

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 91/92 (1928)  
**Heft:** 25

**Artikel:** Studien über Schwingungen von Kreisplatten und Ringen  
**Autor:** Hort, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42621>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

der Talseite durch einen Kopfbau abgeschlossen, an dem die beiden Schalt- und Transformatorenhäuser, einerseits für die 55 kV-Anlage, andererseits für die 10 kV- und Bahnanlage rechtwinklig angebaut sind. Im ersten Ausbau (Abb. 50) wurden drei Freistrahlturbinen von je 10 000 PS bei 500 Uml/min für den Antrieb von Drehstromgeneratoren und eine Turbine von 3400 PS und gleicher Drehzahl für den Bahngenerator aufgestellt; die drei Drehstromgeneratoren leisten 10 000 kVA bei 10 000 V und 50 Per, der Einphasenstrom-Bahngenerator 3400 kVA bei 11 000 V,  $16\frac{2}{3}$  Per. Ausserdem ist noch eine Drehstrom-Einphasenstrom-Umformergruppe von 3200 kVA, 50 auf  $16\frac{2}{3}$  Per. für Bahnstrom aufgestellt worden (Vordergrund in Abb. 51). Seither ist die maschinelle Ausrüstung noch um ein weiteres Maschinenaggregat von 13 000 kVA Leistung für die Erzeugung von Bahnstrom für die Schweiz. Bundesbahnen erweitert und der Maschinenaal für die spätere Vollinstallation auf 55 000 PS ausgebaut, d. h. bergseits verlängert worden; das Maschinenhaus ist 68 m lang, 13,60 m breit

und 11,50 m hoch. Im Kopfbau befinden sich die zentrale Kommandostelle, sowie die für die Hilfsbetriebe notwendigen Maschinen.

[Anmerkung der Redaktion. Damit ist die Darstellung des Kraftwerks Klosters-Küblis in seinem wasserbaulichen Teil, d. h. soweit es der Bauleitung des Berichterstatters unterstellt war, zum Abschluss gebracht; die Beschreibung der oberen Stufe, Davos-Klosters, folgt im nächsten Band. Erst in sozusagen letzter Stunde ist ein Missverständnis offenbar geworden; als Folge hiervon muss die für die vorliegende Nummer als Abschluss gedacht gewesene und vorbereitete eingehende architektonische Darstellung der Zentrale dem abschliessenden III. Kapitel, über die elektromechanischen und elektrowirtschaftlichen Verhältnisse der Bündner Kraftwerke durch deren Oberingenieur Paul Weingart, vorbehalten werden. Diese Zentrale ist nämlich in Disposition und Aufbau das Ergebnis intensiver Kooperation zwischen Maschineningenieur und Architekt und ist deshalb in jenem Zusammenhang zu erörtern.]

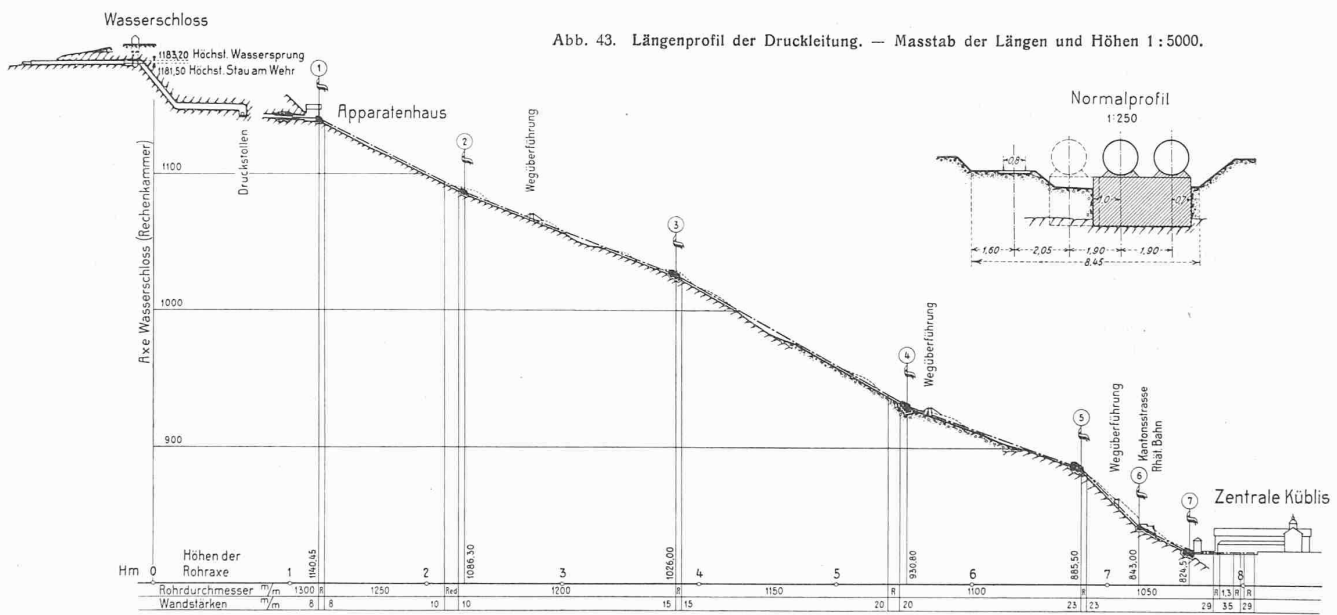


Abb. 43. Längenprofil der Druckleitung. — Masstab der Längen und Höhen 1:5000.

### Studien über Schwingungen von Kreisplatten und Ringen.

Von Dr. W. HORT, Charlottenburg, und Dr. M. KOENIG, Zürich.

(Fortsetzung von Seite 288.)

#### V. PRÜFUNG DER THEORIE AN HAND DER UNTER III BESCHRIEBENEN VERSUCHE.

Mit Rücksicht auf die Art der Aufhängung können die Versuchsplatten nur im beschränktem Masse als „frei“ bezeichnet werden. Besonders bei der vollen Platte und bei kleinen Bohrungen bewirkt die punktweise Aufhängung am Aussenrand ein Durchbiegen der Platte durch ihr eigenes Gewicht und damit auch eine gewisse Versteifung.<sup>10)</sup> Abgesehen von Dämpfungseinflüssen könnte eine Platte als „frei“ bezeichnet werden, die z. B. in einer Flüssigkeit untergetaucht frei schwimmend wäre. Praktisch bestehen für die Verwirklichung der vollkommenen Freiheit grosse Schwierigkeiten. Es ist anzunehmen, dass für grössere Bohrungen der Platte der Einfluss der Durchbiegung zurücktrete; die Untersuchungen bestätigen dies in der Tat. In der Beurteilung der Genauigkeit der Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung muss im weiteren in Betracht gezogen werden, dass die Theorie auf einer homogenen Scheibe gleicher Dicke beruht. Die wirkliche

<sup>10)</sup> Wie ausserordentlich empfindlich die Schwingungszahl dünner Platten durch eine solche Versteifung beeinflusst wird, geht auch aus Versuchen hervor, die in einem andern Zusammenhang kürzlich in „Engineering“ (13. Jan. 1928) beschrieben wurden,

Platte kann in dieser Beziehung nur eine Annäherung sein und ganz besonders für Platten mit nur 2 mm Stärke.

Andererseits haftet auch der Rechnung eine gewisse Unsicherheit bezüglich der Poissonschen Zahl und des Elastizitätsmoduls an, die für unsere Rechnung mit  $\nu = 0,33$  bzw.  $E = 1,15 \cdot 10^6$  angesetzt wurden. Das spezifische Gewicht wurde mangels genauerer Bestimmung mit  $\lambda = 8,9$  angenommen. Schliesslich muss beachtet werden, dass sich Störungen bemerkbar machen werden, wenn die Aufhängungspunkte nicht auf Knoten fallen.

#### a) Volle Kreisplatte mit zwei Knotendurchmessern (Abb. 12).

Der Versuch ergab eine Frequenz von 88 pro Sek. Die Ausbildung des Schwingungsbildes ist nicht sehr gut, was mit der Aufhängungsart zusammenhängen dürfte. Die Formel für die Berechnung dieser Schwingung ist von Kirchhoff gegeben worden.<sup>11)</sup> Die Frequenz wurde jedoch an Hand der Frequenzgleichung (11) neu bestimmt und ergibt

$$f = 81,5 \text{ Hertz.}$$

Die Differenz von 8% zwischen Theorie und Versuch dürfte auf die vorerwähnten Umstände zurückzuführen sein.

<sup>11)</sup> Siehe auch W. Hort: Differentialgleichungen des Ingenieurs, II. Auflage (1925), S. 503.

Für Kupfer mit  $\lambda = 8,9$  lautet daher die Formel für die Zweiknotendurchmesser-Schwingung:

$$\lambda = 3,23 \frac{h}{R a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$= 3,23 \frac{h}{R a^2} c^2 \text{ sek}^{-1} \quad (12)$$

worin  $c$  die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Material bedeutet.

b) Volle Platte, frei, mit einem Knotenkreis.

Die theoretische Schwingungszahl ist 139,8 sek. Wenn wir die Schwingungszahl der Zweiknotendurchmesserschwingung der vollen Platte mit 1,00 bezeichnen, ist diejenige der Platte mit einem Knotenkreis offenbar 1,65, was  $2 \frac{1}{2} \%$  Abweichung von dem in der Literatur bekannten Verhältnis 1,61 bedeutet.

c) Kreisplatte mit Bohrung.

Von den zahlreichen erhaltenen Schwingungsbildern wurden nur einzelne typische Fälle herausgegriffen.

a) Bohrung 30 mm,  $m = \frac{r}{R} = 0,10$ ;

„freie“ Schwingung mit einem Knotenkreis (Abb. 13).

Gemäss Versuch besitzt eine solche Platte eine sekundliche Schwingungszahl von 170,5, während die Theorie 137,2 Schwingungen pro Sekunde ergibt. Die Differenz von 24 % ist erheblich und dürfte grösstenteils auf die Versteifung der Platte durch die Aufhängung einerseits und andererseits durch die Lage der Aufhängungspunkte ausserhalb eines Knotenkreises zurückzuführen sein. Es wäre aber auch denkbar, dass die Drehzahl des kleinen Motors, der den Kommutator trägt, nicht genau konstant war, was leicht zu falschen Frequenzmessungen führen konnte. Von besonderem Interesse ist die Natur der Durchbiegung und die Lage des Knotenkreises. Wie Abbildung 14 zeigt, stimmt der Durchmesser des Knotenkreises mit der Theorie trotz der Abweichung in der Frequenz gut überein. Das stärkere Ausbiegen des Innenrandes veranschaulicht die Gefährdung von schwingenden Scheiben durch die an der Nabe auftretenden Biegunnungsspannungen.

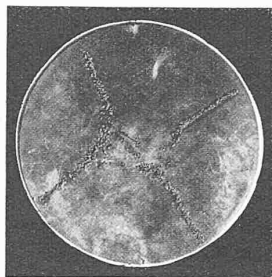


Abb. 12. Klangfigur 2/0 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 0,300$ ,  $f = 88$  Hertz.

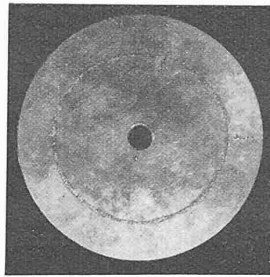


Abb. 13. Klangfigur 0/1 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 30/300$ ,  $f = 170,5$  Hertz.

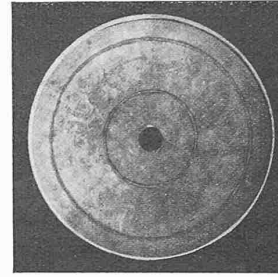


Abb. 15. Klangfigur 0/2 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 30/300$ ,  $f = 625$  Hertz.

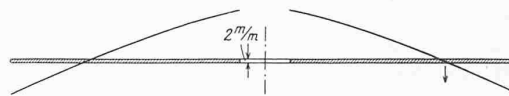


Abb. 14. Klangfigur 0/1 der Kupferscheibe gemäss Abb. 13. Schwingungszahl nach Rechnung 137,2, nach Versuch 170,5, Knotenkreis-Radius „ „ 10,32 cm, „ 10,39 cm.

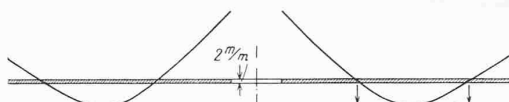


Abb. 16. Klangfigur 0/2 der Kupferscheibe gemäss Abb. 15. Schwingungszahl nach Rechnung 583,0, nach Versuch 625,0, Knotenkreis-Radien { „ 5,90 cm, „ 12,56 cm, „ 5,90 „ „ 12,50

Tabelle 3.

Durchbiegung:  $\psi = A_1 J + B_1 Y + A_2 I + B_2 K$ .

Nach Gleichungen (9) und (10) ergeben sich die Konstanten:

$$A_1 = 14,80; B_1 = -0,440; A_2 = -1,29; B_2 = 1,0.$$

Z	0,30	0,60	1,0	1,5	2,0	2,5	2,98
R	1,51	3,02	5,05	7,75	10,09	12,61	15,03
$A_1 J$	14,47	13,50	11,32	7,575	3,313	-0,642	-3,747
$B_1 Y$	0,355	0,136	-0,039	-0,168	-0,224	-0,219	-0,169
$A_2 I$	-1,319	-1,409	-1,631	-2,124	-2,940	-4,240	-6,190
$B_2 K$	1,372	0,778	0,421	0,214	0,114	0,062	0,035
$\psi$	14,878	13,005	10,071	5,497	0,263	-5,039	-10,071

Tabelle 1.

Daten der Kupferscheibe (Abb. 12): Aussendurchmesser  $2R = 300$  mm, Innendurchmesser  $2r = 30$  mm, Dicke  $2h = 2$  mm.

Schwingung: 1 Knotenkreis  $n = 0$ . Scheibe frei.

Aus Versuch:  $f = 170,5$  Hertz;  $\lambda = 1071$  sek<sup>-1</sup>;  $K = 0,00677$ ;

$$Z_i = K \sqrt{\lambda r} = 0,3325; Z_a = K \sqrt{\lambda R} = 3,325.$$

$$A = \frac{1 - 2b I'}{-J'}, A' = \frac{I'}{-J'}, B = \frac{K - 2b K'}{-J'}, B' = \frac{K'}{-J'}$$

	Innen			Aussen		
Z	0,28	0,30	0,32	2,8	3,0	3,2
2 b	4,790	4,470	4,190	0,479	0,447	0,419
I	1,019	1,022	1,026	4,155	4,880	5,745
2 b I'	0,677	0,6775	0,679	1,581	1,766	1,985
I - 2 b I'	0,342	0,3445	0,347	2,574	3,114	3,760
-J	-0,9805	-0,9776	-0,9746	0,1850	0,2600	0,3202
A	-0,349	-0,3525	-0,356	13,92	11,98	11,74
I'	0,1413	0,1516	0,1621	3,300	3,950	4,735
-J'	0,1386	0,1483	0,1580	0,4097	0,3391	0,2613
A'	1,019	1,022	1,026	8,055	11,65	18,12
K	1,436	1,372	1,312	0,04385	0,03473	0,0276
2 b K'	-15,82	-13,66	-11,89	-0,02448	-0,01796	-0,01326
K - 2 b K'	17,25	15,03	13,20	0,06833	0,05269	0,04086
-J	-0,9805	-0,9776	-0,9746	0,1850	0,2600	0,3202
B	-17,60	-15,39	-13,55	0,3695	0,2028	0,1276
K'	-3,303	-3,057	-2,838	-0,0511	-0,04018	-0,03165
-J'	0,1386	0,1483	0,1580	0,4097	0,3391	0,2613
B'	-23,83	-20,60	-17,96	-0,1248	-0,1185	-0,1211
Y/J	-0,872	-0,826	-0,783	-2,356	-1,449	-0,959
Y'/J'	-17,60	-15,47	-13,70	0,643	0,9575	1,418

Tabelle 2.

$Z_a$	2,8	3,0	3,2
$Z_i$	0,28	0,30	0,32
$A_a$	13,92	11,98	11,74
$A_a'$	8,055	11,65	18,12
$A_i$	-0,349	-0,3525	-0,356
$A_i'$	1,019	1,022	1,026
$A_a - A_i$	14,27	12,33	12,095
$A_a - A_a'$	5,865	0,33	-6,38
$A_a - A_i'$	12,90	10,96	10,71
$B_a$	0,3695	0,2028	0,1276
$B_a'$	-0,1248	-0,1185	-0,1211
$B_i$	-17,60	-15,39	-13,55
$B_i'$	-23,83	-20,60	-17,96
$B_a - B_i$	17,97	15,59	13,68
$B_a - B_a'$	0,4943	0,3213	0,2487
$B_a - B_i'$	24,20	20,80	18,09
$Y_a/J_a$	-2,356	-1,449	-0,959
$Y_a'/J_a'$	0,643	0,9575	1,418
$Y_i/J_i$	-0,872	-0,826	-0,783
$Y_i'/J_i'$	-17,60	-15,47	-13,70
$Y_a/J_a - Y_a'/J_a'$	-2,999	-2,4065	-2,377
$Y_a/J_a - Y_i/J_i$	-1,484	-0,623	-0,176
$Y_a/J_a - Y_i'/J_i'$	15,24	14,02	12,74
F	1360	-187	-1342
$\therefore \lambda$		826	
Hertz		137,2	

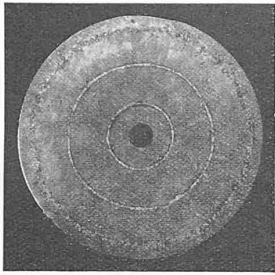


Abb. 17. Klangfigur 0/3 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 30/300, f = 1440$  Hertz.

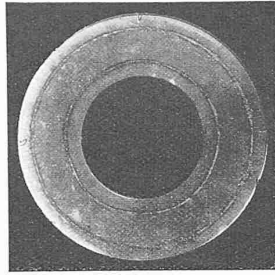


Abb. 19. Klangfigur 0/2 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 150/300, f = 1478$  Hertz.

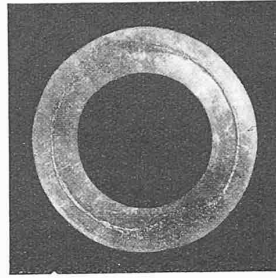


Abb. 21. Klangfigur 0/1 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 240/300, f = 298$  Hertz.

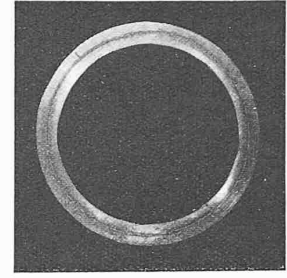


Abb. 22. Klangfigur 1/1 einer 2 mm starken Kupferscheibe mit freiem Rand.  $d/D = 210/300, f = 333$  Hertz.

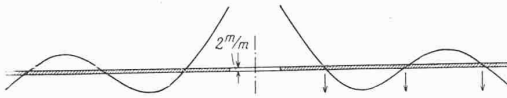


Abb. 18. Klangfigur 0/3 der Kupferscheibe gemäss Abb. 17. Schwingungszahl nach Rechnung 1372, nach Versuch 1440, Knotenkreis-Radien  $\left\{ \begin{array}{l} " 4,05 \text{ cm}, " 3,95 \text{ cm}, " 8,90 " 8,90 " " 13,40 " 13,40 " \end{array} \right.$



Abb. 20. Klangfigur 0/2 der Kupferscheibe gemäss Abb. 19. Schwingungszahl nach Rechnung 1423, nach Versuch 1478, Knotenkreis-Radien  $\left\{ \begin{array}{l} " 9,32 \text{ cm}, " 9,32 \text{ cm}, " 13,40 " 13,40 " \end{array} \right.$

Interessant ist zu sehen, dass die Schwingungszahl der vollen Platte mit einem Knotenkreis durch die kleine Bohrung um etwa 2% tiefer zu liegen kommt; die zentrale Bohrung bewirkt offenbar eine Lockerung der Platte, bzw. eine Verringerung ihrer Steifigkeit.

Das Rechnungsschema ist aus den Tabellen 1, 2 und 3 ersichtlich und ist grundsätzlich das Gleiche für alle anderen Schwingungsarten. Im vorliegenden Falle ist die Berechnung dadurch erleichtert, dass der Versuch einen guten Anhaltspunkt für die Wahl des Arguments liefert. Gewöhnlich genügen drei Punkte, um den Schnittpunkt der Kurve  $F$  mit der Abszissenaxe und damit die Frequenz zu finden. Die Rechnungen wurden im allgemeinen mit einem 50 cm Rechenschieber durchgeführt<sup>12)</sup>, nur in vereinzelt Fällen wurden siebenstellige Logarithmen verwendet.

β) Kreisplatte mit Bohrung wie unter α, Zweiknotenkreis-Schwingung (Abb. 15).

Der äussere Knotenkreis liegt in diesem Falle ziemlich nahe den Aufhängungspunkten und es ist daher zu erwarten, dass sich Versuch und Rechnung besser decken, als dies der Fall war mit der Einknotenkreis-Schwingung. Die Abweichung zwischen Theorie und Messung ist denn auch gegenüber 24% auf etwa 7% verringert. Die sekundliche Schwingungszahl nach Rechnung ist 583,0 und 625,0 gemäss Versuch. Bemerkenswert ist, dass hier, wie übrigens bei allen Kontrollbeispielen, die Theorie, die die wirkliche „freie Aufhängung“ voraussetzt, niedrigere Werte ergibt als der Versuch. Dies war zu erwarten, da jede Art der Gebundenheit gegenüber der „freien“ Platte eine Erhöhung der Schwingungszahl bewirken muss.

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch bezüglich der Lage der Knotenkreise ist wieder eine gute (Abb. 16).

γ) Kreisplatte mit Bohrung wie unter α und β, Dreiknotenkreis-Schwingung (Abb. 17).

Der äusserste Knotenkreis liegt hier dem Aufhängungspunkte noch näher als im vorigen Beispiel. Der Versuchswert von  $f = 1440$  Hertz weicht in der Tat nur noch 5% ab vom Werte  $f = 1372$  Hertz, wie er sich aus

<sup>12)</sup> Für die sorgfältige Durchführung eines Teils der Untersuchungen ist Dr. Koenig Herrn Dipl.-Ing. C. Ruegg zu Dank verpflichtet.

der Frequenzgleichung ergibt. Die Übereinstimmung bezüglich der Lage der Knotenkreise darf als eine sehr gute bezeichnet werden. Wieder ist auch der Innenrand besonders stark schwingend (Abb. 18).

Nach Kirchhoff ist das Verhältnis der Schwingungszahl der vollen Platte mit 1, 2 oder 3 Knotenkreisen  $1 : 4,32 : 9,88$ . Die Gegenwart der kleinen Zentralbohrung ändert diese Verhältnisse auf  $1 : 4,25 : 10,0$ .

δ) Kreisplatte mit Bohrung von 150 mm,

$$m = \frac{r}{R} = 0,50 \text{ (Abb. 19);}$$

Zweiknotenkreis-Schwingung

Diese grössere Bohrung bedeutet gegenüber dem Falle β eine Versteifung der Platte; die Frequenz für die gleiche Schwingungsart ist von 583 auf 1423 Hertz gestiegen. Die relativ gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch von 3,8% ist einesteiils wohl wieder darin begründet, dass der äussere Knotenkreis sehr nahe den Aufhängungspunkten liegt, und dass im übrigen die Durchbiegung unter dem eigenen Gewicht, d. h. auch die dadurch erzeugte Versteifung, kleiner geworden ist. Die Lage der Knotenkreise ergibt sich auch nach Rechnung genau wie beim Versuch; die Übereinstimmung ist eine vollkommene (Abb. 20).

ε) Kreisplatte mit Bohrung von 210 mm,

$$m = \frac{r}{R} = 0,70 \text{ (Abb. 21);}$$

Ein Knotenkreis und ein Knotendurchmesser.

Versuch und Rechnung decken sich für diesen Fall bis auf 1,2%, da die berechnete Frequenz sich auf 328,7 Hertz beläuft, gegenüber 333 Hertz beim Versuch. Die Ausbildung des Knotendurchmessers lässt zu wünschen übrig. Eine entsprechende Aenderung der Aufhängungspunkte würde wohl ein schärferes Bild mit sich bringen. Von einer Bestimmung der Lage des Knotenkreises wurde abgesehen, da die vorhergehenden Beispiele genügend Vertrauen in die Zuverlässigkeit der Theorie gebracht haben dürften. Das gleiche ist auch für den nächsten Fall zu sagen.

ζ) Kreisplatte mit Bohrung von 240 mm,

$$m = \frac{r}{R} = 0,80 \text{ (Abb. 22);}$$

Einknotenkreis-Schwingung.

Es ist überraschend, wie auch für diesen „Ring“ die Theorie der Platte offenbar noch mit sehr guter Annäherung gültig ist. Die Abweichung zwischen Rechnung und Versuch beträgt nur 5,3%. Rechnung: 283 Hertz, Versuch: 298 Hertz.

Zusammenfassung.

Durch Auflösung der Periodengleichung für Schwingungen von Kreisplatten mit zentraler Bohrung ergeben sich Beträge der Eigenfrequenzen und Abmessungen der Klangfiguren, die mit den Versuchen gut übereinstimmen. Auch für Platten mit „Ring“-charakter, d. h. mit relativ sehr grosser Bohrung, stehen Versuch und Rechnung in Einklang. Bei einer speziellen Biegungsschwingung eines sehr schmalen Ringes wurde Anschluss an eine ältere Theorie von J. H. Michell gefunden.