

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 95/96 (1930)
Heft: 13

Artikel: Eine Aufgabe aus der Hydraulik
Autor: Solomon, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44060>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Eine Aufgabe aus der Hydraulik. — Vom Rhein-Kraftwerk Ryburg-Schwörstadt. — Von der II. Weltkraft-Konferenz, Berlin 1930. — Wettbewerb für eine Synagoge nebst Verwaltungsgebäude und Schule der Israelitischen Cultusgemeinde Zürich. — Mitteilungen: Ausschachten von Automobilen. Internationaler Kongress

beratender Ingenieure in Wien. Das Dornier-Flugschiff Do. X. Staubtechnische Begriffsbestimmungen. — Wettbewerbe: Schulhaus Klosters. — Literatur: Praktischer Eisenbetonbau. Eingegangene Werke.

Band 96

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

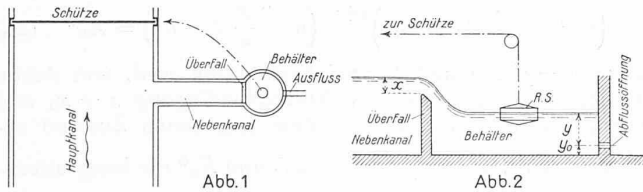
Nr. 13

Eine Aufgabe aus der Hydraulik.

Von Dipl. Masch.-Ing. W. SOLOMON.

Vorwort. Bei sich selbst regulierenden Stauschützen kommt es manchmal vor, dass, aus äusserlich nicht erklärlchen Gründen, periodische Schwingungen auftreten, die ein richtiges Funktionieren der Schütze unmöglich machen. Man hat festgestellt, dass bei grundsätzlich gleicher Konstruktion der Schütze und ihrer Bedienungsapparate die Schütze an einem Orte richtig funktionierte, aber an einem andern mit etwas veränderten Verhältnissen ganz versagte. Die rechnerische Verfolgung der beim Funktionieren einer solchen automatischen Schütze auftretenden Bewegungsvorgänge führt auf ein System von simultanen Differentialgleichungen, wobei sich zeigt, dass deren Auflösung nur vermittels Annäherungsmethoden in sehr mühsamer und zeitraubender Weise möglich erscheint. Da jedoch, besonders in der Praxis, die Zeit für solche langwierigen Rechnungen meistens fehlt, unterlässt man eben den Versuch, zu einer theoretischen Lösung dieses Problems zu gelangen und behilft sich lieber mit systematischer Empirie, wobei ein gewisses Misstrauen gegen rein theoretische Ueberlegungen auch noch eine gewisse Rolle spielt. Es ist dies übrigens ein Vorgang, den wir heute in der technischen Praxis noch oft feststellen können. Da jedoch solche Versuche, und besonders im vorliegenden Falle, nicht nur zeitraubend, sondern auch kostspielig sind, hätte es doch einen grossen praktischen Wert, wenn es gelänge, eine theoretische Lösung des Problems in geschlossener Form zu finden, die dann wenigstens qualitativ wegleitend sein könnte. Dies bewog mich, einen mathematisch besonders gut veranlagten Absolventen unserer E. T. H. hinter das Problem zu „hetzen“, und es gelang ihm tatsächlich, eine Lösung zu finden, wie die nachstehenden Ausführungen zeigen.

Prof. R. Dubs.



Durch eine gerade Rinne oder einen Kanal fliesse eine vorläufig konstante Wassermenge Q m³/sec. Die Wasserspiegelhöhe im Kanal soll durch eine am Ende des Kanals eingebaute Schütze (vergl. Abb. 1) automatisch auf möglichst konstanter Höhe gehalten werden. Vor der Regulierschütze ist in einem Nebenkanal ein Ueberfall mit oder ohne Seitenkontraktion eingebaut, über den das Wasser aus dem Kanal in einen Behälter mit konstantem Horizontalquerschnitt F fliesst. In diesem Behälter befindet sich ein Schwimmer, der als Steuerorgan für die Regulierschütze dient. Der Behälter giesst durch eine Rohrleitung, deren Mittellinie y_0 über der Kammer sohle liegt, in das Unterwasser aus.

Nach einer gewissen Zeit wird das zufließende Wasser die obere Kante des Ueberfalles erreichen und von nun an in den Behälter fließen. Die Ueberfallhöhe x wächst von Null bis zu der dem Durchfluss Q und den Ueberfalldimensionen für Beharrung entsprechende Ueberfallhöhe x_{stat} an. Die Grösse x ist Funktion der Zeit t und aus den praktischen Verhältnissen zu ermitteln:

$$x = \varphi(t) \dots \dots \dots (I)$$

Im Behälter wird zur Zeit $t = t_0$ und für $x = x_0$ das Wasser auf der Höhe der Abflussöffnung sein und entsprechend die sekundliche Abflussmenge

$$Q_y = \mu_i f \sqrt{2g y} \dots \dots \dots (2)$$

aus dem Behälter weiter fließen, wenn $\mu_i =$ Abflusskoeffizient, $f =$ Oeffnungsfläche und $y =$ Wasserhöhe über die Oeffnung (nach oben positiv gerechnet). Für Beharrungszustand ist y leicht aus:

$$\sqrt[2]{3} \mu b x_{stat} \sqrt{2g x_{stat}} = \mu_i f \sqrt{2g y_{stat}} \dots \dots \dots (3)$$

oder:

$$\sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(x_{stat} + \frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] = \mu_i f \sqrt{2g y_{stat}} \dots \dots \dots (3^*)$$

zu bestimmen, je nachdem die Zuflussgeschwindigkeit c_0 vernachlässigbar ist oder nicht.

Unsere Aufgabe ist, bei gegebenem x -Verlauf in Funktion von der Zeit, den y -Verlauf zu bestimmen, sodass wir für bestimmte Verhältnisse des Gerinnes im Stände sind, die zeitlich veränderliche Niveau-Erhebung im Behälter zu bestimmen. Der Schwimmer macht die Bewegung des Wasserniveau mit. Man ersieht hieraus, dass die Kenntnis der Bewegung des Wassers im Behälter für die Regulierung der Anlage sehr wichtig ist.

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$F dy = \left\{ \sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(x + \frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] - \mu_i f \sqrt{2g y}^{1/2} \right\} dt \dots \dots \dots (4)$$

worin μ und b die Konstanten des Ueberfalles bedeuten. Im Falle wo $c_0 \approx 0$ (vernachlässigbar) geht die Gleichung über in:

$$F dy = \left(\sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} x^{3/2} - \mu_i f \sqrt{2g y}^{1/2} \right) dt \dots \dots \dots (4^*)$$

Zur Gl. (4) gehört noch die oben angeschriebene Gl. (1). Die Gl. (4) ist gültig für $t \geq t_0$ und $x \geq x_0$. Für t im Intervall 0 bis t_0 gilt:

$$F dy = \sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(x + \frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] dt \dots \dots \dots (5)$$

oder mit (1) indem man integriert:

$$F \cdot Y = \sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} \int_{t=0}^{t=t} \left[\left(\varphi(t) + \frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{c_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] dt \dots \dots \dots (6)$$

wo $Y = Y_0 - y$; also für $t = t_0$, $Y = Y_0$.

Wie man sieht, ist bis $t = t_0$, theoretisch wenigstens, die Aufgabe einfach, d. h. so weit die Integration durchführbar ist. Nach (6) kann man für $Y = Y_0$ $t = t_0$ bekommen.

Die Gl. (4) ist aber bedeutend komplizierter. Man setze:

$$\sqrt[2]{3} \mu b \sqrt{2g} = -2A; \quad \sqrt[2]{3} \mu b \frac{\sqrt{2g} c_0^2}{2g} = 2C$$

und $\mu_i f \sqrt{2g} = 2B$
wo: $A < 0$, $B > 0$, $C > 0$, sind,

$$\left(x + \frac{c_0^2}{2g} \right)^{1/2} = z \dots \dots \dots (7)$$

als Variable annimmt und $z = \psi(t) \dots \dots \dots (7^*)$

$$\text{setzt, so folgt aus Gl. (4)} \quad \frac{dy}{dt} + 2A(\psi(t))^3 + 2B y^{1/2} + 2C = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Diese Gleichung ist nun zu integrieren.

Durch die Substitution:

$$y = u^2 \dots \dots \dots (9)$$

geht Gl. (8) über in:

$$u du + [A(\psi(t))^3 + C + B u] dt = 0 \dots \dots \dots (10)$$

¹⁾ $x_0 \approx 0$ und $t = t_0 = 0$, wenn im Behälter Wasser bis zur Abflussöffnung schon vorhanden ist.

wie Gl. (10), ist aber ein Spezialfall der bekannten Euler'schen Differentialgleichung erster Ordnung;

u du + [P(t) + Q(t)u] dt = 0 . . . (11)

da Q(t) = B = konstant ist.

Bei einer beliebigen psi(t)-Funktion ist die Gl.(10) im allgemeinen nicht elementar integrierbar. Unsere Aufgabe besteht daher darin, eine einfache psi-Funktion zu bestimmen, für die Gl. (10) eine elementare Lösung besitzt. Man kann dann jede wirkliche psi(t)-Funktion stückweise durch diese einfache Funktion näherungsweise ersetzen. In manchen Fällen wird sich diese Methode — eine spezielle Differentialgleichung durch eine allgemeinere zu ersetzen, um aus dieser eine elementar integrierbare Gleichung zu bekommen — als erfolgreich erweisen. Es haben sich mit der Gl. (11) Euler, Abel (s. Oeuvres complètes, t. II, pages 26 et suiv.), Korkine (s. Mathematische Annalen, Bd. 48, S. 317 und ff.) beschäftigt.

1. Die Abelsche Methode, die auf der Suche nach Multiplikatoren der Form e^r(u, t) beruht, gelangt zu bestimmten P- und Q-Funktionen. Setzen wir mit ihm (s. Abel S. 30):

r = alpha(t) + alpha_1(t)u + alpha_2(t)u^2 + . . . + alpha_n(t)u^n

Darin ist n > 0 eine ganze Zahl und alpha_i(t) sind unbekannte Funktionen, die aber aus folgenden (n + 2) Gleichungen der Identität:

d(e^r u) / dt = d [e^r (A [psi(t)]^3 + C + B u)] / du . . . (12)

u (dr/dt) - [A [psi(t)]^3 + C + B u] (du/dr) - B = 0

bestimmt werden können.

Man bekommt eine Bedingungsgleichung (da alpha_i nur n + 1 Funktionen sind), die die psi_2(t)-Funktion für jedes n bestimmt. Es zeigt sich, wie eine nähere Untersuchung erweist, dass:

für n = 1, psi(t) eine Konstante sein muss;

für n = 2, A [psi(t)]^3 + C = -1 / (2 c (t - t_1)) . . . (13)

Für n > 2 stellt sich psi ganz verwickelt aus oder gar nicht explizit darstellbar; man stösst auf Integralgleichungen, die eventuell nur für Mathematiker von Interesse sein könnten. Ich habe den Fall n = 2 näher untersucht; die Definitionsgleichung (13) von psi(t) enthält die Konstanten c und t_1, wo c > 0, da psi(t) eine mit t zunehmende Funktion sein muss.

Der Exponent r des Multiplikators wird:

r = alpha(t) + alpha_1(t)u + alpha_2(t)u^2

mit:

alpha_2 = c, alpha_1 = 2 c B (t - t_1) und alpha = c B^2 (t - t_1)^2 - ln(t - t_1)

oder: e^r = 1 / (t - t_1) e^{c(t + u - t_1)^2} . . . (14)

für die Differentialgleichung:

u du + (1 / (2 c (t - t_1)) + B u) dt = 0 . . . (10*)

Mit dem Multiplikator (14) gelangt man zu der Lösung

int u c e^{c(t + u - t_1)^2} / (t - t_1) du + f(t) = 0 . . . (15)

wo f(t) eine noch zu bestimmende Funktion ist.

Das Integral von (15) ist nicht elementar, es führt zum Integral:

int e^{c v^2} dv . . . (16)

das für c = -1 die Gauss'sche Fehlerfunktion darstellt; für c > 0, unser Fall, kann man Gl. (16) in einer Reihe entwickeln. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass die Methode des Multiplikatoren von der Form:

e^r(u, t) = e^{alpha(t) + alpha_1(t)u + alpha_2(t)u^2 + . . . + alpha_n(t)u^n}

nur dann anzuwenden ist, wenn psi(t) von der Form (13) ist, denn eine einmalige Reihenentwicklung des Integrals (16) ist nicht so mühsam.

1a. In der selben Abel'schen Abhandlung befindet sich ein Multiplikator e^r, wo:

r = a ln(alpha + beta u) . . . (17)

bezw. a = a(t) und beta = beta(t) und auf die Funktion

psi = sqrt[3]{(alpha + 1/a^2) B^2 (t - t_1) + C} - 1/A . . . (18)

führt, wo a und t_1 Konstanten sind; oder für x:

x = [(alpha + 1/a^2) B^2 (t - t_1) + C]^{2/3} - c_0^2 / (2g) . . . (19)

Von den zwei Konstanten a und t_1 wird die eine aus der Anfangsbedingung x = x_0 und t = t_0 bestimmt, die andere wird dem gegebenen Zustand angepasst. Aus Gl. (19) geht hervor, dass x mit ~ t^{2/3} zunimmt; man wird immer die Kurve x = phi(t) durch Stücken der Kurven der Familie Gl. (19) ersetzen können.

Der Multiplikator wird:

e^r = ((alpha + 1/a) B (t - t_1) + u)^a . . . (20)

sein und die Differentialgleichung (10) wird mit (18) in:

u du - ((alpha + 1/a^2) B^2 (t - t_1) - B u) dt = 0 . . . (21)

übergehen. Diese Gleichung mittels des Multiplikators (20) integriert gibt:

int u ((alpha + 1/a) B (t - t_1) + u)^a du + f_1(t) = 0 . . . (22)

wo im Integral t als Konstante anzusehen ist und f_1(t) eine noch zu bestimmende Funktion von t darstellt. Gl. (22) ausgewertet ergibt:

(u + (alpha + 1/a) B (t - t_1))^{a+2} / (a + 2) - (alpha + 1/a) B (t - t_1) (u + (alpha + 1/a) B (t - t_1))^{a+1} / (a + 1) + f_1(t) = 0 . . . (23)

Andererseits kann die Lösung der Gl. (21) auch wie folgt geschrieben werden¹⁾:

int B ((alpha + 1/a^2) B (t - t_1) - u) ((alpha + 1/a) B (t - t_1) + u)^a dt + f_2(u) = 0 . . . (24)

(u + (alpha + 1/a) B (t - t_1))^{a+2} / ((a + 1)(a + 2)) - u (u + (alpha + 1/a) B (t - t_1))^{a+1} / ((a + 1)^2) + f_2(u) = 0 . . . (25)

Gl. (23) muss aber mit Gl. (25) identisch sein, also auch für u = 0; es folgt dass:

f_1(t) = Konst. = K_0

und die Lösung nimmt die folgende brauchbare Form an:

(u + (alpha + 1/a) B (t - t_1))^{a+1} (u - B/a (t - t_1)) = K_0^* . . . (26)

wo: u = y^{1/2}, a und t_1 zwei Konstanten sind, von denen wiederum die eine aus der Anfangsbedingung x = x_0 und t = t_0 bestimmt, die andere dem gegebenen Zustand angepasst wird, ferner mu_i = sqrt[2g] / F = 2 B und K_0^* die Integrationskonstante.

2. Die Korkine'sche Methode führt merkwürdigerweise auf die selben Gleichungen (18), (19) und auf die Lösung (26). Sie besteht nach dem Suchen von Lösungen der Form:

[u - v_1(t)]^{m_1} [u - v_2(t)]^{m_2} . . . [u - v_n(t)]^{m_n} = K_0 . . . (27)

wo K_0 = Konstante, m_i = Konstanten sind.

Setzt man in Gl. (10)

- B t = T . . . (28)

so erhält man:

u du + {A [psi(-T/B)]^3 + C + B u} (-dT/B) = 0

und weiter

du/dT = 1 + (A [psi(-T/B)]^3 + C) / (B u) . . . (29)

1) dv = (dv/dx) dx + (dv/dt) dt = 0; int (dv/dx) dx + int (dv/dt) dt = Konst.

Um zu beweisen, dass f_1(t) = Konst. ist, kann man Gl. (23) nach (t) ableiten und man muss auf (dv/dt) kommen; (eine Konstante spielt keine Rolle); es folgt wie oben f_1(t) = Konst.

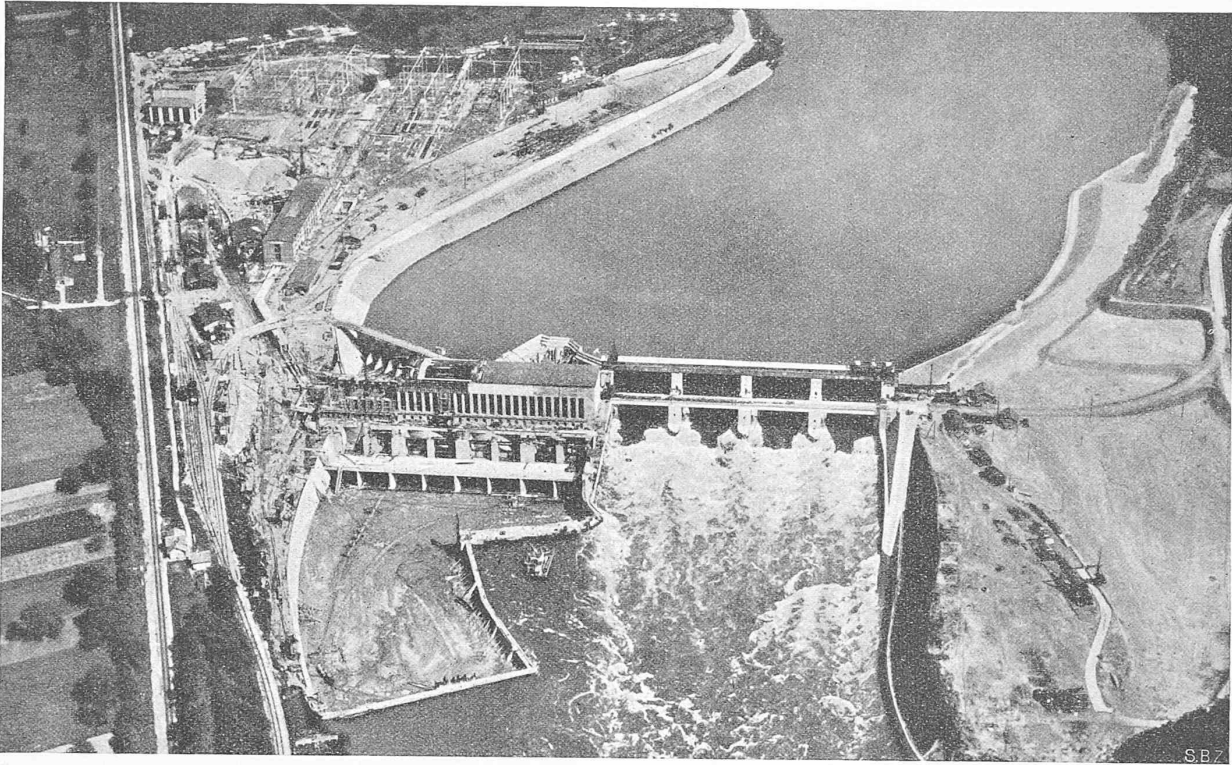


Abb. 5. Fliiegerbild aus Westen auf die Gesamtanlage des Kraftwerkes Ryburg-Schwörstadt im Bauzustand Ende Mai 1930.

Es stellt sich heraus, dass für $n = 2$ (zwei Faktoren in Gl. 27) die ψ Funktion folgende Form hat:

$$\psi(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{A} \left(\frac{M_1}{(M_1 - 1)^2} B^2 (t - t_1) + C \right)} \quad (30)$$

wo $M_1 = \frac{m_1}{m_2}$ ist.

Gl. (30) ist aber identisch mit Gl. (18), es genügt

$$M_1 = a + 1$$

zu setzen, damit die Integrationen sich decken. Bezüglich näherer Einzelheiten verweise ich auf die Korkine'sche Abhandlung in den „Math. Annalen“.

Die Lösung ist:

$$\left(u + \frac{B M_1}{(M_1 - 1)} (t - t_1) \right)^{M_1} \left(u - \frac{B}{(M_1 - 1)} (t - t_1) \right) = K_0^* \quad (31)$$

wobei Gl. (26) = Gl. (31).

In Gl. (31) ist $u = \sqrt[3]{y}$

Folgende Verifikation beweist, dass Gl. (31) aus der Differentialgleichung:

$$u \, du - \left(\frac{M_1}{(M_1 - 1)^2} B^2 (t - t_1) - B u \right) dt = 0 \quad (32)$$

abgeleitet ist. Es genügt, Gl. (31) zu differenzieren um:

$$\begin{aligned} & \left[M_1 \left(u + \frac{B M_1}{M_1 - 1} (t - t_1) \right)^{M_1 - 1} \left(u - \frac{B}{M_1 - 1} (t - t_1) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(u + \frac{B M_1}{M_1 - 1} (t - t_1) \right)^{M_1} \right] du \\ & + \left[\frac{M_1^2 B}{M_1 - 1} \left(u + \frac{B M_1}{M_1 - 1} (t - t_1) \right)^{M_1 - 1} \left(u - \frac{B}{M_1 - 1} (t - t_1) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{B}{M_1 - 1} \left(u + \frac{B M_1}{M_1 - 1} (t - t_1) \right)^{M_1} \right] dt = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

zu bekommen, was reduziert auf Gl. (32) zurückführt.

Man kann nun M_1 den Grenzbedingungen anpassen.

$$x = \left[-\frac{1}{A} \left(\frac{M_1}{(M_1 - 1)^2} B^2 (t - t_1) + C \right) \right]^{2/3} - \frac{c_0^2}{2g} \quad (34)$$

Man kann auch stückweise die Gl. (34) der Kurve $x = \varphi(t)$ anpassen, und für jedes findet man nach Gl. (31) ($u = \sqrt[3]{y}$), die y -Verläufe für $t = t_i$ bis $t = t_{i+1}$.

PS. Was die mathematische Genauigkeit anbetrifft, dürfte sie nur bei Gl. (10*) in der Nähe von $t = t_1$ nicht streng gewahrt sein; eine nähere Untersuchung entfernt uns jedoch vom Gebiet der Ingenieurwissenschaften.

Vom Rhein-Kraftwerk Ryburg-Schwörstadt.

Anschliessend an unsere bisherige Berichterstattung über den Bau dieses Kraftwerkes in Band 92, Seite 181 (13. Oktober 1928) geben wir auf dieser und den folgenden Seiten einige Bilder über den Bauzustand in den Monaten April und Mai dieses Jahres. Der derzeitige Stand der Bauarbeiten (Mitte September 1930) entspricht, soweit er die Maschinengruppen 1 und 2 betrifft, genau dem in Abb. 14 auf S. 184 von Bd. 92 dargestellten Bauprogramm; für die Maschinengruppen 3 und 4 wird sich noch eine Zeiteinsparung gegenüber dem ursprünglichen Programm ergeben, indem die Betriebsbereitschaft aller vier Gruppen schon auf Mitte 1931 statt erst auf den Herbst gleichen Jahres erwartet werden kann. Zur Zeit sind die beidseitigen Uferkorrekturen, sowie das Stauwehr fertiggestellt, die Wehrschützen und Windwerke bereits im Betrieb. Das Maschinenhaus ist im Bereich der Gruppen 1 und 2 vollständig, im Bereich der Gruppen 3 und 4 im Rohbau vollendet. Maschinengruppe 1 ist betriebsbereit, Maschinengruppe 2 in Bälde ebensoweit, die Turbinen der Gruppen 3 und 4 in voller Montage. Am 10. September 1930 hat der Aufstau des Rheines begonnen, am 15. September ist Gruppe 1 zum ersten Male im Leerlauf probiert worden. Die Aufnahme des Betriebes der Gruppe 1 wird Mitte Oktober d. J. erfolgen können.

Von der II. Weltkraft-Konferenz, Berlin 1930.

(Fortsetzung von Seite 149.)

SEKTION 18. BAU VON GROSS-GENERATOREN UND TRANSFORMATOREN UND ANDEREN ELEKTRISCHEN MASCHINEN.

Die durch das Anwachsen der Leitungsnetze bedingten bedeutenden Vergrösserungen der Drehstromgeneratoren-Maschineneinheiten hat zu erheblichen Raum- und Gewichtsersparnissen geführt. So betrug z. B. für einen *Drehstrom-Synchrongenerator* von 16 000 kW die erforderliche Grundfläche 17 bis 18 m² pro 1000 kW, das Gewicht 18,5 kg/kW, während bei einem Aggregat von 80 000 kW die bezüglichen Werte nur 5,5 m²/1000 kW, bzw. 13 kg/kW sind. Die Einheitsgewichte für *Drehstromsynchron-Generatoren* allein betragen für zweipolige Maschinen mit Gussgehäuse und