

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 91/92 (1928)  
**Heft:** 26

**Artikel:** Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt- und Seilpolygon-Verfahren  
**Autor:** Pasternak, Peter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42525>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt- und Seilpolygon-Verfahren. — Zwei Wohnhäuser an der französischen Riviera. — Eidgenössisches Amt für Wasserwirtschaft. — Mitteilungen: Vom deutschen Strassenbau. Winddruckmessungen an einem Hausmodell. Ausstellung „Der Stuhl“ Stuttgart. Der Tag für Denkmalpflege und Heimatschutz. Versuche mit der Drolshammer-Güterzug-

bremse. Prof. Rob. Thomann. Vereinigung schweizerischer Strassenfachmänner. — Wettbewerbe: Pavillons für Nervenranke im Neuenburgischen Kantonspital Perreux. Wartehäuschen in Genf. Kindergartenhaus in Zürich 3. — Literatur. — Schweizer. Verband für die Materialprüfungen der Technik.

Dieser Nummer ist das Inhalts-Verzeichnis von Band 91 beigelegt.

Band 91. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

№. 26

## Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt- und Seilpolygon-Verfahren.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Zürich, Privatdozent an der Eidgen. Techn. Hochschule.

(Schluss von Seite 294.)

### IV. DER DURCHLAUFENDE TRÄGER AUF ELASTISCH DREHBAREN STÜTZEN.

Ausgehend vom Hauptsystem der als einfachen Balken gelagerten Riegelfelder und der an den Stützenköpfen frei drehbar, aber in horizontaler Richtung unverschieblich gelagerten Stützen (bei Einspannung am Fusse sind also die Stützen im Hauptsystem einfach statisch unbestimmt), erhält man zur Bestimmung der Riegelendmomente (an jeder Stütze zwei, deren Differenz von der Stütze aufgenommen wird), wie schon unter I erwähnt, wieder dreigliedrige Gleichungen, mit abwechselnd negativen und positiven Vorzeichen ausserhalb der rechtsfallenden Diagonale der Gleichungsmatrix. Wir greifen irgend drei aufeinanderfolgende Riegelfelder samt den zugehörigen Seiten des Schlusspolygons heraus und bezeichnen, der Einfachheit wegen, die im betrachteten Bereich auftretenden aufeinanderfolgenden Riegelendmomente mit  $M_1$  bis  $M_6$  (Abbildung 15). Da auf jeder Zwischenstütze zwei Momente abgetragen sind, hat man alle Zwischen-Stützvertikalen als *Doppelpaxen* zu betrachten und sie mit zwei aufeinanderfolgenden Ordnungszahlen zu bezeichnen.

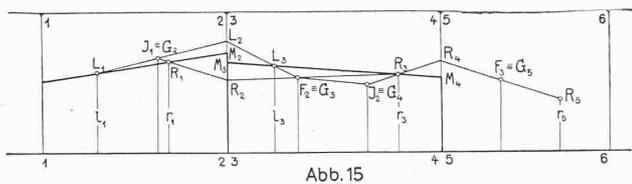


Abb. 15

Die zur Stütze 23 der Abbildung 15 gehörenden Dreimomentengleichungen lauten:

$$G_2 = a_{12} M_1 + (a_{22} + e_{23}) M_2 - e_{23} M_3 + a_{20} = 0$$

$$G_3 = -e_{23} M_2 + (a_{33} + e_{23}) M_3 + a_{34} M_4 + a_{30} = 0$$

Hierin ist  $e_{23}$  die Stützkopfdrehung infolge eines auf die Stütze 23 an ihrem Kopfe wirkenden Momentes  $M = 1$  und kann auf bekannte Weise ermittelt werden. Die Bedeutung der übrigen Vorzeichen und der Belastungsglieder ist mit z. T. andern Bezeichnungen genau die gleiche wie beim kontinuierlichen Träger auf frei drehbaren Stützen

$$(a_{22} = a_{22}^t, a_{33} = a_{33}^t, a_{20} = a_{20}^t, a_{30} = a_{30}^t)$$

Die zu den obigen Gleichungen gehörenden Grundpunkte  $G_2$  und  $G_3$  stimmen überein mit den Festpunkten für starre Einspannung  $J_1$  und  $F_2$  in den Feldern 1 ÷ 2 und 3 ÷ 4; denn die  $e$  heben sich in den Vorzeichen-Quersummen auf und gehören zu  $M$ , die in den selben Parallelaxen (hier in der Axe 23) liegen. Die  $L$ - und  $R$ -Punkte, d. h. die Punktrepräsentanten der zweigliedrigen Gleichungen liegen jetzt teils auf den gesuchten Schlusspolygonseiten, teils auf den Stützvertikalen. So sind  $L_1, R_1$  und  $L_3, R_3$  Feld-Festpunkte, während  $L_2, R_2$  auf der Stützvertikalen 23 zu suchen sind. Aus der Gleichung für  $L_3$ , d. h.

$$L_3 = G_3 + \mu_2 L_2 = G_3 + \mu_2 (G_2 + \mu_1 L_1) = \mu_1 \mu_2 L_1 + \mu_2 G_2 + G_3 = 0$$

und der entsprechenden Gleichung für  $R_3$  und II 4 folgt, dass sich die aufeinanderfolgenden  $L$ - und  $R$ -Feldfestpunkte aus den Feldfestpunkten  $F, J$  auf genau die selbe Weise wie bei freidrehbarer Lagerung bestimmen lassen, sobald die  $l$ - und  $r$ -Festlinien vorliegen (vergl. Abb. 10 auf Seite 293).

Die  $A$ - und  $B$ -Punkte haben hier die Bedeutung der  $L$ - und  $R$ -Festpunkte auf den Stützvertikalen (Abbildung 15).

Zur Eintragung der  $l$ - und  $r$ -Linien stehen uns wieder zwei Wege, der massengeometrische und der graphostatische, zur Verfügung. Während bei frei drehbarer Stützung beide Verfahren sich als gleichwertig erwiesen hatten, wird es sich mit aller Deutlichkeit zeigen, dass bei elastisch drehbarer Stützung der weniger bekannten massengeometrischen Lösung ganz entschieden der Vorzug zu geben ist.

#### a) Die massengeometrische Lösung.

Wir denken uns den Träger nur rechts der Stütze 45 belastet. Die Momentengeraden im Feld 3 ÷ 4 und im linksbenachbarten Feld 1 ÷ 2 gehen dann durch die Festpunkte  $L_3$  und  $L_1$ ; die Aufgabe besteht also in der Ermittlung von  $L_3$ , bei gegebenem  $L_1$ . Die entsprechende einfachste Konstruktion (Abb. 16 a auf S. 321) ergibt sich unmittelbar aus der massengeometrischen Deutung der zur Stütze 23 gehörenden homogenen Dreimomentengleichungen

$$J_0 = a_{12} M_1 + (a_{22} + e) M_2 - e M_3 = 0$$

$$F_0 = -e M_2 + (a_{33} + e) M_3 + a_{34} M_4 = 0$$

Es liegt nahe, den durch die erste Gleichung dargestellten Festpunkt für starre Einspannung  $J_0$  als Schwerpunkt der Massenpunkte

$$Q = a_{12} M_1 + (a_{22} + e) M_2 + a_0 = 0$$

und

$$M_3 = -e M_2 - a_0 = 0$$

aufzufassen. Da in der Gleichung von  $Q$  nur  $M_1$  und  $M_2$  auftreten, liegt dieser Punkt auf der Momentengeraden durch  $L_1$ ; er liegt aber auch auf der bekannten Schwerlinie von  $a_{12}$  in 01 und  $(a_{22} + e)$  in 23, also auf der Momenten-Festlinie  $q$  des vom Riegelstab 1 ÷ 2 und der Stütze 23 gebildeten linksseitigen einseitigen Rahmens. Die  $q$ -Linie rechnet man am besten ein vermitteltst ihres Abstandes  $a_1$  von der Stütze

$$a_1 = l_{12} \frac{a_{12}}{s_2 + e} = a_0 \frac{s_2}{s_2 + e},$$

wo  $a_0$  = Festabstand für starre Einspannung.

Durch die entsprechende Spaltung der Gleichung von  $F_0$  erkennt man, dass die Punkte  $M_2, P, F_0$  ebenfalls auf einer Geraden liegen, wobei  $P$  gleichzeitig auf der Momentengeraden durch  $L_3$ , und auf der Momentenfestlinie  $p$  des rechtsseitigen einseitigen Rahmens gebildet vom Riegel 4 ÷ 3 und der selben Stütze 2 ÷ 3 sich befindet. Die  $p$ - und  $q$ -Geraden, die zuerst Ostfeld<sup>9)</sup> ohne ihre statische Bedeutung angegeben hat, lassen sich natürlich auch rein graphisch, unter Umgehung der Berechnung von  $e$ , bestimmen. Man hat hierzu bloss den untern Stützenfestpunkt einmal nach rechts, das andere Mal nach links in die Riegelaxe heraufzuklappen und eine der beiden Konstruktionen für die Momentenfestpunkte bei frei drehbarer Lagerung anzuwenden. Hat man die Festlinien für starre Einspannung und der links- und rechtsseitigen einseitigen Rahmen, d. h. die  $i, f, q$ - und  $p$ -Geraden eingetragen, so lassen sich also nach Abbildung 16 a aus  $L_1$  und  $R_3, L_3$  und  $R_1$  folgendermassen bestimmen. Man legt durch  $L_1$  eine beliebige Gerade und schneidet sie in  $Q$  und  $M_2$  mit  $q$  und  $a$ .  $J_0$  verbindet man mit  $Q$  bis zum Schnittpunkt  $M_3$

<sup>9)</sup> Graphische Behandlung der kont. Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren und elast. senk- und drehbaren Stützen. Zeitschrift f. Arch. und Ingenieurwesen, 1905, S. 47.

mit  $a$ ; die Verbindungsgerade  $M_2 F_0$  schneidet man mit der Elastizitätslinie in  $P$ . Die Gerade  $M_3 P$  schneidet endlich aus der  $m$ -Axe  $L_3$  heraus. Die entsprechenden Linien geben  $R_1$  aus  $R_3$ , wobei man eine der zur Bestimmung von  $L_3$  aus  $L_1$  schon gezeichneten Geraden benutzen kann (in der Abbildungen  $J_0 M_3$ ). Ausser dieser Festpunkt-konstruktion geben wir in den Abbildungen 16 b und c noch zwei weitere an. Es leuchtet nämlich ein, dass man für die Bestimmung des einen der beiden Parallelbüschel der  $l$ - und  $r$ -Festlinien auf eines der Büschel der Elastizitätslinien  $p$  oder  $q$  verzichten kann<sup>10)</sup>, sobald ausser den Festlinien  $f, i$  noch die „verschränkten Drittelpunkte“  $V$ , d. h. die resultierenden Massenpunkte der den Stützen benachbarten  $F$ -,  $J$ -Punkte auf der  $m$ -Axe gegeben werden. Die erste der drei Konstruktionen ist die einfachste, da sie die Eintragung der verschränkten Drittellinien überhaupt entbehrlich macht. In allen drei Konstruktionen handelt es sich immer um die Bestimmung eines Vierecks (in den Abbildungen 16 schraffiert), dessen Ecken auf drei bzw. vier festen Parallelgeraden liegen und von dem drei Seiten durch drei feste Punkte auf der  $m$ -Axe gehen.

Irgend zwei von den unendlich vielen möglichen Vierecken solcher Art befinden sich also in zentrischer Affinität und die vierten Seiten in diesen Vierecken müssen sich also in der Tat ebenfalls um einen festen Punkt auf der  $m$ -Axe, d. h. um den gesuchten  $L$ - oder  $R$ -Punkt drehen.

Vermittelt aller drei möglichen Konstruktionen, von denen *A. Ostenfeld* in seiner erwähnten Arbeit nur die unter b) angibt, erhält man in den Geraden  $L_1 M_2$  und  $L_3 M_3$  zwei richtige Seiten des Momentenpolygons, falls sämtliche Felder links der Stütze 45 keine Belastungen (im allgemeinen Sinne des Wortes) tragen. Entsprechend sind auch  $R_1 M_2$  und  $R_3 M_3$  zwei richtige Momentenpolygonseiten, falls rechts der Stütze 01 keine Belastungen liegen. Unter den gemachten Voraussetzungen sind die positiven Verhältnisse  $M_2 : M_3$  und bezw.  $M_3 : M_2$  Konstanten, die sogenannten Uebergangszahlen, die zur Weiterleitung der Momente vom Feld 3  $\rightarrow$  4 ins unbelastete Feld 1  $\rightarrow$  2, bezw. vom Feld 1  $\rightarrow$  2 ins unbelastete Feld 3  $\rightarrow$  4 dienen. Wir haben schon anlässlich der Ableitung des räumlichen Massenschwerpunktverfahrens die gewöhnlich mit den Uebergangszahlen gezeichneten Uebergangswinkel durch die viel bequemern Uebergangslinien ersetzt, zu deren Eintragung hier also keine ergänzenden Linien nötig sind. Man erhält nämlich je einen Punkt der vertikalen Uebergangslinien  $u_{32}$  bzw.  $u_{23}$ , die der Stütze 23 benachbart sind, wenn die Seiten  $L_1 M_2$  und  $L_3 M_3$  bzw.  $R_1 M_2$  und  $R_3 M_3$  zum Schnitt gebracht werden; denn in den ähnlichen (infolge Konstanz der Uebergangszahlen)  $L$ - bzw.  $R$ -Büscheln der aufeinanderfolgenden Momentenpolygonseiten entspricht sich die  $m$ -Axe selbst. Die genannten Büschel sind also perspektiv, und da ferner die Vertikalen durch  $L_1$  und  $L_3$  bzw.  $R_1$  und  $R_3$  sich auch entsprechen, müssen die Perspektivaxen auch vertikal liegen.

Da die Uebergangslinien bei elastisch drehbarer Lagerung ein ebenso leichtes Weiterleiten der Momente wie die Stützvertikalen bei frei drehbarer Lagerung erlauben, ferner die Bestimmung des Belastungsschlusspolygons bei vorhandenen  $l$ - und  $r$ -Linien in beiden Fällen, wie wir gesehen haben, vollkommen identisch ist, unterscheiden sich die ebenen Massenschwerpunktverfahren zur graphischen Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung lediglich in der Bestimmung der  $l$ - und  $r$ -Festlinien. Bei Anwendung des räumlichen Massenschwerpunktverfahrens fällt auch dieser Unterschied dahin.

#### b) Das graphostatische Verfahren.

Wir gehen wieder von der Rekursionsgleichung für einen  $L$ - oder  $R$ -Momentenfestpunkt aus, z. B. von

$$L_{30} = G_{30} + \mu_2 (G_{20} + \mu_1 L_{10}) = 0.$$

<sup>10)</sup> Beide müssen aber doch eingetragen werden. Die Konstruktionen unter b) und c) haben also nur noch ein Interesse vom Standpunkt der organischen Entwicklung der beschriebenen Methode.

Setzt man für die Momentenfestverhältnisse die Werte ein  $\mu_2 = \frac{M_2}{M_3}$ ,  $\mu_1 = \frac{M_1}{M_2}$  und erweitert die Gleichung mit  $M_3$ , so erhält man die Gleichung des selben Punktes  $L_{30}$ , der jetzt nur mit einer andern Masse belegt ist:

$$L_{30} = M_1 L_{10} + M_2 G_{20} + M_3 G_{30} = 0$$

Diese Gleichung können wir auch in folgenden zwei Formen schreiben

$$L_{30} = M_1 L_{10} + M_2 G_{20} + M_2 G_{30} + \Delta M G_{30} = 0$$

$$\text{oder } L_{30} = M_1 L_{10} + M_3 G_{20} + M_3 G_{30} - \Delta M G_{20} = 0$$

Nach der ersten Form ist  $l_3$  die Wirkungslinie der Resultierenden der vier in  $l_1, i, f$  wirkenden Parallelkräfte (Abbildung 17 c):

$$M_1 s_1, M_2 s_2, M_2 s_3 \text{ und } \Delta M s_3$$

Die Zusammensetzung der drei ersten Kräfte würde den Festpunkt für frei drehbare Lagerung des Trägers auf der Stütze 23 ergeben, da die Resultierende der beiden ersten Kräfte die selbe Lage wie die der Kräfte  $\mu_1 s_1$  und  $s_2$  hat, also in die Auflagervertikale fällt, und ebenso die Wirkungslinie von  $M_2 s_2, M_2 s_3$  die gleiche ist wie die von  $s_2$  und  $s_3$ .

Da nun aber jetzt in  $f$  noch die ergänzende Kraft  $\Delta M s_3$  wirkt, erhält die vierte Seite des Seilpolygons eine steilere Lage: Die zweite und vierte Seite des Seilpolygons bilden jetzt auf der „verschränkten Drittellinie“  $v$  einen Abschnitt  $v$ , der gleich ist dem statischen Moment der vierten Kraft in bezug auf diese Gerade. Andererseits ist der Abschnitt  $f$  zwischen den Seilpolygonseiten I und III auf  $f$  gleich dem statischen Moment der in der Auflagervertikalen wirkenden Resultierenden der beiden ersten Parallelkräfte, für die man findet

$$M_1 s_1 + M_2 s_2 = M_1 (a_{11} + a_{12}) + M_2 (a_{12} + a_{22}) = a_{12} M_1 + a_{22} M_2 = e_{23} \Delta M$$

$$\text{denn } a_{11} M_1 + a_{12} M_2 = L_{10} = 0$$

$$\text{und aus } G_{20} = a_{12} M_1 + (a_{22} + e_{23}) M_2 - e_{23} M_3 = 0$$

$$\text{folgt } a_{12} M_1 + a_{22} M_2 = e_{23} \Delta M$$

also ist

$$f = a e \Delta M$$

Die Strecken  $f$  und  $v$  haben demnach das konstante Verhältnis  $\frac{f}{v} = -\frac{a}{d} \frac{e}{s_3}$  und der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Punkte  $V, F$  mit der vierten Seilpolygonseite liegt auf einer festen Vertikalen  $p$ , der *W. Ritter'schen Elastizitätslinie*<sup>11)</sup>, die den Abstand  $d$  der  $f$ -Linie von der „verschränkten Drittellinie“  $v$  im obigen Verhältnis teilt.

Geht man von der zweiten Gleichungsform aus, so erhält man durch die entsprechenden Ueberlegungen die  $q$ -Elastizitätslinie, die den Abstand  $d'$  der  $i$ -Linie von der gleichen  $v$ -Vertikalen im Verhältnis  $-\frac{a'}{d'} \frac{e}{s_2}$  teilt, wo  $a'$  entsprechend den Abstand der  $i$ -Linie von der gleichen Auflagervertikalen bedeutet.

Die Ritter'schen Elastizitätslinien  $p, q$ , die mit den Ostenfeld'schen Linien nicht zusammenfallen, gestatten ebenfalls die Bestimmung der Feldfestpunkte nach drei Verfahren (Abbildung 17 a, b, c), von denen das unter c) schon von W. Ritter angegeben worden ist.

Bei allen drei Verfahren handelt es sich wieder um das Eintragen eines Vierecks, dessen Ecken auf vier festen Vertikalen und dessen Seiten durch vier feste Punkte auf der  $m$ -Axe gehen. Man kann auch hier den projektiven Zusammenhang zwischen der massengeometrischen und der graphostatischen Lösung herstellen. Wir verzichten aber auf die Wiedergabe der zugehörigen Ueberlegungen, da die folgende Gegenüberstellung der beiden Verfahren deutlich genug zeigt, dass beim kontinuierlichen Träger auf elastisch drehbaren Stützen das zweite Verfahren neben dem viel einfachern ersten nicht bestehen kann.

1. Die Ostenfeld'schen Elastizitätslinien<sup>12)</sup> findet man durch Teilen der Festabschnitte für starre Einspannung

<sup>11)</sup> Vergl. W. Ritter „Der kontinuierliche Träger“, Verlag Meyer & Raustein, Zürich 1900.

<sup>12)</sup> Durch ihre anschauliche Bedeutung als Riegel-Momentenfestlinien der links- und rechtsseitigen einhüftigen Rahmen prägen sie sich leicht dem Gedächtnis ein.

nach den leicht sich zu merkenden Verhältnissen  $\frac{e}{s}$ , wo  $e$  das Elastizitätsmass der Stützenkopfdrehung (Drehwinkel des Stützenkopfes infolge  $M=1$ ) und  $s$  den Auflagerdrehwinkel des betrachteten Riegelfeldes infolge  $M=1$  an beiden Felder-Enden bedeutet. Ein Endpunkt der zu teilenden Strecke, d. i. der Stützpunkt, ist gegeben.

Die Ritter'schen Elastizitätslinien ergeben sich dagegen durch Teilen einer Strecke, von der beide Endpunkte, d. h. der Festpunkt für starre Einspannung und der „verschränkte Drittelpunkt“, neu einzutragen sind. Das obige Teilverhältnis  $e:s$  ist hier erst noch mit  $a:d$  (Verhältnis der Abstände der Stützvertikalen und der „verschränkten Drittelslinie“ von der Festlinie für starre Einspannung) zu reduzieren. Das Eintragen der Ritter'schen Linien ist also weniger einfach und weniger genau. Eine weitere Vereinfachung beim massengeometrischen Verfahren liegt ferner darin, dass die „verschränkten Drittelslinien“ nach Abb. 16a überhaupt nicht eingetragen werden müssen.

2. Durch die massengeometrische Lösung erhält man gleichzeitig und ohne die Notwendigkeit neuer Konstruktionslinien die wichtigen Uebergangslinien, während diese beim graphostatischen Verfahren verloren gehen. Da man bis jetzt fast ausschliesslich dieses letzte oder ähnliche graphostatische Verfahren in der Praxis verwendet hat, sind die Uebergangslinien verborgen geblieben. Hat man ihre Existenz erkannt, so lassen sie sich natürlich auch bei Benützung des graphostatischen Verfahrens bestimmen (Abbildung 17). Die zweiten und vierten Seilpolygonseiten schneiden nämlich auf der „verschränkten Drittelslinie“ ebenfalls das Uebergangsverhältnis ab, doch weniger genau, da die gewöhnlich kurze vierte Seite weit verlängert werden muss bis zu ihrem Schnittpunkt mit der „verschränkten Drittelslinie“. Um die Uebergangsgeralden zu erhalten, muss man also die Schnittpunkte der genannten Seiten

mit der „verschränkten Drittelslinie“ auf die Stützvertikale projizieren und die neu erhaltenen Punkte mit den  $L$  bzw.  $R$  der Nachbarfelder verbinden, also im ganzen vier neue Geraden ziehen, um einen Punkt der Uebergangslinie zu finden (Abbildung 17c).

3. Auf die Bestimmung der *Belastungsschlusslinie* vermittelt des *Seilpolygonverfahrens* nach erfolgter Ermittlung der Momentenfestlinien  $l$  und  $r$  sind wir sowohl beim durchgehenden Träger auf frei als auch elastisch drehbaren Stützen gar nicht mehr eingetreten, weil dieses Verfahren hier mit dem Massenschwerpunktverfahren überhaupt nicht in Wettbewerb treten kann. Man vergleiche hierzu nur die entsprechenden, schwer verständlichen Ausführungen bei O. Mohr und W. Ritter. Das sich ergebende Seilpolygonverfahren zur unmittelbaren Bestimmung der Schlusslinie bei Belastung mehrerer Felder wird deswegen in der Praxis kaum verwendet und die Schlusslinie durch die ungenaue Uebereinanderlagerung der Einflüsse herrührend von den Einzelfeldern bestimmt, während das ebene oder räumliche Massenschwerpunktverfahren in jedem Belastungsfall<sup>13)</sup> die unmittelbare Eintragung der Schlusslinie bei frei und elastisch drehbarer Lagerung nach flüssigen Verfahren gestattet, die sich einzig in der Bestimmung der  $l$ - und  $r$ -Linien voneinander unterscheiden.

Es ist leicht einzusehen, dass sich die beschriebenen Verfahren, ohne die geringste Aenderung im Gedankengang, auch auf die Bogenstellungen mit frei und elastisch drehbaren aber unverschieblichen Lagern übertragen lassen. Nur werden hier die entsprechenden Zeichnungen weniger übersichtlich, weil sowohl die Festlinien für starre als auch elastische Einspannung, ausgehend von den Zweigelenrahmen als Grundsystem, *ausserhalb* der Felder zu liegen kommen. (Die Matrixvorzeichen der dreigliedrigen Momentengleichungen sind hier ausserhalb der Hauptdiagonale negativ und die Festverhältnisse sämtlich positiv.) Wir ziehen

deswegen in solchen Fällen die analytische Reduktion der Momentengleichungen, und bei der Bestimmung der Einflusslinien die Anwendung der reziproken Matrix vor.

Es sei ferner erwähnt, dass man an Stelle der Stützmomente auch die Auflager-Drehwinkel des durchgehenden Balkens als Ueberzählige einführen kann. Die Matrix der dreigliedrigen Drehwinkelgleichungen wird sowohl bei frei als auch elastisch drehbarer Lagerung positiv, sodass man auf den ersten Blick glauben könnte, dass sich dann beide Arten durchlaufender Träger auf die gleiche einfache Weise behandeln lassen.

Will man aber auf die statische Deutung der auftretenden Festlinien und Festpunkte nicht verzichten und das graphische Verfahren nicht zu einer

<sup>13)</sup> Im allgemeineren, Temperaturwirkungen, Setzungen und horizontale Verschiebungen einschliessenden Sinn.

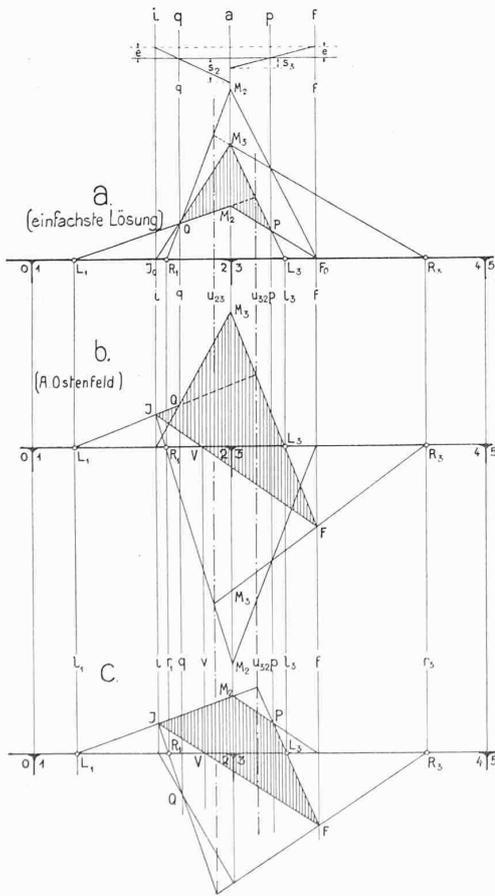


Abb. 16. Bestimmung der  $l$ -,  $r$ - und  $u$ -Linien nach dem ebenen Massenschwerpunktverfahren.

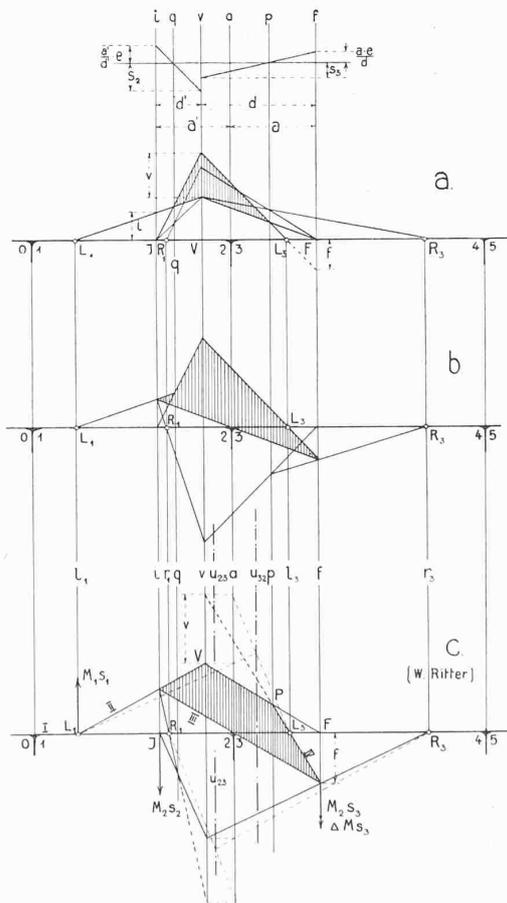


Abb. 17. Bestimmung der  $l$ -,  $r$ - und  $u$ -Linien nach dem Seilpolygonverfahren.

blossen graphischen Auflösung der *rechnerisch* aufzustellenden Elastizitätsgleichungen verkümmern lassen, so erkennt man, dass auch bei Wahl der Drehwinkel als Ueberzählige die elastische Lagerung eine besondere Behandlung erheischt. Ueberdies hat man noch den Nachteil, dass die Stützmente doch noch nachträglich aus den Drehwinkeln ermittelt werden müssen. Die graphische Behandlung der kontinuierlichen Tragwerke nach der Deformationsmethode bietet also gar keine Vorteile.

Handelt es sich aber bloss um die graphische Auflösung *zahlenmässig* vorliegender dreigliedriger Elastizitätsgleichungen, so ist von allen bekannt gewordenen Verfahren das von *Massau* angegebene unbedingt das einfachste. Für den Fall einer positiven Matrix lässt sich dieses Verfahren, unter Ausnützung der Symmetrie der Gleichungen, noch ganz besonders einfach gestalten.<sup>14)</sup>

V. GRAPHISCHE HILFSTAFELN UND ZAHLENBEISPIEL

Um die Berechnung *durchlaufender Eisenbetonplattenbalken mit in jedem Feld symmetrisch angeordneten geraden Vouten* — d. h. des am häufigst vorkommenden Falles *durchlaufender Träger mit veränderlichem Trägheitsmoment* — zu erleichtern, haben wir die in den Abbildungen 18 und 19 dargestellten Graphiken entworfen für die unmittelbare Entnahme der Auflagerdrehwinkelsummen *s* infolge eines Auflagermomentes  $M=1$  und der Festabstände  $a_0$  bei starrer Einspannung. Man erhält vermittelst einfacher Hilfsintegrationen, die auch schon früher durchgeführt wurden<sup>15)</sup> und die wir deswegen weglassen können, folgende Formeln

$$s = \beta l' \text{ wo } \beta = 3 \left[ 1 - \lambda \left( 2 - \frac{k+1}{k^2} \right) \right]$$

$$a_0 = a l, \text{ wo } a \beta = 1 - 6 \lambda^2 \frac{k-1}{k} + 2 \lambda^3 \left[ 2 + \frac{3(k+3)}{(k-1)^2} - \frac{6 \ln k}{(k-1)^3} \right]$$

<sup>14)</sup> Vergl. das erwähnte Buch des Verfassers, S. 99. — Bei sämtlichen bis jetzt aufgestellten Verfahren zur graphischen Auflösung der Elastizitätsgleichungen bleibt die Symmetrie der Matrix unbenützt. Es wäre deswegen nützlich, nach einer allgemeinen graphischen Methode zu forschen, bei der die genannte Symmetrie als vereinfachender Umstand zur Geltung gelangen würde.

<sup>15)</sup> Vergl. z. B. Hertwig: „Ueber den kontinuierlichen Träger“ u. s. f., in „Arm. Beton“ 1913, und A. Strassner: „Neuere Methoden u. s. f.“ Berlin 1916, S. 12 und folgende.

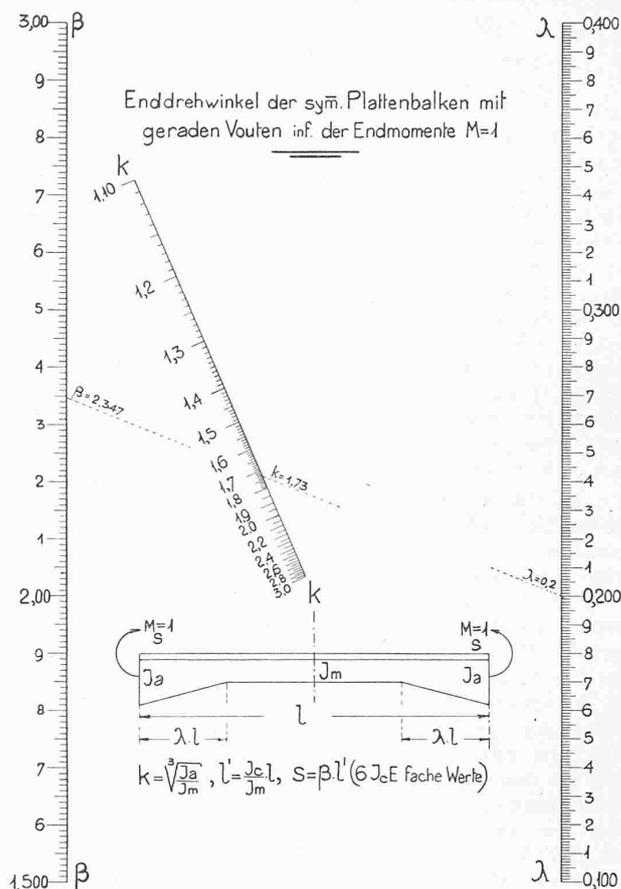


Abb. 18.

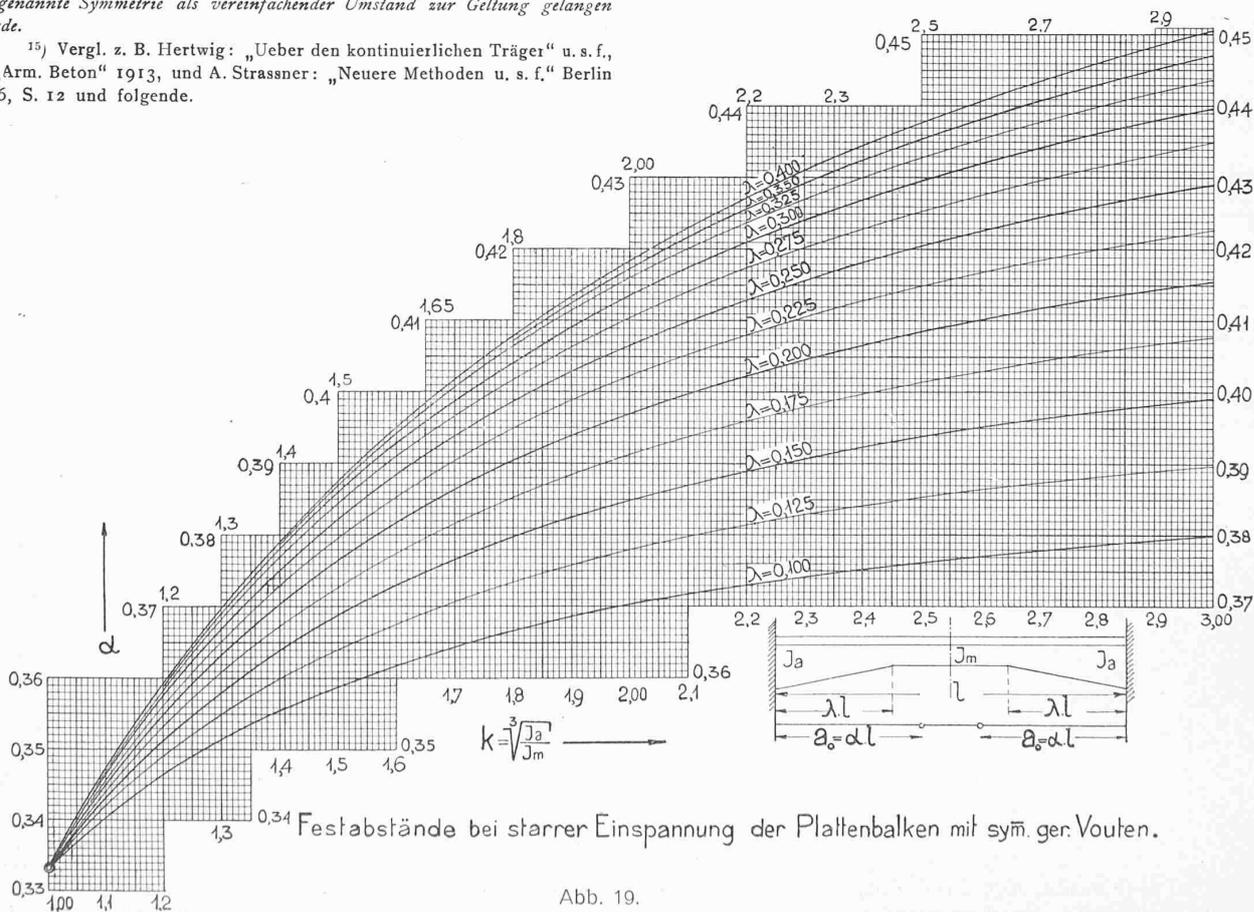


Abb. 19.

Die Bedeutung der Bezeichnungen ist den genannten Abbildungen zu entnehmen. Diese Formeln gelten für Balken mit rechteckigen Querschnitten in aller Strenge und für Plattenbalken mit sehr guter Annäherung; denn die den Formeln zu Grunde liegende Annahme einer Zunahme des Trägheits-Momentes in den geraden Vouten mit der dritten Potenz der Querschnittshöhe trifft nach Vergleichs-Rechnungen von *A. Strassner* auch für Plattenbalken mit grosser Schärfe zu. Der Ausdruck für  $s$  liess sich sehr einfach durch das bequeme Nomogramm der Abbildung 18 darstellen. Für  $\alpha$  musste das gewöhnliche Kurvennetz der Abbildung 19 aufgetragen werden, das sich nicht in der Herstellung, wohl aber im Gebrauch eigentlich noch einfacher als ein Nomogramm erweist.

Die beiden Tafeln gestalten die Berechnung durchlaufender Träger mit geraden Vouten nach unserem graphischen Verfahren fast ebenso einfach wie bei Annahme eines unveränderlichen Trägheitsmomentes. Dies wird an dem Zahlen-Beispiel eines symmetrisch ausgebildeten durchlaufenden Rahmens in Abbildung 20 gezeigt.

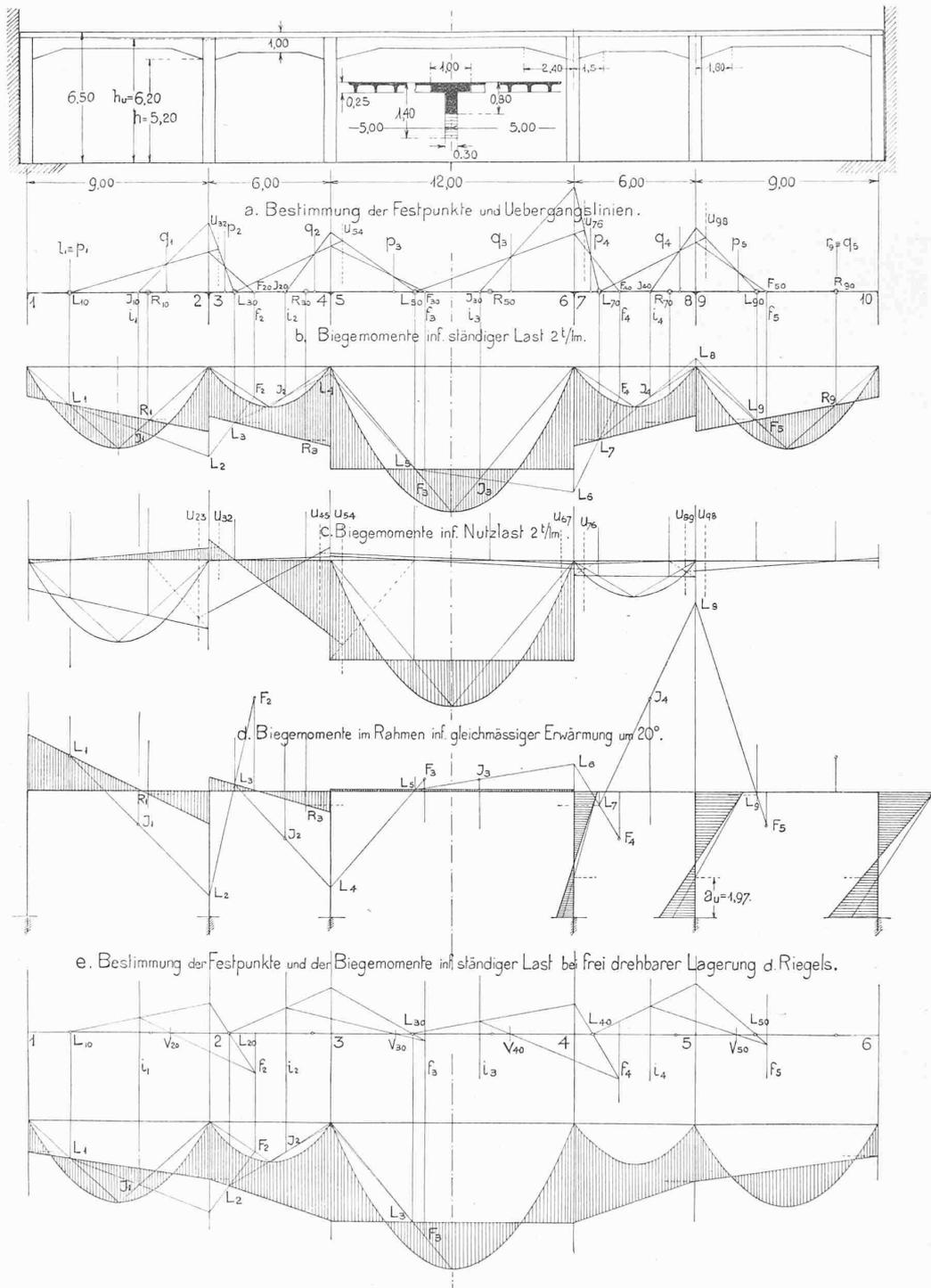


Abb. 20. Berechnung eines durchlaufenden Rahmens von den in obenstehender Skizze angegebenen Abmessungen.

*Hilfsberechnungen für das Beispiel.*

Trägheitsmomente und reduzierte Spannweiten werden auf bekannte Weise ermittelt:

Spannweite $l$	Trägheitsmoment in der Mitte $J_m$	am Auflager $J_a$	Reduz. Spannweite $l' = \frac{J_c}{J_m} l$
6,00	0,0415 = $J_c$	0,110	6,00
9,00	0,0213	0,110	17,5
12,00	0,0213	0,110	23,4
5,20 (Säule)	0,0072	0,0072	30,00

Bestimmung der Festpunkte und Uebergangslinien im Riegel (a in Abb. 20). In den Feldern von 9,00 und 12,00 m Spannweite haben wir:

$$\lambda = 0,200, \quad k = \sqrt[3]{\frac{J_a}{J_m}} = \sqrt[3]{\frac{0,110}{0,0213}} = 1,73$$

Dem Nomogramm Abb. 18 entnimmt man:  $\beta = 2,347$  und der  $\alpha$ -Tafel Abb. 19:  $\alpha = 0,3877$  ebenso für die 6,00 m weiten Felder, mit

$$\lambda = 0,250 \text{ und } k = \sqrt[3]{\frac{0,110}{0,0415}} = 1,385, \\ \beta = 2,43, \quad \alpha = 0,3738$$

Die 6  $J_c$  E-fache Stützkopfdrehung (e) infolge eines Kopfmomentes  $M = 1$  ist in unserm Beispiel für alle, am Fusse als vollkommen eingespannt angenommenen Stützen die

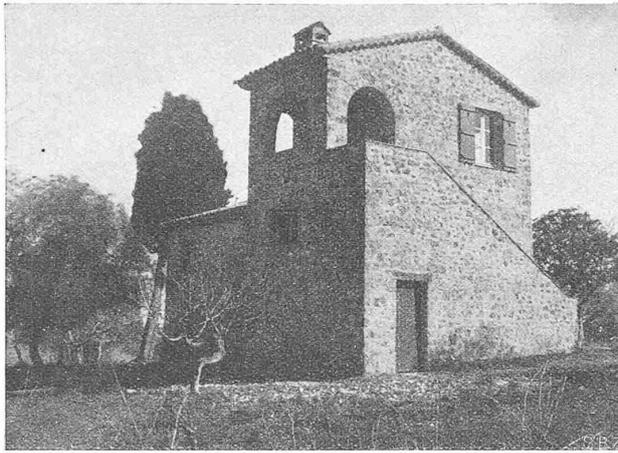


Abb. 2. Nordwestecke des Hauses P. in St. Paul-en-Forêt.

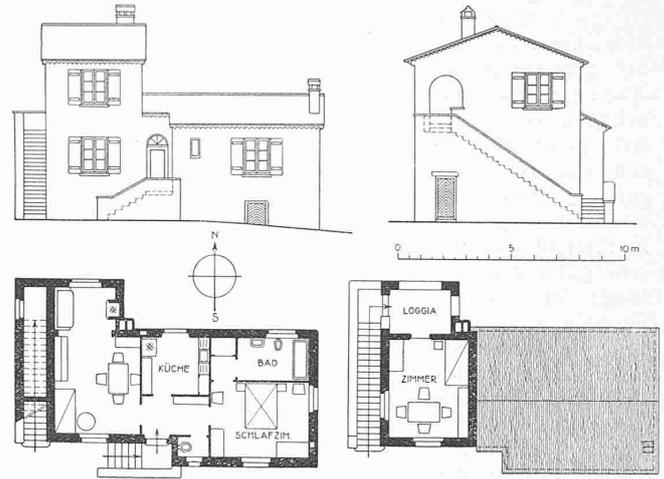


Abb. 1. Haus P. in St. Paul-en-Forêt. — Ansichten und Grundrisse 1 : 300.

gleiche und berechnet sich, unter Berücksichtigung von  $J = \infty$  im Bereich der Schräge, folgendermassen:

Unterer Festabstand:

$$a_u = \frac{h}{3} \frac{3h_u - 2h}{2h_u - h} = \frac{5,20}{3} \cdot \frac{8,20}{7,20} = 1,97$$

$$e = h' \frac{h}{h_u} \frac{2h - 3a}{h_u - a} = 30 \cdot \frac{5,20}{6,20} \cdot \frac{4,49}{4,23} = 26,8$$

Damit kann man nun sehr einfach die für die graphische Berechnung notwendigen Hilfsgrössen für jedes Riegefeld angeben ( $a_0$  = Festabstand für starre Einspannung,  $a_1$  = Festabstand der einstielligen Rahmen).

Feld 9,00 m:

$$s = \beta l' = 2,347 \cdot 17,5 = 41,1; \quad a_0 = a l = 0,3877 \cdot 9,00 = 3,49 \text{ m}$$

$$a_1 = a_0 \frac{s}{s+e} = 3,49 \cdot \frac{41,1}{67,9} = 2,11$$

Feld 12,00 m:

$$s = 2,347 \cdot 23,4 = 55,2; \quad a_0 = 0,3877 \cdot 12,00 = 4,65 \text{ m};$$

$$a_1 = \frac{4,65 \cdot 55,2}{82} = 3,125 \text{ m}$$

Feld 6,00 m:

$$s = 2,43 \cdot 6 = 14,6; \quad a_0 = 0,3738 \cdot 6,00 = 2,24;$$

$$a_1 = 2,24 \frac{14,6}{41,4} = 0,79 \text{ m}$$

Zu der unter a) durchgeführten Konstruktion der Festpunkte und Uebergangslinien für den durchlaufenden Riegel auf elastisch drehbaren Stützen sei noch bemerkt, dass man sie in jedem Sonderfall genau gestalten kann. *Kommen nämlich die Festlinien p, q der einhäufigen Rahmen, bei starken und kurzen Stielen, nahe an die Festlinien f, i der starr eingespannten Balken heran, so hat man einfach unsere Konstruktion für die aufeinanderfolgende Bestimmung der L- und R-Festpunkte nicht jeweilen mit den Geraden durch diese Punkte, sondern mit jenen durch die  $J_0$  bzw.  $F_0$ -Punkte beginnen zu lassen.*

Die in Abb. 20 unter b) und c) behandelten Belastungsfälle bedürfen keiner weitgehenden Erklärungen. Die Konstruktion ist durch die vorausgehende ausführliche Theorie und durch die vorhandenen Bezeichnungen vollständig klargelegt. Es sei nur bemerkt, dass infolge der vorhandenen Symmetrie in der Tragkonstruktion und in den Belastungen die unter b) gefundenen Biegemomente des durchlaufenden Riegels gleichzeitig die richtigen Biegemomente im Rahmen darstellen. Dies gilt auch für die Biegemomente infolge der am Riegel symmetrisch angebrachten Nutzlasten (c). Die Weiterleitung der Biegemomente infolge der feldweisen Nutzbelastung geschieht, wie unter c) gezeigt, am einfachsten mit Hilfe unserer Uebergangslinien. In den Abbildungen 20 b und c sind die durch die untern Festpunkte gehenden Momentengeraden der Stützen weglassen.

Die Temperaturbeanspruchung, bzw. die Belastungsfälle, herrührend von den Horizontalverschiebungen der

Stützenköpfe und allfällige Fundamentsetzungen, werden von den meisten Verfassern analytisch behandelt. Sie lassen sich aber nach unserm massengeometrischen Verfahren genau gleich und ebenso einfach wie wirkliche Belastungsfälle erledigen. Man hat in den einzelnen Feldern wieder die Belastungsfestpunkte  $F, J$  für starre Einspannung einzutragen. Der Unterschied besteht nur darin, dass jetzt an die Ordinaten der letztern nur die Stützen Beiträge liefern. Zur Festlegung der  $F$ - und  $J$ -Punkte bietet hier die Kreuzlinienkonstruktion keine Vorteile und man berechnet besser die Ordinaten der genannten Punkte nach der unmittelbaren Formel  $-\frac{a_{k_0}}{s_k}$ , wo nun  $a_{k_0}$  die freigegebene Drehung des Stützenkopfes infolge einer horizontalen Verschiebung bedeutet und man scharf auf das Vorzeichen zu achten hat, mit dem diese Drehung in die links- bzw. rechtsseitige Kontinuitätsbedingung an der betrachteten Stütze eintritt. Bei gleichförmiger Temperaturänderung bleibt in einem symmetrisch ausgebildeten durchlaufenden Rahmen die Riegelmitte an Ort und Stelle. Führt man also in die bekannte Formel<sup>16)</sup>

$$\frac{a_{k_0}}{s_k} = \pm \frac{6 J_c E \alpha_t t}{(h_u - a_u) s} l$$

für  $l$  den jeweiligen Abstand des betrachteten Stützenkopfes von der Riegelmitte ein, so erhält man aus den zugehörigen  $F$ - und  $J$ -Punkten die *Temperaturbiegemomente im Riegel, die gleichzeitig jene des durchlaufenden Rahmens sind.* Für  $t = +20^0$  erhält man in unserm Beispiel

$$\frac{a_{k_0}}{s_k} = \frac{6 \cdot 0,0415 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}}{6,20 - 1,97} \frac{l}{s} = \pm 28,26 \frac{l}{s},$$

sodass die von der Riegelmitte aufeinanderfolgenden Festabschnitte für starre Einspannung die Werte annehmen:

$$-\frac{6 \cdot 28,26}{55,2} = -3,07; \quad \frac{6 \cdot 28,26}{14,6} = +11,6;$$

$$\frac{12}{14,6} \cdot 28,26 = -23,2; \quad + \frac{23,2 \cdot 14,6}{41,1} = +8,25;$$

$$-\frac{21 \cdot 28,26}{41,1 + 26,8} = -8,74$$

Nach der graphischen Ermittlung der Riegemomente aus den  $F, J$ -Punkten findet man die (überschlagenen) Momententrapeze der Stützen durch die Uebereinanderlagerung der durch den untern Festpunkt gehenden Momentengeraden infolge des gefundenen Kopfmomentes und der Momentengeraden herrührend vom Fussmoment  $M_u$ , das im Hauptssystem zu der bekannten Verschiebung des Stützenkopfes gehört (Abbildung 20d).

$M_u$  errechnet sich aus der leicht nachzuprüfenden Formel

$$M_u = 6 J_c E \alpha_t t l \frac{a_u}{h_u - a_u} \frac{h_u}{h(3h_u - 2h)}$$

<sup>16)</sup> Vergl. das Buch des Verfassers, S. 135 und 137.

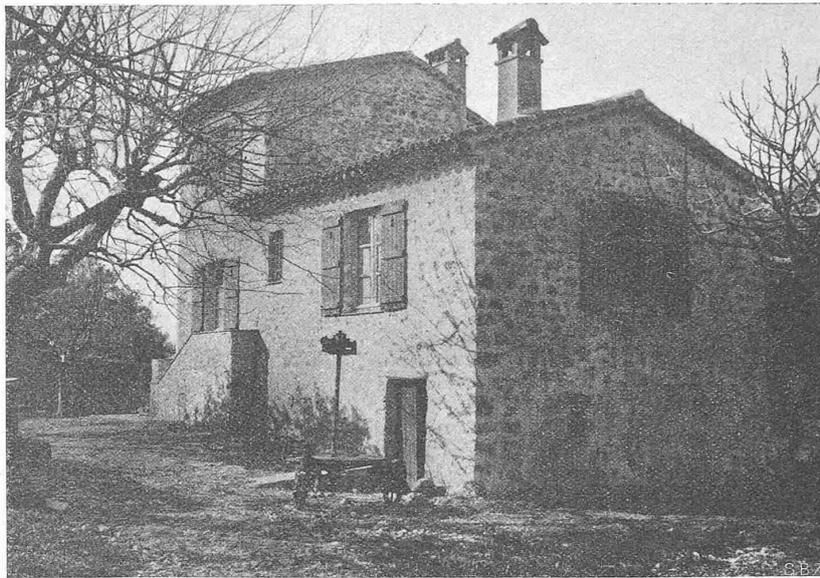
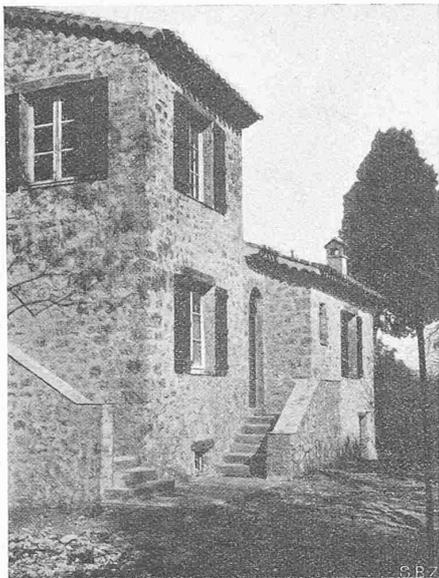


Abb. 3 und 4. Südwest- und Südost-Ecke des Hauses P. in St. Paul-en-Forêt. — Architekten Paul Bütikofer & Jacques Ott, Antibes.

oder, unter Benützung des schon bei der Bestimmung der  $a_{h_0}$  errechneten Wertes,

$$M_u = 28,26 \frac{a_u h_u}{h' h (3 h_u - 2 h)} l = \frac{28,26 \cdot 1,97 \cdot 6,20}{5,20 \cdot 30 \cdot 8,20} l = 0,27 l$$

also

$$M_{1u} = 21 \cdot 0,27 = 5,67 \text{ tm}; \quad M_{2u} = 12 \cdot 0,27 = 3,24 \text{ tm}; \\ M_{3u} = 1,62 \text{ tm}$$

In Abbildung 20 zeigen wir endlich unter d), wie sich die Stützmente für den durchlaufenden Träger auf frei drehbaren Stützen und bei Belastung beliebig vieler Felder unmittelbar aus den  $F$ - und  $J$ -Punkten ergeben. Zur Bestimmung der  $L_0$ - und  $R_0$ -Festpunkte mussten noch die „verschränkten Drittelpunkte“ eingetragen werden vermittelst Teilung der Abstände der den Auflagern benachbarten  $J_0$ - und  $F_0$ -Punkte nach den umgekehrten Verhältnissen der den benachbarten Feldern zugehörigen  $s = \beta l$ .

Im Laufe der stürmischen Entwicklung, die die Baustatik genommen hat, erwies es sich leider deutlich, dass auf dem Sondergebiete der vielfach statisch unbestimmten biegefesten Stabtragwerke die rein synthetische Methode

weder zu Forschungs- noch Berechnungszwecken besonders geeignet erscheint. Wenn aber durch begeisterte Jünger Culmanns allzuviel Romantik in die „nüchterne“ Baupraxis getragen wurde, so muss andererseits mit Bedauern festgestellt werden, dass manche herrliche Schöpfung der reinen Synthese der Vergessenheit anheimfällt, weil eben die leistungsfähigere Analytik meistens rascher und bequemer zum Ziele führt.

Im Grunde genommen bestehen aber heute die Gegensätze zwischen Synthese und Analyse, wie sie in der ersten Hälfte des verflossenen Jahrhunderts im edlen Wettstreit der Geometer (Poncelet, Steiner u. a.) und Analytiker (Gergonne, Jakobi u. a.) und bald hierauf auch in der jungen Wissenschaft der Baustatik (Culmann-Mohr u. a.) zur Geltung kamen, nicht mehr. Im stetigen Wechselspiel ergänzen sich heute beide Methoden, gehen auseinander hervor und bilden in inniger Verschmelzung und Durchdringung eine unteilbare Einheit.

Zu dieser Einheit der Methodik und damit zur Neubelebung der graphischen Verfahren in der praktischen Baustatik beizutragen, war Zweck und Ziel meiner Arbeit.

## Zwei Wohnhäuser an der französischen Riviera.

Architekten PAUL BÜTIKOFER & JACQUES OTT, Antibes.

Die Wohnhaus-Architektur an der französischen Riviera ist ein buntes Vielerlei, wie der Katalog eines grossen Warenhauses, das für jeden Geschmack etwas feilbietet. Nachdem die ewig gleiche „Klassische Villa am Meer“ samt ihren degenerierten Nachkommen der letzten Jahrzehnte die schönsten Punkte in Beschlag genommen hatte, ist die bauliche Verwüstung dieses herrlichen Küstenstreifens weiter fortgeschritten, systematisch durchgeführt von den Spekulanten der Nachkriegszeit. Jeder Bauherr hat seine erträumte, in einem Pariser Atelier ausgearbeitete Villa bekommen, gemäss der Architekturmode jener Saison und unbekümmert um die Landschaft, die der Architekt nie gesehen. Die prächtigen Olivenbäume mussten weichen, und ausgewachsene Palmen wurden herbeigeschleppt. Kein Wunder, dass gegenwärtig auch hier eine Art Heimatschutzbewegung begeisterte Anhänger gewinnt, die retten wollen, was noch zu retten ist. So haben vor allem Künstler angefangen, ihr Heim nach den rassigen Vorbildern alter Bauernhäuser zu gestalten. Heute spricht man von einer Wiedergeburt des sogenannten „Style provençal“.

Es war zu erwarten, dass diese Heimatschutzbewegung neue Heimsuchungen über Südfrankreich ergeben

lässt, die wir als solche verurteilen müssen. Andererseits sind in den letzten Jahren eine ganze Reihe von Bauten entstanden, die einen sichern Geschmack für die heutige traditionelle Einstellung bezeugen, und die diesbezüglich einigen neuen schweizer Wohnhäusern vergleichend gegenüber gestellt werden können; aus diesem Grunde sei eine Beschreibung der traditionellen Bauweise der Provence hier vorausgeschickt.

Die alten, südfranzösischen Bauernhäuser, „Mas“ genannt, sind massiv, breitgelagert und besitzen die Robustheit alter, römischer Wohnstätten, Schutz bietend gegen den Mistral, die glühende Sonne, sowie die periodisch folgenden sintflutartigen Regengüsse. Der Hauptbau ist meist von rechteckigem Querschnitt, an den sich untergeordnete Nebenbauten frei angliedern. Die Mauern sind aus Bruchstein, mit oder ohne Verputz, mit spärlichen Maueröffnungen; auf ihren Flächen spielen die scharf geschnittenen Schatten der einzelnen Baukörper und Dachvorsprünge. Diese, „Génoises“ genannt, sind aus überkragenden Hohlziegeln (tuiles romaines) gebildet; sie geben den strengen Kuben eine leise Note des leichtlebigen Südens. Auch die Dächer, meist Pult- oder Satteldächer, sind mit