,
ϱ, γ, c_p Masse und Gewicht der Raumeinheit, spezifische Wärme bei unverändertem Druck,
μ Zähigkeitszahl,
$\nu = \mu/\varrho$ Kinematische Zähigkeit,
U Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
τ durch den Impulsaustausch hervorgerufene (innerhalb der Flüssigkeit scheinbare) Schubspannung, d. h. Reibung in Richtung von u, für die Flächeneinheit,
$\varDelta$ die Dicke der Grenzschichte im Abstand x,
ϑ die von der Wandtemperatur als Nullpunkt aus gerechnete Temperatur im Abstand y,
Θ die Temperatur im Abstand $y = \varDelta$,
q die durch Leitung pro Flächen- und Zeiteinheit hindurchgehende Wärme.

Massystem: technisch, m kg sek.

Die Differentialgleichung v. Kármáns für die Grenzschichtdicke

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\varDelta \varrho\, u\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^\varDelta \varrho\, u^2\, dy - U\int_0^\varDelta \varrho\, u\, dy\right\} = -\varDelta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

muss berichtigt werden in

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\varDelta \varrho\, u\, dy - U\varrho\frac{\partial \varDelta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^\varDelta \varrho\, u^2\, dy - U\int_0^\varDelta \varrho\, u\, dy\right\} = -\varDelta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Es ist nämlich das erste Glied in (1) die Zunahme des Impulses in dem durch $\varDelta$ und dx zur Zeit t bestimmten Rauminhalt, der im Sinne des Impulssatzes bei der Ableitung nach t als unveränderlich anzusehen ist. Da aber die Grenze $\varDelta$ die Zeit mit enthält, nach der man in jener Schreibweise auch differenzieren müsste, ist es notwendig, entweder $\int_0^\varDelta [\partial(\varrho\, u)/dt]\, dy$ zu schreiben, oder, für die Ausrechnung weit bequemer, die Form (1a) zu benützen. Wir beschänken uns auf das sogen. $^1/_7$-Gesetz, d. h. wir nehmen als durch den Versuch erwiesen an, dass in der Grenzschichte, mit Ausnahme unmittelbarer Wandnähe das Gesetz

$$u = U\left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gilt. Dann ergibt sich für die *stationäre Strömung* längs *der Platte* durch Integration von (1a) mit $\partial p/\partial x = 0$ und für $y = 0$

$$\tau_o = \psi\,\varrho\, U^2\left(\frac{\nu}{U\varDelta}\right)^{1/4} \text{ mit } \psi = 0{,}0225 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Schichtendicke

$$\varDelta = 0{,}370\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wie man bei v. Kármán nachlesen kann.

Wir leiten nun zunächst eine Formel für den Wert der Schubspannung im beliebigen Abstand y ab aus den strengen hydrodynamischen Gleichungen (bei $\varrho =$ konst.)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die letzte Gleichung liefert mit Rücksicht auf obige Gleichung (2)

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \frac{U}{8}\left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{1/7} y\,\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{u\, y}{10\, x} \quad . \quad . \quad (7)$$

was mit Benützung von (4) in (5) eingesetzt und mit der Grenzbedingung $\tau = 0$ für $y = \varDelta$ auf

$$\tau = \tau_o\left[1 - \left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{9/7}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

führt. Den *Uebergang zur Wärmeleitung* vermittelt die *„Wärmegleichung"*, die auf 1 m³ bezogen

$$d\,q_{\text{leit}} + d\,q_{\text{reib}} = \gamma\, d\, i - A\, dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

lautet, wo i den Wärmeinhalt (bei Gasen $= c_p\,\vartheta +$ konst.) bedeutet und wo man längs der Platte $dp = 0$ setzen kann. Innerhalb des turbulenten Gebietes ist nach v. Kármán die Leitungswärme senkrecht zur Platte

$$q_{\text{leit}} = \frac{\gamma}{\varrho}\, c_p\, \tau\, \frac{(\partial\,\vartheta/\partial\, y)}{(\partial\, u/\partial\, y)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Leitung in Richtung der Plattenlänge vernachlässigen wir, da sie erheblich kleinern Temperaturgefällen entspricht und hier nur das Wesentliche der Erscheinung hervorgehoben werden soll.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (3), (4) ist

$$q_{\text{leit}} = \varphi\left(\frac{y}{\varDelta}\right)\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\left(\frac{y}{\varDelta}\right)} \text{ mit } \varphi\left(\frac{\nu}{\varDelta}\right) = \frac{7\,\gamma\, c_p\, \tau_0}{\varrho\, U}\left[1 - \left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{9/7}\right]\left(\frac{y}{\varDelta}\right) \quad (11)$$

Als Reibungswärme erhält man für die Raumeinheit, indem man nur die Spannung τ in Betracht zieht, d. h. von der Stirnreibung absieht:

[1]) Siehe die Dissertation: Measurements of the velocity Distribution in the boundary layer along a plane surface, von B. G. van der Hegge Zijnen, Delft 1924.

[2]) „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" 1921.

[3]) Wärmeübergang aus einem turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom; „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", 1921.

[4]) Zur näherungsweisen Integration der Differential-Gleichung der laminaren Grenzschicht. „Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik", 1921.

$$q_{\text{reib}} = A\,\tau\,\frac{\partial u}{\partial y}\;\left(\text{mit } A = \frac{1}{427}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hiernach lautet die Wärmegleichung, da *di* die „substantielle" Aenderung von i bedeutet, bei unveränderlichen γ, c_p

$$\frac{\partial q}{\partial y} + A\,\tau\,\frac{\partial u}{\partial y} = \gamma\,c_p\,\frac{D\vartheta}{dt} = \gamma\,c_p\left[U\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right] \quad (13)$$

Wir führen die Veränderliche

$$\eta = \frac{y}{\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ein, und wählen als Ansatz für ϑ

$$\vartheta = f(\eta, x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei, wie zu erwarten, die hauptsächliche Abhängigkeit des ϑ von x im Δ, das in η vorkommt, zum Ausdruck gelangt. Wir erlauben uns daher angenähert

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -f'\,\frac{y}{\Delta}\,\frac{\Delta'}{\Delta}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = f'\,\frac{1}{\Delta}$$

zu schreiben, so dass Gl. (13) in

$$f'' + f_1\,f' + f_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

übergeht, mit

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{7}{10}\gamma\,c_p\,U\frac{\Delta}{x}\,\eta^{8/7}\right] \\ f_2 &= \frac{A\,U^2\,\varrho}{49\,(\gamma\,c_p)}\,\zeta^{-12/7} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Vernachlässigen wir die Reibungswärme, was der Annahme $f_2 = 0$ entspricht, so stellt sich heraus, dass die Funktion

$$\delta = \Theta\,\eta^{1/7} = \Theta\left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

die Gl. (16) befriedigt. Die Aehnlichkeit der Lösungen für u und ϑ wurde von Latzko a. a. O. hervorgehoben, jedoch unter Stützung auf Gleichungen, die nur für laminare Strömung streng gültig sind.

Die Einfachheit obiger Lösung deutet auch auf eine einfache Gestalt der Funktion f, für die man in der Tat schliesslich die Form

$$f_1 = \frac{6}{7\,\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

erhält. Gleichung (16) liefert dann allgemein nach bekannten Verfahren integriert

$$\vartheta = f(\eta) = -\frac{A\,U^2}{2\,g\,c_p}\,\eta^{2/7} + 7\,c_1\,\eta^{1/7} + c_2 \quad . \quad (20)$$

Wir betrachten vorläufig eine *bis an die Wand* reichende *turbulente* Schichte. Die Konstanten von (20) bestimmen sich dann aus der Bedingung

$\vartheta = 0$ für $\eta = 0$ zu $c_2 = 0$,

und $\vartheta = \Theta$ für $\eta = 1$ zu $7\,c_1 = \Theta + A\,U^2/2g\,c_p$.

Führen wir

$$\Theta_{ad} = \frac{A\,U^2}{2g\,c_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

als diejenige Temperatursteigerung ein, die bei adiabatischer Selbstverdichtung des mit U Anfangsgeschwindigkeit strömenden Gases entspricht, so wird Gleichung (20)

$$\delta = \Theta\,\eta^{1/7} + \Theta_{ad}\,(\eta^{1/7} - \eta^{2/7}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die an die Wand übergehende Wärme bestimmt sich nach (10) für $y = 0$ zu

$$q_o = \frac{\gamma\,c_p\,\tau_o}{U\,\varrho}\,(\Theta + \Theta_{ad}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Diese wichtige Gleichung lässt erkennen, dass *der Wärmeübergang durch die Eigenreibung,* die in Θ_{ad} zum Ausdruck kommt, *erheblich beeinflusst wird,* sobald es sich um *grosse Strömungsgeschwindigkeiten* und *kleine Temperaturunterschiede* zwischen Wand und Gas handelt.

Einfluss der laminaren „Endschichte". Die „End"-schichte, wie wir den zwischen der Wand und der turbulenten Schichte bestehenden laminaren Anteil nennen wollen, ist in ihrer Dicke durch die Forderung bestimmt, dass an der Grenzfläche die laminar berechnete Reibung mit der turbulenten Reibung übereinstimmen muss. Beschränken wir uns auf den Fall *relativ kleiner Endschichtdicken* $= \Delta_1$ so lautet die Bedingung:

$$\tau_{\text{lam}} = \mu\,\frac{u_1}{\Delta_1} = \tau_0\left(1 - \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{9/7}\right) \cong \tau_0$$

Hieraus folgt mit (2) und (3)

$$\eta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\psi^{7/6}}\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{7/8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Innerhalb der Endschichte dürfen wir u als geradlinig voraussetzen, somit

$$u = u_1\,\frac{y}{\Delta_1} = \frac{U}{\eta_1^{6/7}}\,\eta = \psi\,U\left(\frac{U\Delta}{\nu}\right)^{3/4}\eta \quad . \quad (25)$$

schreiben. Die Leitungs- und Reibungs-Wärmen sind

$$\left.\begin{aligned} q_{\text{leit}} &= \lambda\,\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\gamma\,c_p\,\nu}{\sigma\,\Delta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \\ q_{\text{reib}} &= A\tau\,\frac{\partial u}{\partial y} = A\,\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{A\,\varrho\,\nu}{\eta_1^{12/7}}\,\frac{U^2}{\Delta^2} \end{aligned}\right\}. \quad (26)$$

Darin bedeutet σ eine Berichtigungsgrösse, die für Gase von der Grössenordnung 1, für Flüssigkeiten etwa = 1 bis 1000 ist.

Die Quergeschwindigkeit v rechnen wir wieder aus der Kontinuitätsgleichung. Die Temperatur setzen wir, soweit es sich um die Ableitung $\partial\vartheta/\partial x$ handelt, als geradlinig voraus, sodass sich die anderwärts im Einzelnen aufzuzählenden Näherungen

$$\frac{D\vartheta}{dt} = -\frac{\eta^2}{10\,x}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}$$

ergibt. Dann lautet die der Form nach mit (13) gleiche Wärmegleichung:

$$f'' + f_1 f' + f_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sigma\,\Delta^2\,\eta^2}{10\,\nu\,x}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \\ f_2 &= \frac{A\,\sigma}{g\,c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial\eta} &= 4\,U\left(\frac{U\Delta}{\nu}\right)^{3/4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Sonderfall $f_2 = 0$, verschwindend kleine Reibungswärme. Da wir η_1 als sehr klein voraussetzten, wird auch f_1, da es η^2 enthält, klein, und man kann in erster Näherung $f_1 = 0$ somit, nach (27), $f'' = 0$ setzen, woraus sich im laminaren Gebiet

$$\vartheta_I = f(\eta) = b_1\,\eta + b_2$$

und mit Rücksicht auf $\vartheta = 0$ für $\eta = 0$, $b_2 = 0$ somit

$$\vartheta_I = b_1\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ergibt. Im turbulenten Gebiet gilt wieder das Integral (20) mit $A = 0$, d. h.

$$\vartheta_{II} = 7\,c_1\,\eta^{1/7} + c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Lassen wir diese Lösungen bei η_1 vorläufig unmittelbar aneinander stossen, so sind die Grenzbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } \eta = \eta_1;\ \vartheta_I = \delta_{II} \text{ oder } b_1\,\eta_1 = 7\,c_1\,\eta_1^{1/7} + c_2 \\ &\text{für } \eta = 1 \quad \vartheta_{II} = \Theta \text{ oder } 7\,c_1 + c_2 = \Theta \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Ausserdem muss die Wärmemenge die bei $\eta = \eta_1$ aus dem turbulenten Teil herüberströmt, identisch sein mit der durch den laminaren Teil aufgenommenen, d. h. es ist nach (10) und (26)

$$\tau_{1t}\,\frac{\gamma\,c_p}{\varrho\,U}\,7\,c_1 = \frac{\gamma\,c_p\,\nu}{\sigma\,\Delta}\,b_1 = q_{\text{lam}} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Nach Bestimmung von b_1 c_1 c_2 aus (31) (32) ergibt sich für die von der Wand aufgenommene Wärme, wenn wir die Bezeichnungen

$$q_{\text{turb}} = \psi\,\gamma\,c_p\,U\,\Theta\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$N = \frac{1 - \eta_1^{1/7}}{1 - \eta_1^{1/7}} + \frac{\sigma}{\psi^{1/6}}\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{1/8} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

einführen, der Ausdruck

$$q_0 = \frac{q_{\text{turb}}}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Es stellt sich nun die merkwürdige Tatsache heraus, dass, solange σ von der Einheit wenig abweicht, auch N der Einheit nahekommt. *Bei Gasen beeinflusst* daher der *laminare Schichtenübergang* zur Wand die abgegebene *Wärmemenge nur in unwesentlicher Weise.* Bei *Flüssigkeiten* macht sich die *Grösse σ im Nenner* entscheidend geltend und *setzt die übergehende Wärme stark herab.*