

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 97/98 (1931)  
**Heft:** 26

## Inhaltsverzeichnis

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. — Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Herrn. Fietz †. — Elektrisch geschweisster Blechträger. — Neuartige Fundation beim Bau der Brücke über den Kleinen Belf. — Vom gegenwärtigen Stand der Arbeitsphysiologie. — Mitteilungen: Dampfturbinen von 75 000 PS 3000 Uml/min für Paris. Automobile für die Durchquerung der Wüste

Sahara. Der Flugverkehr der italienischen Linien. Schweizer. Bundesrat. Schweizer. Bundesbahnen. Kraftwerk Wägital. Eidgen. Kunstkommission. Stadtpräsident von Lausanne. — Wettbewerbe: Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Dieser Nummer ist das Inhalt-Verzeichnis des mit heute schliessenden Bandes 98 beigelegt.

Band 98

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 26

Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion.<sup>1)</sup>

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Fortsetzung von Seite 290.)

5. Integration der totalen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik mit einem Freiheitsgrad und einer unabhängigen Veränderlichen führen auf totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die daher im Mittelpunkt des Interesses stehen. Solche Gleichungen geben eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion, ihren ersten Ableitungen und dem Argument, sind also von der Form

R(u, p, p', p'') = 0 . . . . . (4)

Wenn eine Gleichung nur von der ersten Ordnung vorliegt, oder, wie es gerade in der Mechanik oft vorkommt, wenn sich ein Integral dieser Gleichung angeben lässt (Energie-Integral), so hat man es zu tun mit einer Relation von der Form

R<sub>1</sub>(u, p, p') = 0 . . . . . (5)

Wenn man diese Relation nach u differentiirt, so geht sie in eine solche von der Form (4) über, sodass wir uns auf diese letzte beschränken können. Man löse sie nach p'' auf:

p'' = f(u, p, p').

Es ist dann auch

q = p + p' = F(u, p, p') . . . . . (6)

ein bekannter Ausdruck in den Grössen u, p und p'. In gewissen einfachen Fällen werden auf der rechten Seite nicht alle drei Argumente auftreten; wenn z. B. ein Integral (5) bekannt ist, kann immer eine der drei Grössen eliminiert werden. Dann vereinfacht sich die Lösung.

Statt die Funktion p(u) zu finden, die der Gleichung (4) bzw. (6) genügt, stellen wir uns jetzt die gleichwertige Aufgabe, ihr Linienbild C zu konstruieren. Dabei hat man sich für die Lösung bestimmte Anfangsbedingungen vorgeschrieben zu denken, etwa

p(0) = p<sub>0</sub> p'(0) = p'<sub>0</sub> . . . . . (7)

Die Differentialgleichung (6) gibt nun für jede Stelle P<sub>u</sub> des Linienbildes C den zugehörigen Krümmungsradius q<sub>u</sub>. In infinitesimaler Nähe von P<sub>u</sub> kann C ersetzt werden durch den dreipunktig berührenden Krümmungskreis vom Zentrum P'<sub>u</sub> und dem Halbmesser P<sub>u</sub>P'<sub>u</sub> = p<sub>u</sub> (Abb. 5 auf Seite 289). Mit Annäherung kann dieser Ersatz auch auf ein endliches Bogenstück ausgedehnt werden, und zwar umso genauer, je kleiner der dazu gehörige Zentriwinkel α ist. Unsere Annäherungsmethode besteht darin, die Kurve C durch solche kleine oskulierende Kreisbogenstücke zu ersetzen.

Man beginnt die Konstruktion bei dem durch (7) gegebenen Punkte P<sub>0</sub>, indem man die Punkte Q<sub>0</sub>, P<sub>0</sub>, Q'<sub>0</sub> aufträgt, sodass OQ<sub>0</sub> = p<sub>0</sub>, Q<sub>0</sub>P<sub>0</sub> = p'<sub>0</sub> = OQ'<sub>0</sub> wird (Abb. 8). Die Differentialgleichung (6) gibt jetzt den Krümmungsradius q<sub>0</sub> = P<sub>0</sub>P'<sub>0</sub> = F(0, p<sub>0</sub>, p'<sub>0</sub>), welche Strecke von P<sub>0</sub> aus auf der Normalen g'<sub>0</sub> bis P'<sub>0</sub> abgetragen wird. Wenn q<sub>0</sub> positiv ist, geht das Auftragen von P<sub>0</sub> aus in positivem Sinn, dem Pfeilsinn von g'<sub>0</sub>, im entgegengesetzten Sinn aber, wenn q<sub>0</sub> negativ ist. Es ist jetzt P'<sub>0</sub> der Krümmungsmittelpunkt von C in P<sub>0</sub>. Man wählt nun, je nach der verlangten Genauigkeit, einen kleinen Winkel α<sub>1</sub> und schlägt um P'<sub>0</sub> den Kreisbogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub> mit diesem Zentriwinkel und dem Halbmesser q<sub>0</sub>. Dieser in P<sub>0</sub> oskulierende Bogen wird näherungsweise als das erste Stück des Linienbildes C betrachtet. Es können jetzt für P<sub>1</sub> die entspre-

chenden Punkte Q<sub>1</sub>, Q'<sub>1</sub> gezeichnet und damit die Werte p<sub>1</sub> = p(a<sub>1</sub>) = OQ<sub>1</sub> = P<sub>1</sub>Q'<sub>1</sub> und p'<sub>1</sub> = p'(a<sub>1</sub>) = OQ'<sub>1</sub> aus der Zeichnung entnommen werden. Sie sind natürlich nur angenähert richtig, werden aber bei kleinem α<sub>1</sub> genügend genau, insbesondere wenn der Krümmungsradius im Intervall 0 bis a<sub>1</sub> nicht stark schwankt. Mit diesen Werten berechnet man jetzt den Krümmungsradius q<sub>1</sub> in P<sub>1</sub>, der durch den Wert

q<sub>1</sub> = F(a<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, p'<sub>1</sub>)

gegeben ist, und wiederholt nun die für P<sub>0</sub> beschriebene Konstruktion an P<sub>1</sub>, indem man P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>' = q<sub>1</sub> macht und um P<sub>1</sub>' durch P<sub>1</sub> wieder einen kleinen Kreisbogen P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> von beliebigem aber kleinem Zentriwinkel α<sub>2</sub> schlägt, der ein weiteres Bogenstück von C approximiert. Wenn nicht wegen starker Schwankung der Krümmung ein kleinerer Wert als α<sub>1</sub> angemessen ist, wird man zweckmässig α<sub>2</sub> = α<sub>1</sub> = α setzen, also mit gleichen Intervallen arbeiten. So fährt man weiter und erhält für C die Folge von Kreisbogenstücken P<sub>0</sub> P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> . . .

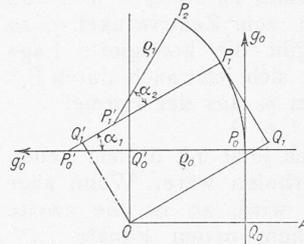


Abb. 8

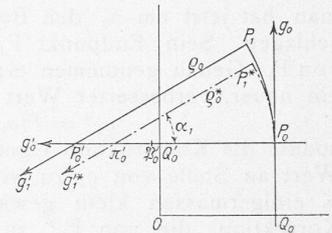


Abb. 9

Es ist klar, dass dieser Konstruktion ein Nachteil anhaftet, der aber in der Natur der Sache liegt. Jeder Punkt P<sub>i</sub> wird aus dem vorhergehenden P<sub>i-1</sub> konstruiert und in der Lage von P<sub>i-1</sub> enthaltene Ungenauigkeit überträgt sich daher auf P<sub>i</sub>. Im ungünstigsten Fall hat man daher eine Häufung der Fehler mit wachsender Zahl von Kreisbogenintervallen zu erwarten. Diese Häufung macht sich praktisch ganz besonders für die p' Werte bemerkbar.

Die Interpolation.

Man kann das besprochene Verfahren wesentlich verbessern, indem man eine einfache Interpolation hinzufügt. Da der Krümmungsradius q sich mit u im allgemeinen ändert, hat der ersetzende Kreisbogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub> nur im Anfangspunkt P<sub>0</sub> den durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen richtigen Radius; für den Radius im Endpunkte P<sub>1</sub> würde die Differentialgleichung einen andern Wert, nämlich

q<sub>1</sub> = F(a<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, p'<sub>1</sub>) . . . . . (8)

ergeben. Man wird im allgemeinen eine bessere Annäherung an den wahren Mittelwert erzielen, wenn dem Kreisbogen nachträglich statt mit q<sub>0</sub> mit dem arithmetischen Mittel q\* = (p<sub>0</sub> + p<sub>1</sub>)/2 geschlagen wird. Dieser neue Bogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub>\* hat als Endpunkt einen Punkt P<sub>1</sub>\*, der etwas verschieden von P<sub>1</sub> sein wird. Demgemäss ergeben sich an Stelle von p<sub>1</sub> und p'<sub>1</sub> neue, korrigierte Werte p<sub>1</sub>\* und p'<sub>1</sub>\*, wobei sich zeigt, dass die Korrektur in p' viel beträchtlicher ist, als in p.

Praktisch ist die neue Konstruktion folgendermassen auszuführen (Abb. 9):

Nachdem P<sub>1</sub> wie früher konstruiert und q<sub>1</sub> aus Formel (8) gefunden worden ist, trage man von P<sub>0</sub> aus auf der Normalen P<sub>0</sub>Q'<sub>0</sub> bis nach P'<sub>0</sub>' die Länge q<sub>1</sub> ab, und

<sup>1)</sup> Diese Artikelfolge wird als Sonderdruck erscheinen. Red.