Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 89/90 (1927)

Heft: 10

Artikel: Beitrag zur Berechnung von Schrumpfverbindungen

Autor: Janicki, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41755

Band 90. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 10

Beitrag zur Berechnung von Schrumpfverbindungen.

Von Dipl.-Ing. W. JANICKI, Zürich-Baden.

Im Anschluss an die in der „S. B. Z." vom 7. August 1926 (Band 88, Nr. 6) unter obigem Titel erschienene Arbeit soll die Spannungs- und Deformations-Verteilung bei einer Schrumpfverbindung in dem Falle untersucht werden, wo der Kernkörper eine Hohlwelle von verhältnismässig beträchtlicher Wandstärke ist, während der Mantelkörper wiederum ein Schrumpfring sein möge, wie im erstbehandelten Falle. Die Berechnung einer Schrumpfverbindung mit einem dünnwandigen Rohr als Kernkörper soll einer spätern Betrachtung vorbehalten bleiben.

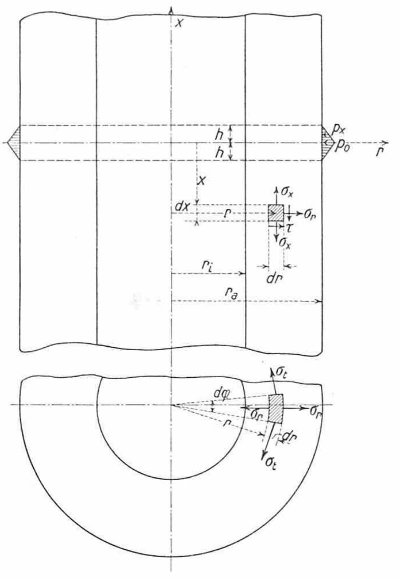

Abb. 1.

Fassen wir den in Abb. 1 dargestellten, in der Mitte durch ein ausserordentlich schmales Band von der Breite $2\,h$ umschnürten Hohlwellenstumpf ins Auge, den wir uns der Einfachheit der Rechnung halber ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit nach beiden Seiten unbegrenzt fortgesetzt denken wollen, so ist der Spannungs-Zustand in der Hohlwelle durch die beiden folgenden partiellen simultanen Differentialgleichungen gekennzeichnet, die man als die statischen Grundgleichungen des Problems ansprechen kann und die die Elastizitätstheorie aller rotations-symmetrisch belasteten Umdrehungskörper beherrschen:

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(r\,\tau) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) + r\,\frac{\partial \tau}{\partial x} &= \sigma_t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (1)$$

Die Bedeutung der vier Spannungskomponenten σ_r, σ_t, σ_x und τ, durch die der Spannungszustand in einem Punkte (x, r) des dargestellten Meridianes vollständig beschrieben wird, ist aus der Abbildung ersichtlich.

Ausser der Annahme, dass die Länge der Hohlwelle gegenüber ihrem Aussendurchmesser gross genug ist, um sie mit hinreichender Genauigkeit als unendlich gross ansehen zu können, sei noch die Voraussetzung getroffen, dass die Gesamtkraft P, mit der das Band den ungefähr in der Mitte der ganzen Länge liegenden Querschnitt umschlingt, eine lineare spezifische Flächendruckverteilung über die halbe Breite h des Ringes ergibt, also dem Ansatz genügt:

$$p_x = p_o\,\frac{h - x}{h} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

worin p_o den Druck pro Flächeneinheit in der Mitte bedeutet. Die Gesamtlast P verteilt sich also dermassen über den ringförmigen Streifen von der Höhe $2\,h$, (wobei h sehr klein gegenüber $2\,r_a$ ist), dass die Beziehung besteht:

$$P = p_o\,r_a\,h \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Die Spannungsverteilung im Hohlzylinder lässt sich nun nach dem von Ritz aufgestellten Prinzip des Minimums der Formänderungsarbeit mit beliebiger Genauigkeit in der Weise durch ein Näherungsverfahren ermitteln, dass man für zwei Spannungskomponenten, z. B. am geschicktesten für τ und σ_r, Ansätze aufstellt, die den Grenzbedingungen genügen und mit grosser Wahrscheinlichkeit das wirkliche elastische Verhalten des Körpers wiedergeben, und dann aus den statischen Gleichungen (1) die beiden fehlenden Spannungskomponenten ermittelt, wobei man dafür Sorge trägt, dass in den beiden ersten Ansätzen noch einige disponible Parameter auftreten. Hierauf berechnet man durch Ausführung einer Integration über den ganzen Rauminhalt des Körpers die diesem angenommenen Spannungszustande entsprechende Formänderungsarbeit, und verfügt über die willkürlichen Freiwerte in der Weise, dass sie die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, wodurch man die beste, mit dem gewählten Ansatz verträgliche Näherungslösung erhält.

Wegen der Symmetrie des Problems kann man alle Betrachtungen auf den in der Richtung der positiven x-Axe fallenden Teil des Kernkörpers beschränken. Zerlegt man für die Berechnung der Formänderungsarbeit diesen obern Teil des Hohlzylinders in zwei Abschnitte (Abschnitt I: $h \leq x \leq \infty$, Abschnitt II: $0 \leq x \leq h$), so lassen sich für τ und σ_r im ersten Abschnitt folgende einfachste Ausdrücke aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= c\,e^{-\gamma x}(r_a - r)(r - r_i) \\ \sigma_r &= \frac{k}{r_a - r_i}\,e^{-\gamma x}(r_a - r)(r - r_i) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

wobei c, k, γ_x disponible Parameter sind. Der exponentielle Dämpfungsfaktor $e^{-\gamma x}$ trägt dem Umstand Rechnung, dass die Spannungen mit wachsendem x rasch abklingen, während die beiden Klammerglieder die Tatsache zum Ausdruck bringen, dass die äussere und innere Mantelfläche des Zylinders im ersten Abschnitt frei von äusseren Kräften sind.[1])

Aus (1) findet man:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{c}{\gamma}\,e^{-\gamma x}\Big(3\,r - 2\,(r_a + r_i) + \frac{r_a\,r_i}{r}\Big) \\ \sigma_t &= -\,e^{-\gamma x}\Big(\frac{k}{r_a - r_i}\,(3\,r^2 - 2\,(r_a + r_i)\,r + r_a\,r_i) \\ &\qquad + \gamma\,c\,r\,(r_a - r)\,(r - r_i)\Big) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

$$\begin{pmatrix} h \leq x \leq \infty \\ r_i \leq r \leq r_a \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Abschnitt werden die Ansätze (4) beibehalten, wobei allerdings Zusatzglieder hinzuzunehmen sind, wie sie von den veränderten Anschlussbedingungen gefordert werden. Man findet:

$$\tau = c\,(r_a - r)\,(r - r_i)\Big(e^{-\gamma x} - \frac{h - x}{h}\Big) \quad \ldots (6)$$

mit der Grenz- und Uebergangsbedingung:

$$\tau = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } (\tau_{\mathrm{I}})_{x=h} = (\tau_{\mathrm{II}})_{x=h}$$

woraus aus (1a):

$$\sigma_x = c\Big(3\,r - 2\,(r_a + r_i) + \frac{r_a\,r_i}{r}\Big)\Big(-\frac{1}{\gamma}\,e^{-\gamma x} + \frac{(h-x)^2}{2\,h}\Big) \quad (7)$$

[1]) Durch Multiplikation beider Ansätze für τ und σ_r mit einem Polynom von der Form $\Sigma\,c_n\,r^n$ und $\Sigma\,k_n\,r^n$, d. h. durch Einführung weiterer Freiwerte c_i und k_i in der Anzahl $2\,n$ könnte die Genauigkeit des hier angewandten Verfahrens beliebig gesteigert werden, wovon aber an dieser Stelle der Umständlichkeit der Rechnung wegen abgesehen sei.

mit der Anschlussbedingung:

$$(\sigma_{xI})_{x=h} = (\sigma_{xII})_{x=h}$$

$$\sigma_r = \frac{r - r_i}{r_a - r_i}\left(k\, e^{-\gamma x}\,(r_a - r) - p_0 \frac{h - x}{h}\right) \quad . \quad . \quad (8)$$

mit der Grenz- und Uebergangsbedingung:

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -\,p_0 \frac{h - x}{h} \text{ und } (\sigma_{rI})_{x=h} = (\sigma_{rII})_{x=h}$$

woraus aus (1 b):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t = &-e^{-\gamma x}\Big(c\,\gamma\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i) \\ &+ \frac{k}{r_a - r_i}\,(3\,r^2 - 2\,(r_a + r_i)\,r + r_a\,r_i)\Big) \\ &+ \frac{c}{h}\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i) - \frac{2\,r - r_i}{r_a - r_i}\, p_0 \frac{h - x}{h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (9)$$

wobei es allerdings nicht mehr gelingt, den Ausdruck für σ_t im zweiten Abschnitt so zu bestimmen, dass für $x = h$ nach Gleichung (5 b) und (9) der selbe Wert herauskommt. Es ergibt sich ein plötzlicher Sprung im Wert von σ_t an dieser Stelle im Betrag von $r \frac{c}{h}(r_a - r)\,(r - r_i)$, der aber keine notwendige Gleichgewichtsbedingung verletzt, worauf es bei dem von uns hier eingeschlagenen Näherungsverfahren in erster Linie ankommt.

Die Formänderungsarbeit im ersten Abschnitt berechnet sich nach der Formel:

$$A_I = \int\limits_h^\infty dx \int\limits_{r_i}^{r_a} 2\,\pi\, r\, A'\, d\,r \sim \int\limits_0^\infty dx \int\limits_{r_i}^{r_a} 2\,\pi\, r\, A'\, d\,r,$$

wobei A' die auf die Raumeinheit bezogene Deformationsarbeit bedeutet:

$$A' = \frac{1}{2\,G}\left(\frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2) - \frac{1}{2\,(m+1)}(\sigma_x + \sigma_r + \sigma_t)^2 + \tau^2\right) \quad (10)$$

wobei m die Poisson'sche Konstante und G den Schubmodul des Materials bedeuten. Die Rechnung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} A_I = \frac{\pi}{4\,G\,\gamma}\Big[&\frac{m}{m+1}\left(\alpha_1 \frac{c^2}{\gamma^2} + \beta_1\, k^2 + \gamma_1\, \gamma^2\, c^2\right) \\ &+ k\, c\, \gamma\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{m+1}\right) + \frac{1}{m+1}\,\varepsilon_1 \frac{c\,k}{\gamma} + \zeta_1\, c^2 \end{aligned}\right. \quad . \quad (11)$$

wobei $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \zeta_1$ folgende Abkürzungen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b^4}{4}\,[(\lambda^2 - 1)\,(\lambda^2 - 4\,\lambda + 1) + 4\,\lambda^2\, ln\,\lambda] \\ \beta_1 &= \frac{1}{60}\,\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\, r_i^4\,[7(\lambda^4 + 1) - 18\,\lambda\,(\lambda^2 + 1) + 22\,\lambda^2] \\ \gamma_1 &= \frac{1}{840}\, r_i^8\,[5\,(\lambda^8 - 1) - 16\,\lambda\,(\lambda^6 - 1) + 14\,\lambda^2\,(\lambda^4 - 1)] \\ \delta_1 &= \frac{1}{210}\,\frac{r_i^6}{\lambda - 1}\,[2\,(\lambda^7 - 1) - 7\,\lambda\,((\lambda^5 - 1) - \lambda\,(\lambda^3 - 1))] \\ \delta_2 &= \frac{1}{210}\,\frac{r_i^6}{\lambda - 1}\,[502\,(\lambda^7 \; 1) + 7\,\lambda\,((145(\lambda^5 - 1) + 71\,\lambda(\lambda^3 - 1))] \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{30}\,\frac{r_i^4}{\lambda - 1}\,[9\,(\lambda^5 - 1) - 25\,\lambda\,(\lambda^3 - 1) + 30\,\lambda^2\,(\lambda - 1)] \\ \zeta_1 &= \frac{1}{30}\, r_i^6\,(\lambda + 1)\,(\lambda - 1)^5 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left(\lambda = \frac{r_a}{r_i} > 1\right)$$

Die Berechnung der Formänderungsarbeit A_{II} im zweiten Abschnitte des Zylinders vereinfacht sich erheblich durch die Bemerkung, dass wegen der Kleinheit von h und hiermit des Volumens nur solche Glieder der spezifischen Deformationsarbeit A'' in Betracht gezogen werden brauchen, die selbst sehr gross sind, sodass sie trotz des kleinen Rauminhalts, über den sie sich erstrecken, doch noch einen der Grössenordnung nach mit A_I vergleichbaren Beitrag zu A_{II} liefern können. Von den Spannungskomponenten (6) bis (9) werden aber nur jene Glieder in σ_r und σ_t sehr gross, die p_0 enthalten, sowie das Glied in σ_t, bei dem sonst noch h im Nenner auftritt. Alle andern Glieder können dagegen vernachlässigt werden und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} A'' = \frac{1}{4\,G}\Big[&\left(\frac{r - r_i}{r_a - r_i}\right)^2 \left(\frac{h - x}{h}\right)^2 p_0^2 + \\ &+ \left(\frac{c}{h}\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i) - \frac{2\,r - r_i}{r_a - r_i}\, p_0 \frac{h - x}{h}\right)^2 - \\ &- \frac{1}{m+1}\left(\frac{c}{h}\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i) - \frac{3\,r - 2\,r_i}{r_a - r_i}\, p_0 \frac{h - x}{h}\right)^2\Big] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13)$$

woraus sich die totale Deformationsarbeit im zweiten Abschnitt berechnet zu:

$$A_{II} = \int\limits_0^h dx \int\limits_{r_i}^{r_a} 2\,\pi\, r\, A''\, d\,r = \frac{\pi}{4\,G}\,(K_1 + K_2\, c + K_3\, c^2) \quad . \quad (14)$$

Wobei K_1, K_2, K_3 folgende Ausdrücke bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{h\, p_0\, r_i^2}{60\,(\lambda - 1)^2}\Big[5\,(\lambda^4 - 1) - 8\,(\lambda^3 - 1) + 4\,(\lambda^2 - 1) - \\ &\quad - \frac{1}{m+1}\left(9\,(\lambda^4 - 1) - 16\,(\lambda^3 - 1) + 8\,(\lambda^2 - 1)\right)\Big] = \\ &\quad = \eta_1 - \frac{1}{m+1}\,\eta_2 \\ K_2 &= \frac{p_0}{30\,(\lambda - 1)}\, r_i^5\Big[10\,(\lambda^6 - 1) - 12\,(2\,\lambda + 3)\,(\lambda^5 - 1) + \\ &\quad + 15\,(3\,\lambda + 1)\,(\lambda^4 - 1) - 20\,\lambda^2\,(\lambda^3 - 1) - \\ &\quad - \frac{1}{m+1}\Big(30\,(\lambda^6 - 1) - 12\,(3\,\lambda + 1)\,(\lambda^5 - 1) + \\ &\quad + 15\,(5\,\lambda + 1)\,(\lambda^4 - 1) - 40\,\lambda\,(\lambda^3 - 1)\Big)\Big] = \\ &\quad = \xi_1 - \frac{1}{m+1}\,\xi_2 = K''\, p_0 \\ K_3 &= \frac{r_i^8}{420\,h}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\Big[105\,(\lambda^8 - 1) - \\ &\quad - 240\,(\lambda + 1)\,(\lambda^7 - 1) + 140\,(\lambda^2 + 4\,\lambda + 1)\,(\lambda^6 - 1) - \\ &\quad - 336\,\lambda\,(\lambda + 1)\,(\lambda^5 - 1) + 210\,\lambda^2\,(\lambda^4 - 1)\Big] = \\ &\quad = \vartheta_1 - \frac{1}{m+1}\,\vartheta_2 = \frac{1}{h}\, K''' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Somit ergibt sich für die gesamte Formänderungsarbeit in beiden Zylinderabschnitten folgender Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} A = A_I + A_{II} = \frac{\pi}{4\,G}\Big(&C_1 \frac{c^2}{\gamma^3} + C_2 \frac{k^2}{\gamma} + C_3\, \gamma\, c^2 + \\ &C_4\, c\, k + C_5 \frac{ck}{\gamma^2} + C_6 \frac{c^2}{\gamma} + K_2\, c + K_3\, c^2 + K_1\Big) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \frac{m}{m+1} = C_1, \quad \beta_1 \frac{m}{m+1} = C_2, \quad \gamma_1 \frac{m}{m+1} = C_3 \\ &\delta_1 - \frac{\delta_2}{m+1} = C_4, \quad \frac{\varepsilon_1}{m+1} = C_5, \quad \zeta_1 = C_6 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Forderung des Minimums der Formänderungsarbeit führt dann zu folgenden drei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der drei Freiwerte γ, c und k:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \gamma} &= -\frac{\pi}{4\,G}\Big[3\,C_1 \frac{c^2}{\gamma^4} + 2\,C_5 \frac{ck}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}(C_2\, k^2 + C_6\, c^2) - \\ &\qquad - C_3\, c^2\Big] = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{\pi}{4\,G}\Big[c\left(\frac{2\,C_1}{\gamma^3} + 2\,C_3\,\gamma + \frac{2\,C_6}{\gamma} + 2\,K_3\right) + \\ &\qquad + k\left(C_4 + \frac{C_5}{\gamma^2}\right) + K_2\Big] = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial k} &= \frac{\pi}{4\,G}\Big[2\,C_2 \frac{k}{\gamma} + C_4\, c + \frac{C_5\, c}{\gamma^2}\Big] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Daraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= +\sqrt{\frac{C_4 C_5 - 2\,C_2 C_6 \pm \sqrt{(C_4 C_5 - 2\,C_2 C_6)^2 + 3(4\,C_1 C_2 - C_5^2)\,(4\,C_2 C_3 - C_4^2)}}{C_4^2 - 4\,C_2\,C_3}} \\ c &= \frac{2\,C_2\,K_2\,\gamma^3}{(4\,C_2 C_3 - C_4^2)\,\gamma^4 + 4\,C_2 K_3\,\gamma^3 + 2\,(2\,C_2 C_6 - C_4 C_5)\,\gamma^2 + (4\,C_1 C_2 - C_5^2)} \\ k &= -\frac{C_4\,\gamma^2 + C_5}{2\,C_2\,\gamma}\, c \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Unter der vereinfachenden Annahme $m = \infty$ berechnet sich die elastische Verkürzung $\Delta\, r_a$, die der Halbmesser r_a des Zylinders an der Stelle $x = 0$ erfährt, aus der Verkürzung des äusseren Kreisumfanges wie folgt:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} = -\frac{1}{E}\left(k\, r_a + \frac{2\,r_a - r_i}{r_a - r_i}\, p_0\right),$$

$$\Delta\, u = \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon_t\, r_a\, d\varphi = r_a\, \varepsilon_t\, 2\,\pi = -\frac{2\,\pi\, r_a}{E}\left(k\, r_a + \frac{2\,r_a - r_i}{r_a - r_i}\, p_0\right)$$

wobei ε_t die spezifische Dehnung in der Tangentialrichtung, $\Delta\, u$ die Kreisumfangverkürzung und E den Elastizitätsmodul des Materials für Zug bedeutet. Daraus findet man:

$$(\Delta\, r_a)_{x=0} = -\frac{r_a}{E}\left(k\, r_a + \frac{2\,r_a - r_i}{r_a - r_i}\, p_0\right) \quad . \quad . \quad (20)$$

Fasst man wiederum den Mantelkörper als Scheibe auf, so führen die gleichen Ueberlegungen wie in der eingangs angeführten Arbeit zu folgenden drei Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten B^*, C^* und die maximale spezifische Flächenpressung p_0 ($m = \infty$ gesetzt und $E_1 = E_2 = E$ angenommen):

$$\left.\begin{aligned} E\left(B^* - \frac{C^*}{R_2^2}\right) &= 0 \\ \left(B^* R_1 + \frac{C^*}{R_1}\right) - \frac{r_a}{E}\left(k\, r_a + \frac{2\, r_a - r_i}{r_a - r_i} p_0\right) &= \Delta \\ E\left(B^* - \frac{C^*}{R_1^2}\right) &= p_0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Daraus findet man ($R_1 = a$ gesetzt):

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{(r_a^2\, k + E\, \Delta)\,(r_a - r_i)\,(r_a^2 - R_2^2)}{2\, r_a^3\,(r_a - r_i) - r_a\,(2\, r_a - r_i)\,(r_a^2 - R_2^2)}\,; \\ B^* &= \frac{r_a^2\, p_0}{E\,(r_a^2 - R_2^2)}\,;\; C^* = B^*\, R_2^2 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Zahlenbeispiel: Die gefundenen Ergebnisse sollen nun an einem Zahlenbeispiel erläutert werden. Es seien folgende Grössen der Berechnung zugrunde gelegt: $r_a = 20$ cm, $r_i = 10$ cm, $R_2 = 40$ cm, $h = 0{,}5$ cm; $\lambda = 2$. $\Delta = 1{,}5\,‰$ von $r_a = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0{,}03$ cm. $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kg/cm² $m = \infty$.

$C_1 = \alpha_1 = 5{,}22 \cdot 10^3$. $C_2 = \beta_1 = 1{,}35 \cdot 10^4$. $C_3 = \gamma_1 = 11{,}845 \cdot 10^7$. $C_4 = \delta_1 = 297{,}6 \sim 300$. $C_5 = 0$. $C_6 = \zeta_1 = 10^5$. $\gamma = 0{,}11$. $K_2 = -11 \cdot 10^5\, p_0$. $K_3 = -4906{,}3 \cdot 10^7$. $c = 1{,}02 \cdot 10^4\, p_0$. $k = -1{,}24 \cdot 10^7\, p_0$ $p_0 \sim -900$ kg/cm².

$B^* = 136 \cdot 10^6$. $C^* = 0{,}22$

$(\sigma_t^*)_{r=R_2} = \sim 600$ kg/cm². $(\sigma_r^*)_{r=R_2=ra} = -900$ kg/cm². $(\sigma_t^*)_{r=R_1=ra} = \sim 1500$ kg/cm². $(\sigma_t)_{r=ra} = -2700$ kg/cm². $(\sigma_r)_{r=ra} = -900$ kg/cm². $(\sigma_t)_{r=ri} = \sim -900$ kg/cm². $(\sigma_r)_{r=ri} = 0$.

Handelt es sich um Schrumpfringe von einer Breite, die gegenüber den andern Abmessungen beträchtlich ist, so lassen sich in Anlehnung an die von A. & L. Föppl durchgeführte Untersuchung für den Vollzylinder als Kernkörper[1]) nach dem Superpositionsprinzip folgende Formeln für den Spannungs- und Deformationszustand einer unendlich langen Welle ableiten, die in der Mitte auf eine Länge l ringsum gleichmässig mit einer konstanten spezifischen Flächenpressung p_0 beansprucht ist:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{p_0}{\gamma} K_4\,(r^a - r)\,(r - r_i)\left[e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}}\right] \\ \sigma_x &= -\frac{p_0}{\gamma^2} K_4\left(3\,r - 2\,(r_a + r_i) + \frac{r_a\, r_i}{r}\right) \\ &\qquad \left[2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}}\right] \\ \sigma_r &= \frac{r - r_i}{r_a - r_i}\left[\frac{p_0}{\gamma} K_5\left(2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}}\right) - p_0\right] \\ \sigma_t &= -\frac{p_0}{\gamma}\left(2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}}\right) \\ &\quad \left[\frac{K_5}{r_a - r_i}\left[3\, r^2 - 2\,(r_a + r_i)\, r + r_a\, r_i\right] + \right. \\ &\left. + \gamma K_4\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i)\right] + p_0 K_4\, r\,(r_a - r)\,(r - r_i) - \frac{2\,r - r_i}{r_a - r_i} p_0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

wobei $K_4 = \frac{K''}{2\,K'''}$ $K_5 = -\frac{C_4\,\gamma^2 + C_5}{2\,C_2\,\gamma} K_4$ und K'' und K''' die in (15) angegebenen Abkürzungen bedeuten. Die Formeln (23) gelten nur für die *innerhalb* des Belastungsstreifens ($|x| \leq l/2$) gelegenen Elemente, wobei der Koordinatenursprung in der Mitte der Strecke l angenommen ist. Die Verkürzung v des Ausserhalbmessers r_a berechnet sich für die Stelle $x = 0$, $r = r_a$ analog wie in Formel (20) zu:

$$v = -\frac{p_0}{E} r_a\left[\frac{2\, r_a\, K_5}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma \frac{l}{2}}\right) + \frac{2\, r_a - r_i}{r_a - r_i}\right] = -\frac{r_a\, p_0}{E} V \quad (24)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Schrumpfverbindung lauten analog Formeln (21):

$$\left.\begin{aligned} E\left(B^* - \frac{C^*}{R_2^2}\right) &= 0 \\ B^* R_1 + \frac{C^*}{R_1} - \frac{r_a\, p_0}{E} V &= \Delta \\ E\,(B^* - C^*/R_1^2) &= p_0 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

[1]) A. & L. Föppl „Drang und Zwang" Band II, 1920, Seite 177 bis 180.

und ihre Auflösung nach p_0, B^* und C^* ergibt:

$$p_0 = \frac{-E\,\Delta}{r_a\left(V + \frac{R_2^2 + r_a^2}{R_2^2 - r_a^2}\right)},\quad B^* = -\frac{p_0}{E}\frac{r_a^2}{R_2^2 - r_a^2},\quad C^* = B^* R_2^2 \quad (26)$$

Zahlenbeispiel: Legt man der Rechnung die gleichen Daten wie im ersten Beispiel zu Grunde, mit dem einzigen Unterschied, dass man jetzt $2\,h = l = 2$ cm wählt, so findet man:

$p_0 = \sim -700$ kg/cm², $B^* = 10{,}7 \cdot 10^{-5}$, $C^* = 0{,}1712$.

$(\sigma_r^*)_{r=R_1=ra} = -700$ kg/cm², $(\sigma_t^*)_{r=R_1=ra} = 1177$ kg/cm²,

$(\sigma_r^*)_{r=R_2} = 470$ kg/cm².

$(\sigma_t)_{\substack{r=ra\\x=0}} = -1150$ kg/cm², $(\sigma_t)_{\substack{r=ri\\x=0}} = -2120$ kg/cm²,

$(\sigma_x)_{\substack{r=ra\\x=0}} = +275$ kg/cm²

$(\sigma_x)_{\substack{r=ri\\x=0}} = -275$ kg/cm², $(\tau)_{r=ra} = 0$. $(\tau)_{r=ri} = 0$.

Rechnet man das gleiche Zahlenbeispiel zum Vergleich nach der Scheibentheorie[1]) durch, so findet man: Trommel (Mantelkörper): $(\sigma_r^*)_{r=R_1=ra} = -990$ kg/cm².

$(\sigma_t^*)_{r=R_1=ra} = 1650$ kg/cm². $(\sigma_t^*)_{r=R_2} = 660$ kg/cm²

Zapfen (Kernkörper): $(\sigma_r)_{r=ra} = -990$ kg/cm².

$(\sigma_t)_{r=ra} = -1650$ kg/cm². $(\sigma_t)_{r=ri} = -2640$ kg/cm².

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass die Beanspruchungen nach den Formeln der Scheibentheorie etwas ungünstiger ausfallen als nach denen des von uns angewandten Verfahrens. Rechnet man das selbe Beispiel für andere Werte des Parameters l durch, so findet man, dass sich die Spannungswerte nur wenig in Abhängigkeit von l ändern, solange l innerhalb gewisser Grenzen ($l \leq R_2$) bleibt.

Die Häuser der Arch. H. W. Moser und M. Kopp

zwei Wohnhäuser am Zürichsee.

(Hierzu Tafeln 6 bis 9.)

Die auf den folgenden Seiten und Tafeln in Bildern und Rissen vorgeführten behaglichen Wohnhäuser, die Eigenheime der beiden Firmateilhaber Hans W. Moser und Max Kopp, stellen den seltenen Glücksfall dar, in dem der Architekt sein eigener Bauherr sein kann. Sie liegen einander gegenüber: das Haus Moser am sonnigen Rebhang von Herrliberg, Haus Kopp am seeseitigen, dem Nordostwind ausgesetzten Rand der Terrasse oberhalb Bendlikon. Darin, in ihrer klimatischen Situation, liegt ihr wesentlicher Unterschied. Im übrigen geben uns die Erbauer folgende Erläuterungen zu den Bildern.

Allgemeines. Die Häuser Moser und Kopp wurden im Jahre 1923/24 erbaut und im Frühjahr 1924 bezogen. In beiden Fällen handelte es sich darum, für eine junge Familie mit relativ beschränkten Mitteln ein Heim in Stadtnähe zu schaffen, das, ganz ins Grün eingebettet, in Kontakt mit der Natur steht.[2]) Es ist darum eine Selbstverständlichkeit, dass in beiden Fällen nach der Sonne orientiert wurde, dass die Räume bei aller Sparsamkeit nicht kleinlich ausfielen, dass Wohnzimmer und Garten in direkter Verbindung zu einander stehen und dass breite, mit Steinplatten belegte Terrassen vor der Sonnenseite der Häuser liegen. Eine gedeckte Laube bildet die windgeschützte Sommerwohnstube und blühende Staudenbeete säumen die Terrasse gegen die Wiese.

Aus dieser Einstellung zur Situation und zur Natur ergibt sich von selber der Ausdruck der Häuser, die ein bescheidenes und behagliches Wohnen ausdrücken. Sie wollen weder Weltanschauungen manifestieren, noch mit

[1]) Siehe z. B. A. Stodola, „Dampf- und Gasturbinen". 5. Aufl., 1922, Seite 343.

[2]) Die nämlichen Gegebenheiten also und Erfordernisse, die vor 20 Jahren den Herausgeber zum Bau seines Hauses im „Maiensäss" geführt hatten, in dessen Nähe nun auch das Haus Kopp steht. Vergleiche Band 72, Seite 143 (2. Oktober 1918). Red.