

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 95/96 (1930)  
**Heft:** 11

**Artikel:** Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben  
**Autor:** Ritter, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43965>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben. — Was soll uns ein „Burgbuch“? (Mit Tafeln 4 bis 7). — Pumpen für 12000 l/s Fördermenge des Speicher-Kraftwerks Niederwartha bei Dresden. — Mitteilungen: Metallholz, ein neuer Werkstoff. 75. Jubiläum der Eidgenössischen Technischen Hochschule.

Ausstellung „Farbe“ in Chur. Basler Rheinhafenverkehr. — Nekrologe: Benjamin Rosenfeld. Ed. Riggenbach. Otto F. Bruman. — Literatur. — Wettbewerbe: Turnhallen mit Turnplatz in Schaffhausen. — Mitteilungen der Vereine: Techn. Verein Winterthur. — Schweiz. Techn. Stellenvermittlung. — Sitzungs- u. Vortrags-Kalender.

Band 95

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 11

### Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben.

Von Prof. Dr. M. RITTER, Zürich.

Die übliche Berechnungsweise der Wärme- und Schwindspannungen in gelenklosen Gewölben bedarf heute der Revision. Neue statische Erwägungen, aber auch neue Messungen der Materialkonstanten und der Wärmeschwankungen liegen vor; ausserdem sind von verschiedenen Seiten konstruktive Massnahmen bekannt gegeben worden, um den ungünstigen Einfluss des Schwindens bei Beton-Gewölben herabzusetzen. Diesen Fortschritten entsprechend wird nachstehend versucht, die Theorie in erweiterter Fassung darzulegen und ihre Grundlagen erneut zu prüfen.

#### 1. ALLGEMEINE THEORIE.

Wir behandeln zunächst den Fall der vollständigen Einspannung beider Kämpfer, ausgehend von den bekannten Voraussetzungen, die in der Baustatik für schwach gekrümmte, ebene, schlanke Stäbe üblich sind. Durch eine Wärmeänderung oder den Einfluss des Schwindens bei Beton entstehen die Auflagerreaktionen  $R_1$  und  $R_2$ , die einander das Gleichgewicht halten. Als statisch bestimmtes Grundsystem sei der einfache Balken gemäss Abb. 1 gewählt; alsdann lassen sich  $R_1$  und  $R_2$  zerlegen in  $X_1, X_2, A$ , sowie  $X_3, X_3, B$ , wobei  $A$  und  $B$  die Auflagerdrücke am einfachen Balken sind, wenn  $X_1, X_2, X_3$  daran als äussere Kräfte angreifen.  $X_1$  und  $X_2$  sind Momente,  $X_3$  zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte (Bogenkräfte), die unter den Hebelarmen  $t_1$  und  $t_2$  an den Kämpfern wirken bzw. mit diesen durch starre Scheiben verbunden zu denken sind.

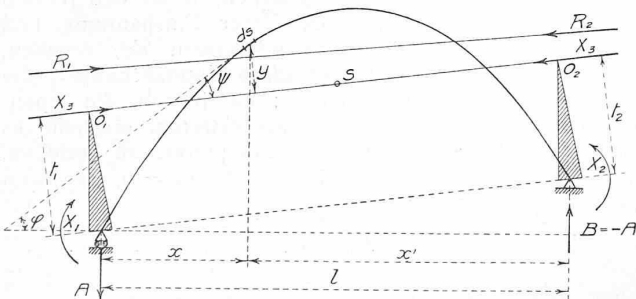


Abb. 1.

Die Grössen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  ergeben sich aus den Elastizitätsbedingungen, die besagen, dass bei der Formänderung die Drehung  $\alpha$  des linken Kämpfers und die Drehung  $\beta$  des rechten Kämpfers Null sind und sich auch die Spannweite nicht ändert. An Stelle der letzten Bedingung wird zweckmässig die Aenderung  $\delta$  der Distanz  $O_1 O_2$  der Endpunkte der starren Scheiben eingeführt. Aus den Elastizitätsbedingungen folgen die Elastizitätsgleichungen, am übersichtlichsten nach dem Gesetz der Superposition, in der Form

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_t + X_1 \alpha_1 + X_2 \alpha_2 + X_3 \alpha_3 = 0 \\ \beta &= \beta_t + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + X_3 \beta_3 = 0 \\ \delta &= \delta_t + X_1 \delta_1 + X_2 \delta_2 + X_3 \delta_3 = 0 \end{aligned}$$

Die angewandte Bezeichnung erhellt ohne weiteres aus den Gleichungen; es bedeuten

$\alpha_t$  und  $\beta_t$  die Drehungen der Kämpfer infolge der Wärmeänderung oder dem Schwinden des Beton im Grundsystem ( $X = 0$ ),

$\delta_t$  die Aenderung der Distanz  $O_1 O_2$  im Grundsystem ( $X = 0$ ),

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Drehung des linken Kämpfers infolge  $X_1 = 1$ , bzw.  $X_2 = 1, X_3 = 1$ , usw.

Wie man leicht einsieht, ist  $\delta_t$  mit den Drehwinkeln  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  durch die Beziehung

$$\delta_t = \alpha_t t_1 + \beta_t t_2 + \Delta l_t$$

verknüpft, wobei  $\Delta l_t$  die Aenderung der Spannweite  $l$  im Grundsystem, in Richtung der Angriffslinie von  $X_3$  gemessen, darstellt. Nach dem Satze von Maxwell ist  $\alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \delta_1$  und  $\beta_3 = \delta_2$ .

In bekannter Weise vereinfachen wir die Elastizitätsgleichungen, indem wir über die Hebelarme  $t_1$  und  $t_2$  so verfügen, dass  $\alpha_3$  und  $\beta_3$  gleich Null sind. Die Gleichungen lauten dann einfacher

$$\begin{aligned} \alpha_t + X_1 \alpha_1 + X_2 \alpha_2 &= 0 \\ \beta_t + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 &= 0 \\ \delta_t + X_3 \delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt

$$X_1 = \frac{\beta_t \alpha_2 - \alpha_t \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}, \quad X_2 = \frac{\alpha_t \beta_1 - \beta_t \alpha_1}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}, \quad X_3 = -\frac{\delta_t}{\delta_3} \quad (1)$$

Zur Ermittlung der Werte  $\alpha_t, \beta_t$  und  $\delta_t$  muss die Formänderung aller Trägerelemente im Grundsystem infolge der Wärmeänderung oder dem Schwinden des Betons bekannt sein. In allgemeiner Form wird diese Formänderung für ein Bogenelement der Länge  $ds$  definiert durch den Formänderungswinkel  $d\varphi_t$  (positiv, wenn die obere Kante gegenüber der untern verkürzt wird) und die spezifische Längenänderung  $\epsilon_t$  der Bogenaxe (positiv als Verlängerung). Alsdann erhält man mit den Bezeichnungen der Abb. 1 nach bekannten Methoden, z. B. mit Hilfe der Arbeitsgleichung, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \int \frac{x'}{l} d\varphi_t + \int \frac{\epsilon_t \sin \varphi}{l} ds \\ \beta_t &= \int \frac{x}{l} d\varphi_t - \int \frac{\epsilon_t \sin \varphi}{l} ds \\ \delta_t &= \int y d\varphi_t + \int \epsilon_t \cos \varphi ds \end{aligned}$$

worin die Integrale auf den ganzen Bogen auszudehnen sind.

Wir beschränken uns in der Folge auf den symmetrischen Bogen mit wagrechter Kämpferverbindungsline und nehmen ferner an, dass in symmetrischen Punkten auch die Formänderungen  $d\varphi_t$  und  $\epsilon_t$  gleich seien. Dann verschwindet in den Formeln für  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  der zweite Summand, da jedem Wert  $\epsilon_t \sin \varphi$  ein symmetrischer  $-\epsilon_t \sin \varphi$  entspricht und wir erhalten

$$\alpha_t = \beta_t = \int \frac{x}{l} d\varphi_t = \frac{1}{2} \int d\varphi_t$$

Betrachtet man die Formänderungswinkel  $d\varphi_t$  als Gewichte, an der Bogenaxe angreifend, und bestimmt man den Abstand  $v$  ihres Schwerpunktes von der Angriffslinie von  $X_3$ , so folgt weiter

$$\delta_t = v \int d\varphi_t + \int \epsilon_t \cos \varphi ds$$

Der Symmetrie wegen wird jetzt  $X_1 = X_2$ , künftighin mit  $M$  bezeichnet;  $X_3$  liegt wagrecht und sei daher gleich  $H$  gesetzt (Horizontalschub). Die Ausdrücke (1) gehen mit  $\alpha_t = \beta_t, \alpha_1 = \beta_2$  und  $\cos \varphi ds = dx$  über in

$$M = -\frac{\int d\varphi_t}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad H = -\frac{v \int d\varphi_t + \int \epsilon_t dx}{\delta_3} \quad (2)$$

Die Nennerwerte lassen sich nach bekannten Methoden, z. B. mit Hilfe der Arbeitsgleichung darstellen. Wir begnügen uns damit, die Resultate zu vermerken. Bezeichnet  $E$  den Elastizitätsmodul und  $G$  den Schubmodul des Baustoffes,  $F$  den Querschnitt,  $J$  das massgebende Trägheitsmoment an der Stelle  $x, y$ ,  $F'$  die reduzierte Querschnittsfläche, so wird für den symmetrischen Bogen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \int \frac{x'^2 ds}{l^2 EJ} + \int \frac{x x' ds}{l^2 EJ} = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{EJ} \quad (3)$$

und

$$-\delta_3 = \int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}$$

In dem Ausdruck für  $\delta_3$  ist das Minuszeichen beigefügt, weil  $H = 1$  eine Verkürzung der Entfernung  $O_1 O_2$  zur Folge hat. Da der Einfluss der Biegemomente, also der erste Summand bei der Berechnung von  $\delta_3$  stets überwiegt, kann mit genügender Annäherung auch

$$-\delta_3 = \int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \frac{ds}{EF} \dots (4)$$

geschrieben werden. Damit lauten die Gleichungen (2)

$$M = - \frac{\int d\varphi_t}{\int \frac{ds}{EJ}}, \quad H = \frac{v \int d\varphi_t + \int \epsilon_t dx}{\int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \frac{ds}{EF}} \dots (5)$$

Die Lage von  $H$  folgt aus der Bedingung

$$\alpha_3 = \int \frac{x' y ds}{l EJ} = 0;$$

d. h.  $H$  geht durch den Schwerpunkt der an der Bogenaxe angreifend gedachten „elastischen Gewichte“  $\frac{ds}{EJ}$ . Daher berechnet sich der Abstand  $t$  des Horizontalschubes von der Kämpferwagrechten aus

$$t = \frac{\int y' \frac{ds}{EJ}}{\int \frac{ds}{EJ}} \dots (6)$$

Die vorstehenden Ableitungen sollen jetzt auf den allgemeineren Fall einer elastischen Einspannung der Kämpfer erweitert werden, die dadurch definiert ist, dass die Drehwinkel der Kämpfer nicht verschwinden, sondern proportional den betreffenden Kämpfermomenten  $M_k$  sind. An Stelle der Elastizitätsbedingungen  $\alpha = \beta = 0$  des vollständig eingespannten Bogens tritt jetzt im Fall der Symmetrie

$$\alpha = \beta = -\alpha_k M_k = -\alpha_k (M + H t), \dots (7)$$

wo  $\alpha_k$  die Drehung der Kämpfer infolge  $M_k = -1$  bezeichnet. Wird diese Beziehung in die Elastizitätsgleichungen eingeführt, so gelangt man für die Grössen  $M$  und  $H$  zu erweiterten Ausdrücken. Indessen gestattet eine einfache Ueberlegung, die Formeln für den elastisch eingespannten Bogen mit Hilfe der Ausdrücke (5) direkt hinzuschreiben. Wie man leicht erkennt, ist nämlich die elastische Einspannung identisch mit einer vollständigen Einspannung, bei der die Biegesteifigkeit  $EJ$  der an die Kämpfer angrenzenden Trägerelemente durch den Wert  $ds/\alpha_k$  ersetzt ist; die Formänderungswinkel dieser Trägerelemente betragen dann

$$\text{statt } d\varphi = \frac{M_k ds}{EJ} \\ d = \varphi \frac{M_k ds}{\frac{ds}{\alpha_k}} = \alpha_k M_k, \dots (8)$$

d. h. die den Kämpfern unendlich benachbarten Schnitte drehen sich analog Gl. (7). Man braucht daher zu den elastischen Gewichten  $\frac{ds}{EJ}$  nur an beiden Kämpfern noch die Gewichte  $\alpha_k$  beizufügen, um den Fall der elastischen Einspannung zu erhalten.

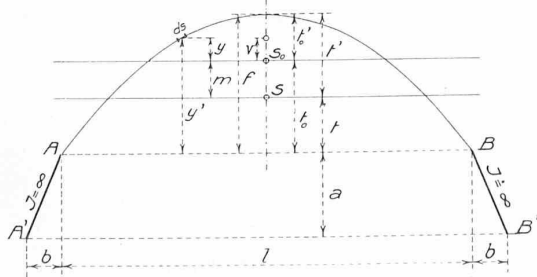


Abb. 2

Bei den Brückengewölben rührt die elastische Einspannung meist weniger von der Elastizität der Widerlager, als von der Nachgiebigkeit des Baugrundes her. Deshalb legen wir der Rechnung nachstehend Abb. 2 zu Grunde, indem wir uns an die Gewölbekämpfer  $A$  und  $B$  starke Scheiben (Widerlager)  $A'$  und  $B'$  angeschlossen denken, deren Endquerschnitte  $A'$  und  $B'$  elastische Verdrehungen erleiden. Wir betrachten das Gewölbe mit Einschluss der Widerlager als Bogen von der Spannweite

$l' = l + 2b$  und der Pfeilhöhe  $f + a$  und fügen an den Kämpfern  $A'$  und  $B'$  die elastischen Gewichte  $\alpha_k$  hinzu. Für das Moment  $M$  erhalten wir darnach aus Gl. (5):

$$M = - \frac{\int d\varphi_t}{\int \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k} \dots (9)$$

Der Abstand  $t$  folgt aus Gl. (6), indem wir noch die elastischen Gewichte mit den Hebelarmen  $y' = -a$  beifügen zu

$$t = \frac{\int y' \frac{ds}{EJ} - 2a\alpha_k}{\int \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k} = \frac{t_0 \int \frac{ds}{EJ} - 2a\alpha_k}{\int \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k}, \dots (10)$$

worin  $t_0$  den Abstand bei vollständiger Einspannung bezeichnet. Vom Scheitel aus gemessen ergibt sich

$$t' = f - t = \frac{t_0 \int \frac{ds}{EJ} + 2(f+a)\alpha_k}{\int \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k}$$

Die Angriffslinie des Horizontalschubes verschiebt sich um

$$m = t_0 - t = \frac{2\alpha_k(t_0 + a)}{\int \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k} = \frac{2\alpha_k(t + a)}{\int \frac{ds}{EJ}} \dots (11)$$

An Stelle von Gl. (4) tritt daher

$$\int (y + m)^2 \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k(t + a)^2 + \int \frac{ds}{EF}$$

oder nach Einsetzung des Ausdruckes für  $m$

$$\int y^2 \frac{ds}{EJ} + 2\alpha_k(t_0 + a)(t + a) + \int \frac{ds}{EF}$$

Damit lautet der Ausdruck für den Horizontalschub an Stelle von Gl. (5)

$$H = \frac{(v + m) \int d\varphi_t + \int \epsilon_t dx}{\int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \frac{ds}{EF} + 2\alpha_k(t_0 + a)(t + a)} \dots (12)$$

Die Angriffslinie rückt gemäss Gl. (11) um so tiefer, je grösser  $\alpha_k$ , d. h. je geringer der Einspannungsgrad ist; für  $\alpha_k = \infty$  wird  $t = -a$ ,  $M = 0$ , und  $H$  geht in den bekannten Ausdruck für den Zweigelenkbogen über.

Zur Klarstellung der Einflüsse der verschiedenen Grössen auf die Beanspruchungen berechnen wir nachstehend noch die Biegemomente im Scheitel ( $M_s$ ) und in den Kämpfern ( $M_k$ ), und vergleichen sie mit den Werten ( $M_{s_0}$ ,  $M_{k_0}$ ), die sich bei vollständiger Einspannung und unter Ausschaltung der Formänderungen  $d\varphi_t$  ergeben. Streng genommen wären für diese Untersuchungen die Kernpunktsmomente massgebend; da jedoch die Spannungen aus den Normalkräften zurücktreten, erscheint es zulässig, die Momente auf die Schwerpunkte zu beziehen. Die Ausdrücke (9) und (12) lauten für  $\alpha_k = 0$ ,  $\int d\varphi_t = 0$  und  $v \int d\varphi_t = 0$

$$M = 0, \quad H_0 = \frac{\int \epsilon_t dx}{\int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \frac{ds}{EF}} \dots (13)$$

und liefern die Scheitel- und Kämpfermomente

$$M_{s_0} = -H_0 t_0, \quad M_{k_0} = H_0 t_0$$

Durch die elastische Einspannung und den Einfluss der Formänderungen  $d\varphi_t$  werden diese Momente beim symmetrischen Bogen geändert in

$$M_s = M - H t' = -\mu_s H_0 t_0,$$

$$M_k = M + H t = \mu_k H_0 t_0,$$

wo  $\mu_s$  und  $\mu_k$  Reduktionsfaktoren (positive echte Brüche) darstellen. Daraus berechnen sich  $M$  und  $H$  zu

$$\left. \begin{aligned} M &= - \frac{\mu_s t_0' t - \mu_k t_0 t'}{f} H_0 \\ H &= \frac{\mu_s t_0' + \mu_k t_0}{f} H_0 \end{aligned} \right\} (14)$$

Damit  $\mu_s$  und  $\mu_k$  gleichzeitig möglichst klein werden, muss  $H$  entsprechend niedrig ausfallen. Man erkennt aus Gl. (12), dass sowohl  $\alpha_k$  wie auch namentlich  $a$  die Rechnung günstig beeinflussen, während die Formänderung  $\int d\varphi_t$  verschieden wirkt je nach dem Vorzeichen von  $v$  und  $m$ .

Eine gleichmässige Reduktion der Scheitel- und Kämpfermomente ist definiert durch  $\mu_s = \mu_k = \mu$ . Hierfür lauten die Gl. (14)

$$\left. \begin{aligned} M &= - \mu \frac{t_0' t - t_0 t'}{f} H_0 = + \mu m H_0 \\ H &= \mu H_0 \end{aligned} \right\} (15)$$

2. ANWENDUNG AUF BRÜCKENGEWÖLBE.

In Anlehnung an frühere Arbeiten<sup>1)</sup> setzen wir voraus, dass sich das Trägheitsmoment  $J$  längs der Gewölbeaxe nach dem Gesetz

$$\frac{J_s}{J \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \frac{z^2}{l^2}, \quad n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k}, \quad (16)$$

ändert, unter  $J_s$  und  $J_k$  die Trägheitsmomente im Scheitel und Kämpfer verstanden (vergl. Abb. 3). Als Gewölbeaxe

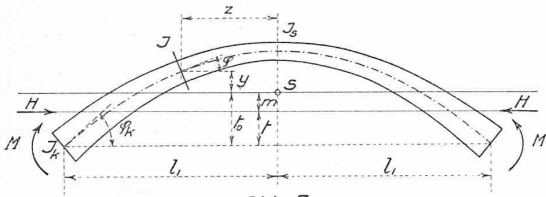


Abb. 3.

wählen wir zur Vereinfachung der Berechnung eine Parabel vierter Ordnung, deren Gleichung, bezogen auf die Kämpferwagrechte,

$$y' = f \left[ 1 - (1 - c) \frac{z^2}{l^2} - c \frac{z^4}{l^4} \right] \dots (17)$$

lautet. Wenn, wie üblich, die Gewölbeaxe nicht als Parabel, sondern als Stützlinie für Eigengewicht vorgesehen ist, so kann Gl. (17) als Annäherung dienen, indem die Konstante  $c$  so eingesetzt wird, dass sich Stützlinie und Parabel im Gewölbeviertel schneiden. Aus der dortigen, gemeinsamen Ordinate

$$y_0' = f \left[ 1 - (1 - c) \frac{l^2}{4l^2} - c \frac{l^4}{16l^4} \right]$$

berechnet sich die Konstante  $c$  der Ersatzkurve (17) zu

$$c = \frac{16}{3} \frac{y_0'}{f} - 4 \dots (18)$$

Auf Grund der Gesetze (16) und (17) finden wir

$$\int \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_s} \int \left[ 1 - (1 - n) \frac{z^2}{l^2} \right] dz = \frac{n+2}{3} \frac{l}{EJ_s}$$

sowie

$$\int y' \frac{ds}{EJ} = \frac{f}{EJ_s} \int \left[ 1 - (1 - c) \frac{z^2}{l^2} - c \frac{z^4}{l^4} \right] \left[ 1 - (1 - n) \frac{z^2}{l^2} \right] dz = \frac{2fl}{315 EJ} [7(n+2)(c+5) + 2(1-n)(7-c)]$$

Darnach ergibt sich der Abstand des Schwerpunktes der elastischen Gewichte von der Kämpferwagrechte zu

$$t_0 = \left[ \frac{2(c+5)}{15} + \frac{4(1-n)(7-c)}{105(n+2)} \right] f = c_0 f \quad (19)$$

Der Koeffizient  $c_0$  beträgt für  $n=1$  und  $c=0$  (Parabelbogen mit konstantem  $J \cos \varphi$ )  $c_0 = \frac{2}{3}$ ; in praktischen Fällen ist jedoch meist  $n < 1$  und  $c > 1$ , weshalb  $c_0$  wesentlich höher liegt, vergl. nachstehende Tabelle.

Tabelle der Werte  $c_0$  in Gl. (19).

$n =$	1	0,50	0,25	0,10	0
$c = 0$	0,6667	0,7200	0,7556	0,7810	0,8000
0,1	0,6800	0,7326	0,7676	0,7927	0,8114
0,2	0,6933	0,7451	0,7797	0,8044	0,8229
0,3	0,7067	0,7577	0,7917	0,8161	0,8343
0,4	0,7200	0,7703	0,8038	0,8278	0,8457
0,5	0,7333	0,7829	0,8159	0,8395	0,8571

Es gelingt leicht, auch den Ausdruck  $\int y^2 \frac{ds}{EJ}$  im Nenner der Gl. (12) und (13) in eine geschlossene Form zu entwickeln. Die Gleichung der Bogenaxe, bezogen auf die Wagrechte durch den Schwerpunkt der elastischen Gewichte lautet

$$y = y' - t_0 = f \left[ 1 - c_0 - (1 - c) \frac{z^2}{l^2} - c \frac{z^4}{l^4} \right]$$

<sup>1)</sup> „Vereinfachung der Berechnung gelenkloser Brückengewölbe“ Schweizer. Bauzeitung 1908, Bd. 51.

damit folgt

$$\int y^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{f^2}{EJ_s} \int \left[ 1 - c_0 - (1 - c) \frac{z^2}{l^2} - c \frac{z^4}{l^4} \right]^2 \left[ 1 - (1 - n) \frac{z^2}{l^2} \right] dz = \frac{f^2 l}{\lambda EJ_s} \dots (20)$$

worin

$$\frac{1}{\lambda} = (1 - c_0)^2 \left( 1 - \frac{1-n}{3} \right) + (1 - c)^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{1-n}{7} \right) + c^2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1-n}{11} \right) - 2(1 - c_0)(1 - c) \left( \frac{1}{3} - \frac{1-n}{5} \right) - 2c(1 - c_0) \left( \frac{1}{5} - \frac{1-n}{7} \right) + 2c(1 - c) \left( \frac{1}{7} - \frac{1-n}{9} \right)$$

Für  $c=0$  und  $n=1$  wird  $\lambda = 45/4$ . Der Koeffizient  $\lambda$  wächst mit steigendem  $c$  und abnehmendem  $n$ , wie aus folgender Tabelle hervorgeht.

Tabelle der Werte  $\lambda$  in Gl. (20).

$n =$	1	0,50	0,25	0,10	0
$c = 0$	11,25	15,81	20,82	26,43	32,81
0,1	11,62	16,42	21,81	27,96	35,09
0,2	11,89	17,03	22,84	29,58	37,57
0,3	12,20	17,65	23,90	31,30	40,25
0,4	12,51	18,27	25,00	33,11	43,16
0,5	12,81	18,90	26,12	35,01	46,29

Für die Lage des Horizontalschubes ergibt sich aus Gl. (10)

$$t = \frac{t_0 \frac{n+2}{3} \frac{l}{EJ_s} - 2 a \alpha_k}{\frac{n+2}{3} \frac{l}{EJ_s} + 2 \alpha_k} = \frac{(n+2) c_0 - 6 \alpha_k' c_a}{n+2+6 \alpha_k'} f \quad (21)$$

worin zur Abkürzung  $c_a = \frac{a}{f}$  und  $\alpha_k' = \frac{\alpha_k EJ_s}{l}$  gesetzt ist. Daraus folgt

$$t + a = \frac{(n+2)(c_0 + c_a)}{n+2+6 \alpha_k'} f$$

Für das Moment  $M$  erhalten wir aus Gl. (9)

$$M = - \frac{3 EJ_s}{l} \frac{\int d\varphi_l}{n+2+6 \alpha_k'} \dots (22)$$

Bei der Berechnung des Horizontalschubes  $H$  ist zu beachten, dass der zweite Summand im Nenner von Gl. (12), der den Einfluss der Normalkräfte und Schubkräfte darstellt, stark zurücktritt und daher näherungsweise durch  $\frac{l}{EF_s}$  ersetzt werden kann, wo  $F_s$  den Scheitelquerschnitt bezeichnet. Setzt man noch  $t_0 + a = (c_0 + c_a) f$ , so geht Gl. (12) über in

$$H = \frac{\lambda EJ_s}{f^2 l} \frac{(v+m) \int d\varphi_l + \int \varepsilon_l dx}{1 + \frac{\lambda J_s}{f^2 F_s} + \frac{2(n+2)\lambda(c_0+c_a)^2 \alpha_k'}{n+2+6 \alpha_k'}} \quad (23)$$

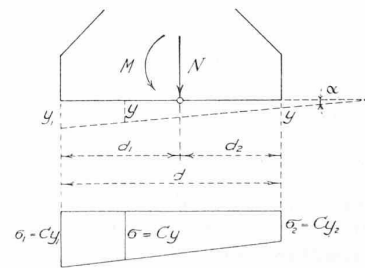


Abb. 4.

Durch die reine Zahl  $\alpha_k'$  tritt die Nachgiebigkeit des Baugrundes in Beziehung zur Elastizität des Gewölbes selbst. Bei plastischem Baugrund lässt sich  $\alpha_k$  und damit auch  $\alpha_k'$  in einfacher Weise darstellen, indem man (nach Winkler) die sogen. Bettungsziffer  $C$  des Baugrundes

einführt, vergl. Abb. 4. Darnach ist die Bodenpressung  $\sigma$  proportional der Einsenkung  $y$ , also  $\sigma = Cy$ . Setzt man den Fundamentkörper als starr voraus, so beträgt bei symmetrischer Fundamentsohle deren Drehung

$$\alpha = \frac{y_1 - y_2}{d} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{Cd}$$

Nach der Formel von Navier wird

$$\sigma_1 = \frac{N}{F_F} + \frac{M}{J_F} d_1, \quad \sigma_2 = \frac{N}{F_F} - \frac{M}{J_F} d_2,$$

daher  $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{M}{J_F} d$  und damit  $\alpha = \frac{M}{C J_F}$ , wobei

$J_F$  das Trägheitsmoment der Fundamentsohle bezeichnet. Für  $M = 1$  folgt daraus

$$\alpha_k = \frac{1}{C J_F} \quad \text{und} \quad \alpha_k' = \frac{\alpha_k E J_s}{l} = \frac{E J_s}{l C J_F} \quad (24)$$

Bei weitgespannten Brückengewölben ergibt sich  $\alpha_k'$  meist als kleine Zahl, da das Verhältnis  $J_s/J_F$  in der Regel klein ist; z. B. erhält man mit  $J_s/J_F = 0,01$ ,  $E = 400000 \text{ kg/cm}^2$  (Beton),  $c = 20 \text{ kg/cm}^3$  (Kiesboden) und  $l = 40 \text{ m}$  den Wert  $\alpha_k' = 0,05$ . In dieser Höhe erweist sich jedoch der Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes bereits als beträchtlich, namentlich wenn  $c_a$  gross ist. Das letzte Glied im Nenner von Gl. (23) erreicht z. B. mit  $n=1$  und  $c=0$  (Parabelbogen mit konstantem  $J \cos \varphi$ ),  $c_0 = 2/3$ ,  $c_a = 1/3$ ,  $\alpha_k' = 0,05$ , den Wert

$$\frac{2(n+2)\lambda(c_0+c_a)^2\alpha_k'}{n+2+6\alpha_k'} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 11,25 \cdot 1 \cdot 0,05}{3+6 \cdot 0,05} = 1,0$$

wodurch der Horizontalschub bereits auf die Hälfte herabgesetzt würde. Diese Rechnung ist allerdings insofern anfechtbar, als nach neuern Versuchen die Bettungsziffer keineswegs als Konstante betrachtet werden darf; indessen erscheint es nicht wahrscheinlich, dass eine exaktere Behandlung des Problems wesentlich ungünstigere Zahlen liefert. Bei Gründung auf Fels fällt der Einspannungsgrad bedeutend grösser aus; leider fehlen zur Zeit die Unterlagen, um hier  $\alpha_k'$  zuverlässig zu berechnen.

Für den vollständig eingespannten Bogen folgt aus (23) mit  $\alpha_k' = 0$  und  $m = 0$  der obere Grenzwert von  $H$  zu

$$H_0 = \frac{\lambda E J_s}{f^2 l} \frac{v \int d\varphi_t + \int \varepsilon_t dx}{1 + \frac{\lambda J_s}{f^2 F_s}} \quad (25)$$

mit  $\alpha_k' = \infty$  und  $m = t_0 + a$  ergibt sich der untere Grenzwert

$$H_1 = \frac{\lambda E J_s}{f^2 l} \frac{(v + t_0 + a) \int d\varphi_t + \int \varepsilon_t dx}{1 + \frac{\lambda J_s}{f^2 F_s} + \lambda \frac{n+2}{3} (c_0 + c_a)^2}$$

Dazwischen liegen alle möglichen Fälle der teilweisen Einspannung. Sieht man vom Einfluss der Formänderungen  $d\varphi_t$  ab und vernachlässigt das zweite Glied des Nenners, das stets klein ist, so beträgt die grösstmögliche Reduktion

$$\mu = \frac{H_1}{H_0} = \frac{1}{1 + \lambda \frac{(n+2)}{3} (c_0 + c_a)^2}$$

Für  $n = 1$ ,  $c = 0$ ,  $c_0 = 2/3$ ,  $c_a = 1/3$ , wird  $\mu = 0,028$ , für  $n = 0,1$ ,  $c = 0,4$ ,  $c_0 = 0,828$ ,  $c_a = 1/3$ , wird  $\mu = 0,031$ .

Wenn auch in praktischen Fällen diese Grenzwerte nicht erreicht werden, so hat die elastische Einspannung doch meist eine wesentliche Abminderung der Wärme- und Schwindspannungen zur Folge, für die nicht nur  $\alpha_k'$ , sondern namentlich auch der Wert  $c_a$  wesentlich ist. Bei gewölbten Durchlässen z. B. wird durch den hohen Betrag von  $c_a$  der Horizontalschub selbst bei kleinem  $\alpha_k'$  sehr stark reduziert.

Durch die Formänderungen  $d\varphi_t$  werden die Wärme- und Schwindspannungen ebenfalls stark beeinflusst. Bei positivem Werte der Strecke  $v$  ergibt sich dieser Einfluss um so grösser, je geringer der Einspannungsgrad ist.

### 3. BIEGUNGSTEIFIGKEIT UND ELASTIZITÄTSMODUL.

Die grundlegenden Voraussetzungen der technischen Bieungslehre (Hooke'sches Gesetz und Annahmen von Navier) kommen in der Gewölbetheorie durch den bekannten Ausdruck für den Formänderungswinkel

$$d\varphi = \frac{M_s ds}{E J} \quad (26)$$

zur Geltung, wobei  $E J$  als Bieungstefigkeit bezeichnet wird. Die Verwertung des Ausdruckes (26) zur Berechnung der Formänderungen im Grundsystem, insbesondere die Ableitung der Elastizitätsgleichungen aus den Elastizitätsbedingungen ist dagegen eine Aufgabe rein geometrischer Natur, die lediglich noch von der stets berechtigten Annahme Gebrauch macht, dass die Formänderungen im Vergleich zu den Abmessungen des Gewölbes sehr kleine Grössen sind. Es gelingt leicht, den Gültigkeitsbereich der Gewölbetheorie auf den Fall eines unhomogenen Baustoffes

zu erweitern, indem die Beziehung (26) allgemeiner gefasst wird. Da diese Erweiterung wertvollen Aufschluss gewährt über den Einfluss einer Rissebildung, sei sie nachstehend eingehender behandelt.

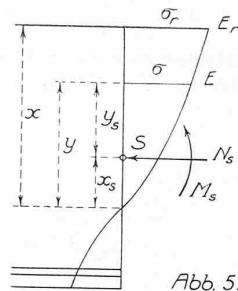


Abb. 5.

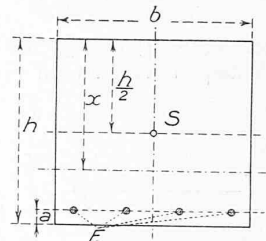


Abb. 6.

Wir betrachten einen symmetrischen Querschnitt, auf den die Normalkraft  $N_s$  im Schwerpunkte  $S$ , sowie das Moment  $M_s$  in der Symmetrieaxe angreifen. Bei beliebigem Formänderungsgesetz des Materials ist die Spannungsverteilung nicht linear. Mit den Bezeichnungen der Abb. 5 lässt sich die Spannung  $\sigma$  einer Faser mit dem Elastizitätsmodul  $E$  ausdrücken durch die Spannung  $\sigma_r$  am oberen Rande mit dem Elastizitätsmodul  $E_r$ , indem man die Bedingung für das Ebenbleiben der Querschnitte anschreibt:

$$\frac{\sigma}{E} : \frac{\sigma_r}{E_r} = y : x$$

woraus

$$\sigma = \frac{\sigma_r E}{x E_r} y$$

Die Momentengleichung für die Schweraxe  $S$  liefert

$$M_s = \int \sigma y_s dF = \frac{\sigma_r}{x} \int \frac{E}{E_r} y y_s dF$$

worin die Integration den ganzen Querschnitt umfasst. Für den Formänderungswinkel ergibt sich damit

$$d\varphi = \frac{\sigma_r ds}{E_r x} = \frac{M_s ds}{\int E y y_s dF}$$

An Stelle von  $E J$  tritt also bei veränderlichem Elastizitätsmodul für die Bieungstefigkeit der allgemeinere Ausdruck

$$\int E y y_s dF = \int E y_s^2 dF + x_s \int E y_s dF \quad (27)$$

der eine Funktion des Momentes und der Normalkraft darstellt, weshalb das Gesetz der Superposition seine Gültigkeit verliert. Der Einfluss einer Rissebildung wird erhalten, indem für die Fasern der Risszone  $E = 0$  gesetzt wird.

Wir berechnen nachstehend die Bieungstefigkeit für einen rechteckigen Eisenbetonquerschnitt mit einfacher Armierung, im Stadium der Rissebildung (vergl. Abb. 6). Der Elastizitätsmodul sei für den Beton auf Druck konstant  $E_b$ , auf Zug  $E_z = 0$ , für das Eisen  $E_e = n E_b$ . Nach Gl. (27) erhalten wir

$$\int E y y_s dF = E_b \left[ \frac{b x^3}{12} + b x \left( \frac{h-x}{2} \right)^2 + \left( x - \frac{h}{2} \right) b x \frac{h-x}{2} \right] + E_e F_e (h-x-a) \left( \frac{h}{2} - a \right) = E_b \frac{b \lambda^3}{12} \left[ 3 \left( \frac{x}{h} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{h} \right)^3 + 6 n \mu_e \left( 1 - \frac{x}{h} - \frac{a}{h} \right) \left( 1 - 2 \frac{a}{h} \right) \right] \quad (28)$$

worin  $\mu_e = \frac{F_e}{b h}$  den Armierungsgehalt bezeichnet. Der Klammerausdruck bringt den Einfluss der Armierung und der Zugzone bei fehlender Zugstefigkeit des Beton im Vergleich zum homogenen Querschnitt  $J = b h^3/12$  zum Ausdruck, vergl. folgende Tabelle ( $n = 10$ ,  $\frac{a}{h} = 0,05$ ):

Tabelle des Klammerausdruckes in Gl. (28).

$\mu_e \%$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\frac{x}{h} = 1$	1,00	1,00	0,99	0,98	0,98	0,97
0,9	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00
0,8	0,90	0,92	0,93	0,95	0,96	0,98
0,7	0,78	0,81	0,83	0,86	0,89	0,92
0,6	0,65	0,69	0,73	0,76	0,80	0,84
0,5	0,50	0,55	0,60	0,65	0,69	0,74

Man erkennt, wie mit zunehmender Exzentrizität die Biegungsteifigkeit abnimmt, besonders bei geringer Armierung; jedoch ist diese Abnahme innerhalb der Fälle der Praxis nicht beträchtlich und entspricht keineswegs der Reduktion des Trägheitsmomentes durch die Rissebildung. Beispielsweise sinkt bei unarmiertem Querschnitt die Biegungsteifigkeit bei Ausschuss der Zugfestigkeit für  $x/h = 0,8$  gemäss der Tabelle nur um ein Zehntel, während das Trägheitsmoment des unter Spannung stehenden Querschnittsteiles die Hälfte des Wertes für den vollen Querschnitt beträgt.

Mit Bezug auf die Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben lässt sich aus obigen Rechnungen schliessen, dass eine wesentliche Entlastung durch die Rissebildung nicht zu erwarten ist. Die oft gehörte Vermutung, dass durch die Rissebildung in den gefährdeten Querschnitten eine Art Gelenkstellen geschaffen würden, die dem eingespannten Bogen schliesslich eine spannungslose Deformation ermöglichen, trifft nicht zu, selbst dann nicht, wenn in den Eiseneinlagen die Streckgrenze überschritten wird. Die in der eidgenössischen Verordnung betr. Eisenbetonbauten vom 26. November 1915 enthaltene Rechenvorschrift, wonach bei der Berechnung statisch unbestimmter Grössen der volle Betonquerschnitt mit einheitlichem Elastizitätsmodul einzuführen ist, erscheint hier nach durchaus begründet.

Nach den allgemeinen Gl. (9) und (12) in Verbindung mit den Erörterungen über die Biegungsteifigkeit ergeben sich die äussern Kräfte für die Wärmeänderung und das Schwinden des Beton nahezu proportional den Trägheitsmomenten der Gewölbequerschnitte und dem Elastizitätsmodul der auf Druck beanspruchten Randfasern. Hierbei handelt es sich um den Elastizitätsmodul der gesamten, bleibenden und elastischen Formänderungen, der wesentlich kleiner ist, als der Betrag infolge der elastischen Formänderungen allein. Die bisherigen Dehnungsmessungen in den Laboratorien und an fertigen Bauwerken können jedoch keine Auskunft über die Höhe dieses Elastizitätsmoduls geben, da bis heute nur kurzfristige Messungen vorliegen, während sich die Formänderungen bei den Gewölben in der Hauptsache langsam auswirken. Zahlreiche Beobachtungen der letzten Jahre lassen vermuten, dass durch den Einfluss der Zeit die bleibenden Formänderungen bei Mauerwerk und Beton stark zunehmen, eine Erscheinung, die den massiven Bauwerken hinsichtlich der Wärme- und Schwindspannungen zu gute kommt, unter Umständen aber auch als Quelle einer Gefahr auftritt. Die eidgenössische Verordnung vom 26. November 1915 berücksichtigt diesen Einfluss der Zeit, indem sie zur Berechnung der Zusatzkräfte aus Temperaturänderungen und dem Schwinden von Beton  $E = 200 \text{ t/cm}^2$  vorschreibt, also nur etwa die Hälfte des Elastizitätsmoduls der rein elastischen Deformation von hochwertigem Beton. Eine Abklärung dieser Frage, gestützt auf langfristige Messungen und die Auswertung vorhandener Beobachtungen, wäre sehr zu begrüssen.

4. FORMÄNDERUNG DER BOGENELEMENTE IM GRUNDSYSTEM.

Die Anwendung der Gleichungen (9) und (12), bzw. (22) und (23) erfordert vor allem die Kenntnis der Formänderung der Gewölbeelemente im Grundsystem, definiert durch den Formänderungswinkel  $d\varphi_t$  und die spezifische Längenänderung  $\varepsilon_t$  der Bogenaxe. Aus Abb. 7 ergibt sich zunächst die Verlängerung einer Faserschicht im Abstände  $y$  von der Axe zu

$$\Delta ds = \varepsilon_t ds - y d\varphi_t \quad \dots \quad (29)$$

Die Dehnung, die diese Faserschicht in spannungslosem Zustand infolge einer Wärmeänderung oder Schwindwirkung erleiden würde, sei mit  $\varepsilon_0$  bezeichnet. Die wirkliche Dehnung ist davon verschieden, indem durch die Bedingung, dass die Querschnitte bei der Deformation eben bleiben, noch innere Spannungen  $\sigma$  (positiv als Druckspannungen) hinzutreten. Die genannte Faserschicht verlängert sich darnach um:

$$\Delta ds = \varepsilon_0 ds - \frac{\sigma}{E} ds,$$

woraus

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - \frac{\Delta ds}{ds} \right)$$

oder mit Benützung von Gl. (29)

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - \varepsilon_t + y \frac{d\varphi_t}{ds} \right) \quad \dots \quad (30)$$

folgt. Da im Grundsystem keine äussern Kräfte wirken, so bilden die Spannungen  $\sigma$  in jedem Querschnitt ein Gleichgewichtssystem; es gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma dF &= \int E \left( \varepsilon_0 - \varepsilon_t + y \frac{d\varphi_t}{ds} \right) dF = 0 \\ \int \sigma y dF &= \int E \left( \varepsilon_0 - \varepsilon_t + y \frac{d\varphi_t}{ds} \right) y dF = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

aus denen sich die Formänderungen  $\varepsilon_t$  und  $d\varphi_t$  berechnen lassen. Zur Vereinfachung definieren wir als Bogenaxe den Ort der Schwerpunkte der ideellen Flächen  $\int E dF$ ; dann wird  $\int E y dF = 0$  und wir erhalten aus (31)

$$\varepsilon_t = \frac{\int \varepsilon_0 E dF}{\int E dF}, \quad \frac{d\varphi_t}{ds} = - \frac{\int \varepsilon_0 E y dF}{\int E y^2 dF} \quad \dots \quad (32)$$

Der Elastizitätsmodul  $E$  kann in diesen allgemeinen Ausdrücken von Faser zu Faser verschieden sein. Bei der Anwendung auf Eisenbetonquerschnitte setzt man  $E_b$  konstant für die Druckzone des Betons,  $E_e$  für das Eisen und eventuell  $E_z = 0$  für die Zugzone des Beton im Stadium der Rissebildung. Mit der üblichen Abkürzung  $n = E_e : E_b$  schreiben sich jetzt die Ausdrücke (32) zu

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{\int \varepsilon_0 dF_b + n \int \varepsilon_0 dF_e}{F} \\ \frac{d\varphi_t}{ds} &= - \frac{\int \varepsilon_0 y dF_b + n \int \varepsilon_0 y dF_e}{J} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (33)$$

worin  $F = F_b + n F_e$  die Fläche und  $J = J_b + n J_e$  das Trägheitsmoment des sogen. ideellen Querschnittes bezeichnen. Wir vermerken nachstehend eine Reihe praktisch wichtiger Sonderfälle.

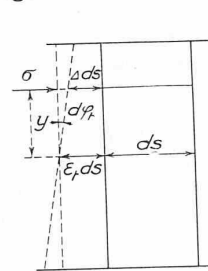


Abb. 7.

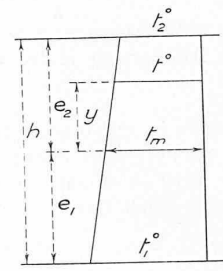


Abb. 8.

a) Gleichmässige Wärmeänderung um  $t^0$ .

Sie bedingt die konstante Dehnung  $\varepsilon_0 = \omega t^0$ , wo  $\omega$  den Wärmeausdehnungskoeffizienten bezeichnet, der für Beton und Eisen nahezu gleich gross ist ( $\omega = 0,00010$  bis  $0,00012$ ). Die Gleichungen (32) ergeben

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 = \omega t^0, \quad d\varphi_t = 0. \quad \dots \quad (34)$$

Aus Gl. (30) folgt überall  $\sigma = 0$ .

b) Ungleichmässige Wärmeänderung, verteilt nach dem linearen Gesetze

$$t^0 = \frac{t_1^0 (e_2 - y) + t_2^0 (e_1 + y)}{h}$$

wo  $t_1^0$  und  $t_2^0$  die Temperaturänderungen der Randfasern bezeichnen (vergl. Abb. 8). Es ist  $\varepsilon_0 = \omega t^0$  und nach den Gl. (32)

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{\omega \int E [t_1^0 (e_2 - y) + t_2^0 (e_1 + y)] dF}{h \int E dF} \\ &= \omega \frac{t_1^0 e_2 + t_2^0 e_1}{h} = \omega t_m^0, \quad \dots \quad (35) \end{aligned}$$

worin  $t_m^0$  die Temperaturänderung der Axe darstellt; ferner

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_t}{ds} &= - \frac{\omega \int E [t_1^0 (e_2 - y) + t_2^0 (e_1 + y)] y dF}{h \int E y^2 dF} \\ &= \omega \frac{t_1^0 - t_2^0}{h} \quad \dots \quad (36) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (30) folgt für die Spannung

$$\sigma = E \left[ \omega t^0 - \omega t_m^0 + \omega \frac{y}{h} (t_1^0 - t_2^0) \right] = 0.$$

Die Beziehungen (34) bis (36) finden sich, auf elementarem Wege einfacher abgeleitet, in den Lehrbüchern der Baustatik.

c) *Ungleichmässige Wärmeänderung* in einem symmetrisch armierten Rechteckquerschnitt, verteilt nach dem Parabelgesetz

$$t^0 = t_m^0 - 4 (t_m^0 - t_1^0) \frac{y^2}{h^2}.$$

Eine solche Verteilung (Abb. 9) kann näherungsweise bei der sog. abklingenden Temperaturverteilung vorausgesetzt werden, d. h. wenn durch einen plötzlichen Temperatursturz der umgebenden Luft die Wärme dem Gewölbe entweicht.

Der Symmetrie wegen wird  $d\varphi_t = 0$  und nach Gl. (32)

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \omega \int E \left[ t_m^0 - 4 (t_m^0 - t_1^0) \frac{y^2}{h^2} \right] dF \\ &= \omega \left[ t_m^0 - 4 (t_m^0 - t_1^0) \frac{J}{F h^2} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

ferner nach Gleichung (30)

$$\begin{aligned} \sigma &= E \omega \left[ t_m^0 - 4 (t_m^0 - t_1^0) \frac{y^2}{h^2} - t_m^0 + 4 (t_m^0 - t_1^0) \frac{J}{F h^2} \right] \\ &= 4 E \omega \frac{t_m^0 - t_1^0}{h^2} \left( \frac{J}{F} - y^2 \right). \end{aligned}$$

Für den rechteckigen Querschnitt ohne Armierung wird  $\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12}$ ; damit folgt

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3} \omega (2 t_m^0 + t_1^0) \quad (38)$$

Die Spannung in der Axe ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} E \omega (t_m^0 - t_1^0) \\ \text{am Rande} \\ \sigma_1 &= -\frac{2}{3} E \omega (t_m^0 - t_1^0) = -2 \sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Durch eine Armierung werden  $\varepsilon_t$  und  $\sigma_1$  verringert, doch ist die Aenderung leider unbedeutend. Man kann setzen

$$\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12} k,$$

wo  $k$  einen Koeffizienten darstellt, der mit dem Armierungsgehalt variiert und leicht zu berechnen ist; in praktischen Fällen wird  $k$  meist zwischen 1,0 und 1,2 liegen. Die Ableitung führt dann zu den folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{3} \omega [t_m^0 (3 - k) + t_1^0 k] \\ \sigma_m &= \frac{k}{3} E \omega (t_m^0 - t_1^0) \\ \sigma_1 &= \frac{k-3}{3} E \omega (t_m^0 - t_1^0) = \frac{k-3}{k} \sigma_m \end{aligned}$$

Die Spannung  $\sigma_1$  kann unter Umständen wesentliche Werte annehmen; z. B. ergibt Gl. (39) für  $t_m^0 - t_1^0 = 10^0$  und  $E = 200\,000 \text{ kg/cm}^2$  bereits etwa  $13 \text{ kg/cm}^2$  Zugspannung.

d) *Schwinden des Beton im Eisenbetongewölbe.*

Das spezifische Schwindmass des Beton sei mit  $\varepsilon_b$  bezeichnet. Dann ist in den Ausdrücken (33) für alle Betonfasern  $\varepsilon_0 = -\varepsilon_b$  zu setzen, für das Eisen dagegen  $\varepsilon_0 = 0$ . Wir erhalten somit

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= -\varepsilon_b \frac{F_b}{F}, \\ \frac{d\varphi_t}{ds} &= \varepsilon_b \frac{\int y dF_b}{J} = \varepsilon_b \frac{F_b e}{J}; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

darin bezeichnet  $e$  den Abstand des Schwerpunktes der Betonfläche  $F_b$  vom Schwerpunkt der ideellen Fläche  $F_b + n F_e$  (in Abb. 10 als positiv eingetragen).

Es entstehen im Beton und im Eisen sogen. Schwindspannungen, die sich aus Gl. (30) wie folgt anschreiben lassen. Im Beton ist im Abstände  $y_b$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= E_b \varepsilon_b F_b \left( \frac{1}{F} - \frac{1}{F_e} + \frac{e y_b}{J} \right) \\ \text{und im Eisen im Abstand } y_e \\ \sigma_e &= E_e \varepsilon_b F_b \left( \frac{1}{F} + \frac{e y_e}{J} \right) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

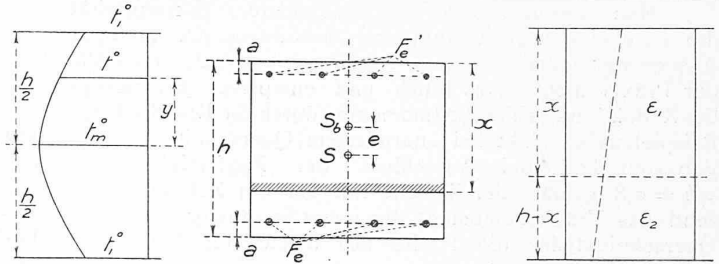


Abb. 9.

Abb. 10.

Abb. 11.

Wir berechnen nachstehend die Formänderungen für den rechteckigen Querschnitt mit doppelter Armierung nach Abb. 10, wobei wir eine Rissebildung ( $E = 0$ ) unterhalb der Strecke  $x$  voraussetzen. Da die Schwindspannungen in eingespannten Gewölben stets in Kombination mit den Beanspruchungen vom Eigengewicht und allfälligen andern Einflüssen auftreten, so wäre es zwecklos,  $x$  durch Auswertung der Gleichung (41) für  $\sigma_b = 0$  zu bestimmen; wir wählen deshalb  $x$  willkürlich und vergleichen die Resultate. Die Lage der Schweraxe der ideellen Fläche folgt aus

$$\begin{aligned} b x e - n F \left( h - \frac{x}{2} - a - e \right) + n' F_e' \left( \frac{x}{2} - a + e \right) &= 0 \\ \text{zu} \quad e &= \frac{n F_e' \left( h - \frac{x}{2} - a \right) - n' F_e' \left( \frac{x}{2} - a \right)}{b x + n F_e + n' F_e'} \end{aligned}$$

Die spezifische Längenänderung in der Axe beträgt

$$\varepsilon_t = -\varepsilon_b \frac{b x}{b x + n F_e + n' F_e'}$$

Setzen wir  $x = \xi h$ ,  $a = a \frac{h}{2}$ , und führen die Armierungsgehalte ein

$$\mu = \frac{F_e}{b h}, \quad \mu' = \frac{F_e'}{b h}$$

so folgt

$$e = \frac{n \mu (2 - \xi - a) - n' \mu' (\xi - a) \frac{h}{2}}{\xi + n \mu + n' \mu'} = k_1 \frac{h}{2}$$

und

$$\varepsilon_t = -\varepsilon_b \frac{\xi}{\xi + n \mu + n' \mu'} = -\varepsilon_b k \quad (42)$$

Für das Trägheitsmoment  $J$  ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \frac{b x^3}{12} + b x e^2 + n F_e \left( h - \frac{x}{2} - a - e \right)^2 + n' F_e' \left( \frac{x}{2} - a + e \right)^2 \\ &= \frac{b h^3}{12} [\xi^3 + 3 k_1^2 \xi + 3 n \mu (2 - \xi - a - k_1)^2 + 3 n' \mu' (\xi - a + k_1)^2] \\ &= \frac{b h^3}{12} k_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Formänderungswinkel

$$\frac{d\varphi_t}{ds} = \varepsilon_b \frac{F_b e}{J} = \varepsilon_b \frac{b x k_1 \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} k_2} = \varepsilon_b \frac{6 \xi k_1}{h k_2} = \varepsilon_b \frac{k'}{h} \quad (43)$$

Die Faktoren  $k$  und  $k'$  sind für verschiedene Armierungsgehalte und Rissebildungen  $\xi$  in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle der Werte  $k$  und  $k'$  in Gl. (42) und (43), berechnet mit  $n = n' = 10$  und  $a = 0,1$ .

$\mu =$	0,2 %		0,5 %		1,0 %		2,0 %	
	$k$	$k'$	$k$	$k'$	$k$	$k'$	$k$	$k'$
$\xi =$								
$\mu' = 0$	0,98	0,10	0,95	0,23	0,91	0,40	0,83	0,64
	0,9	0,15	0,95	0,33	0,90	0,54	0,82	0,80
	0,8	0,98	0,22	0,94	0,45	0,89	0,70	0,80
$\mu' = \frac{\mu}{2}$	0,97	0,05	0,93	0,11	0,87	0,17	0,77	0,24
	0,9	0,97	0,09	0,92	0,18	0,86	0,28	0,75
	0,8	0,96	0,14	0,91	0,28	0,84	0,41	0,73
$\mu' = \mu$	0,96	0,00	0,91	0,00	0,83	0,00	0,71	0,00
	0,9	0,96	0,03	0,90	0,06	0,82	0,08	0,69
	0,8	0,95	0,07	0,89	0,14	0,80	0,19	0,12

AUS DEM „BURGENBUCH VON GRAUBÜNDEN“, VON ERWIN POESCHEL.



Abb. 1. Fracstein, Burgpfaffenhaus (Seewis).

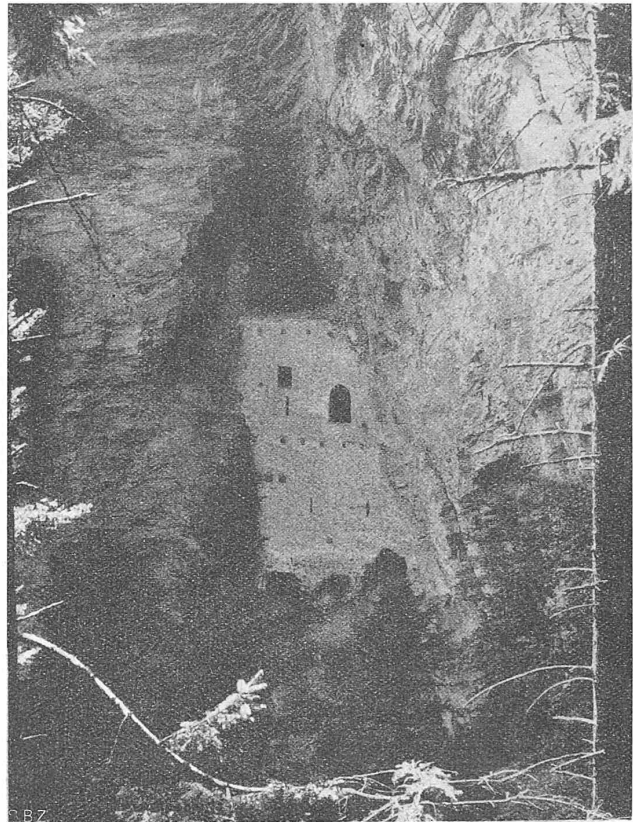


Abb. 2. Rappenstein am Calanda (Untervaz).

Man erkennt, wie die Formänderungen mit wachsendem Armierungsgehalt zunehmen; der Formänderungswinkel ist auch wesentlich abhängig von  $\mu'/\mu$ , sowie von der Rissebildung. Der Vergleich der Gleichungen (42) und (43) mit den Ausdrücken (35) und (36) lehrt, dass die Formänderungen durch das Schwinden identisch sind mit den Formänderungen aus ungleichmässiger, linear veränderlicher Wärmeänderung, wenn

$$t_m^0 = -\frac{\epsilon_h}{\omega} k \text{ und } t_1^0 - t_2^0 = \frac{\epsilon_b}{\omega} k' \quad \dots \quad (44)$$

e) *Ungleiches Schwinden im Betongewölbe ohne Armierung.*

Das Betongewölbe rechteckigen Querschnitts bestehe aus einer Schicht von der Höhe  $x$  mit dem spezifischen Schwindmass  $\epsilon_1$  und einer zweiten Schicht von der Höhe  $h - x$  mit einem andern Schwindmass  $\epsilon_2$  (vergl. Abb. 11). Die Formänderungen ergeben sich aus den Gleichungen (32), wenn darin  $E$  konstant gesetzt wird, zu

$$\epsilon_t = \frac{\int \epsilon_0 dF}{\int dF} = -\frac{\epsilon_1 b x + \epsilon_2 b (h - x)}{b h} = -[\epsilon_1 \xi + \epsilon_2 (1 - \xi)], \text{ wo } \xi = \frac{x}{h} \quad (45)$$

$$\frac{d\varphi_t}{ds} = -\frac{\int \epsilon_0 y dF}{\int y^2 dF} = \frac{\epsilon_1 b x \frac{h-x}{2} - \epsilon_2 b (h-x) \frac{x}{2}}{\frac{b h^3}{12}} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{6 \xi (1 - \xi)}{h} \quad \dots \quad (46)$$

Der Formänderungswinkel wird am grössten für  $\xi = \frac{1}{2}$ ; hierfür wird

$$\epsilon_t = -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \quad \frac{d\varphi_t}{ds} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{3}{2h}$$

Der Fall verschiedener Schwindmasse kommt vor bei Gewölben, die in Ringen oder Schichten erstellt werden. Es entstehen unter Umständen dadurch wesentliche Verformungen, bei denen bei geeigneter Bauweise zur Reduktion der Schwindkräfte  $H$  und  $M$  Gebrauch gemacht werden kann, wie weiterhin noch gezeigt wird.

Die Formänderungen nach Gleichung (45) und (46) sind nicht spannungsfrei; man findet vielmehr aus Gl. (30)

$$\sigma = E_b \left[ -\epsilon_b - \epsilon_t + y \frac{d\varphi_t}{ds} \right] = E_b \left[ -\epsilon_b + \epsilon_1 \xi + \epsilon_2 (1 - \xi) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{6 \xi (1 - \xi)}{h} y \right]$$

Die Randspannungen folgen daraus zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E_b (\epsilon_1 - \epsilon_2) (1 - \xi) (3 \xi - 1) \\ \sigma_2 &= E_b (\epsilon_1 - \epsilon_2) \xi (3 \xi - 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (47)$$

Für  $\xi = \frac{1}{2}$  wird

$$\sigma_1 = E_b \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{4} = -\sigma_2 \quad \text{(Schluss folgt.)}$$

### Was soll uns ein „Burgenbuch“?

(Hierzu Tafeln 4 bis 7, nach dem „Bündner Burgenbuch“).

In einem der Tagebücher, die im Nachlass Hugo von Hofmannsthal gefunden wurden, steht der Satz: „Die Verzweiflung einer Epoche würde sich darin aussprechen, wenn es ihr nicht mehr der Mühe wert erschiene, sich mit der Vergangenheit zu beschäftigen.“ Dies klingt anders, als was wir zuweilen zu hören bekommen über die Liebe zur Geschichte. Sie wird hier nicht in den Verdacht gebracht, ein narkotisches Vergnügen zu sein, ein Hang, aus den Forderungen der Gegenwart zu desertieren, um in eine unverbindliche Traumwelt hinüberzuschlafen, sondern es wird in ihr die Ermutigung gefunden, das Heute überhaupt zu bestehen, in unserm Treiben mehr zu sehen als nur eine am Rande eines sinnlos brodelnden Geschehens aufsteigende Blase. Gerade wer stark in der Gegenwart steht, braucht sich vor dem Blick in die Vergangenheit nicht zu scheuen; er sieht sie nicht als ein verlorenes Arkadien, sondern als einen Teil des gleichen Lebens, in das wir verflochten sind, das, wie wir, für seine Ideen,