

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 13

Artikel: Einige geometrische und kinematische Anwendungen der Stützfunktion
Autor: Meissner, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45469>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Einige geometrische und kinematische Anwendungen der Stützfunktion. — Eigenheim des Architekten Prof. O. R. Salvisberg, Zürich. — Mitteilungen: Die Personen-Seilschwebbahn Chamonix-Brévent. Die bauliche Entwicklung der Stadt Paris. Kreiselwipper für 200 t/h. „Budd-Micheline“. Die Kohle- und

Koks-Transportanlagen in der neuen Gaskokerei Basel. Internationale Kongresse für Neues Bauen. Der im Fluge verstellbare Propeller. — Wettbewerbe: Schulhausanlage an der Tannenrauchstrasse in Zürich-Wollishofen. — Literatur: Tragwerk und Raumabschluss. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 13

Einige geometrische und kinematische Anwendungen der Stützfunktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Anschliessend an die Artikelserie über graphische Analysis¹⁾ sollen noch einige Untersuchungen angedeutet werden, in denen mit Vorteil von der Stützfunktion einer Kurve Gebrauch gemacht wird. Der Kürze wegen beschränken wir uns auf konvexe, einfach geschlossene Kurven, sog. *Ovale*. Der Krümmungsradius ρ ist dann eine periodische nicht negative Funktion von u mit der Periode 2π . Er braucht nicht stetig zu sein, vielmehr wollen wir nur annehmen, dass er sich in eine Fourier-Reihe entwickeln lässt, die wir in der Form

$$\rho(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku)]$$

annehmen. Ist s wieder die Bogenlänge auf C und sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes P der Tangente $g(u)$, so gelten die Formeln von Seite 42 $ds = \rho(u) du$ $dx = -\rho(u) \sin(u)$ $dy = \rho(u) \cos(u)$ Da C eine einfach geschlossene Kurve ist, so ist ferner

$$\int_c dx = -\int_0^{2\pi} \rho(u) \sin(u) du = 0 \quad \int_c dy = \int_0^{2\pi} \rho(u) \cos(u) du = 0$$

$$\int_c ds = \int_0^{2\pi} \rho(u) du = L$$

unter L die Gesamtlänge des Ovals verstanden. Dies gibt für die Fourierreihe

$$b_1 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_0 \pi = L$$

Multipliziert man die Reihe andererseits mit $\cos(u)$ und $\sin(u)$ und integriert, so ergeben sich die Formeln

$$x = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{a_{k+1} - a_{k-1}}{2k} \cos(ku) - \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2k} \sin(ku) \right)$$

$$y = \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_{k+1} + b_{k-1}}{2k} \cos(ku) + \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2k} \sin(ku) \right)$$

Für die hier auftretenden Integrationskonstanten ξ, η ergibt sich durch Integrieren über das Intervall 0 bis 2π :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \left(\frac{1}{\rho} \right) ds$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \left(\frac{1}{\rho} \right) ds$$

Somit sind ξ, η die Koordinaten des Schwerpunktes der Kurve C , wenn man sie sich mit Masse belegt denkt, die an jeder Stelle der Kurvenkrümmung $1/\rho$ proportional ist; in allfälligen Ecken sind endlich grosse Massen proportional dem Eckenwinkel anzunehmen. Dieser von J. Steiner erstmals eingeführte Punkt heisst der *Krümmungsschwerpunkt* S^* der Kurve C . Wenn man nun noch die Beziehungen

$$p = x \cos(u) + y \sin(u) \quad p' = -x \sin(u) + y \cos(u)$$

mit den erhaltenen Reihen für x und y kombiniert, so kommt für die Stützfunktion nach einiger Umrechnung die Reihe

$$p(u) = \frac{a_0}{2} + \xi \cos(u) + \eta \sin(u) - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k^2 - 1} \cos(ku) + \frac{b_k}{k^2 - 1} \sin(ku) \right)$$

und für ihre Ableitung

$$p'(u) = -\xi \sin(u) + \eta \cos(u) - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k b_k}{k^2 - 1} \cos(ku) - \frac{k a_k}{k^2 - 1} \sin(ku) \right)$$

Ist ds die Länge eines in P liegenden Linienelementes PP^* von C (Abb. 43), so ist $1/2 p ds = 1/2 p \rho du$ der Flächeninhalt des Elementardreiecks OPP^* und somit ist der Flächeninhalt J des Ovals gegeben durch

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho(u) p(u) du$$

was in der Fourierreentwicklung ausgedrückt ergibt

$$J = \frac{a_0^2 \pi}{4} - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 - 1}$$

*A. Hurwitz*²⁾, von dem im wesentlichen diese letzten Formeln stammen, hat daran anknüpfend den Beweis für das sog. isoperimetrische Problem erbracht. In der Tat zeigt der Ausdruck für J , das unter allen hier betrachteten Ovalen von der selben Bogenlänge, also dem selben a_0 dasjenige den grössten Flächeninhalt besitzt, für das alle übrigen Fourierkoeffizienten verschwinden, d. h. der Kreis vom Durchmesser a_0 .

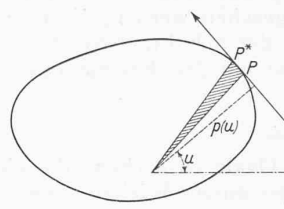


Abb. 43

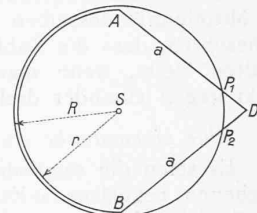


Abb. 44

Aus dem Ausdruck für $p(u)$ kann eine merkwürdige Folgerung gezogen werden. Man denke sich zwei Ovale O_1 und O_2 mit den Stützfunktionen p_1 und p_2 . Wenn sie gleichen Umfang L haben, so ist der Fourierkoeffizient a_0 in den Reihenentwicklungen von p_1 und p_2 der selbe. Man vereinige die Ovale nun irgendwie, aber so, dass ihre Krümmungsschwerpunkte S_1^* und S_2^* zusammenfallen. Alsdann stimmen auch noch die Fourierkoeffizienten von $\cos(u)$ und von $\sin(u)$ in beiden Reihenentwicklungen überein. Die Funktion $p(u) = p_1(u) - p_2(u)$ hat daher eine Fourierreentwicklung, deren niedrigste Glieder jene von $\cos(2u)$ und $\sin(2u)$ sind. Wendet man hierauf einen ebenfalls auf *Hurwitz*²⁾ zurückgehenden Satz an, dass eine solche Funktion, wenn sie stetig ist, im Intervall von 0 bis 2π mindestens 4 mal gleich null wird, so folgt, dass die beiden so zusammengelegten Ovale wenigstens vier gemeinsame Tangenten haben, und hieraus wieder folgt, dass sie sich in wenigstens vier Punkten schneiden. Es gilt sonach der Satz: *Haben zwei Ovale gleicher Länge die Krümmungsschwerpunkte gemein, so schneiden sie sich in wenigstens vier Punkten.*

Der Inhalt dieses Satzes wird besonders hervorgehoben, wenn man feststellt, dass er nicht mehr wahr ist, wenn man an Stelle des Krümmungsschwerpunktes S^* den gewöhnlichen Schwerpunkt S setzt. Dies zeigt folgendes Beispiel: Eine Kurve C_1 (Abb. 44) bestehe aus einem Halbkreis vom Radius r und Zentrum S und zwei gleichlangen Strecken AD, BD von der Länge a . Man wähle a so, dass der Schwerpunkt von C_1 nach S fällt.

$$\left(a = \frac{r}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{17}} \right)$$

¹⁾ Vergl. Band 98, S. 287 ff.; Band 99, S. 27 ff. Auch als Sonderabdruck erhältlich. Red.

²⁾ *A. Hurwitz*: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'Ecole normale T. XIX (1902) page 371 ff.

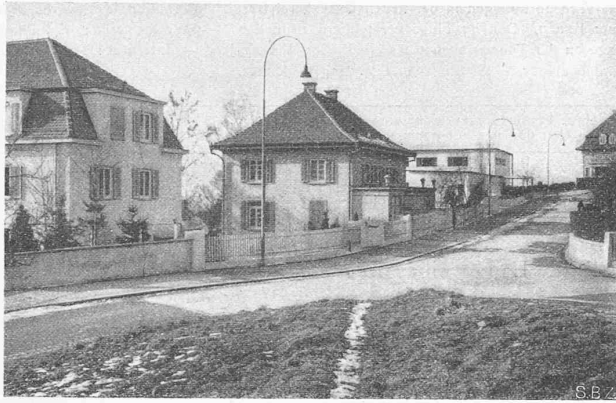


Abb. 1. Die Restelbergstrasse (aufwärts gesehen) mit Nachbarhäusern.



Abb. 2. Nordwestfassade des Hauses Salvberg (umgekehrt wie Abb. 1).

Ist R der Halbmesser des Kreises C_2 der selben Länge wie C_1 und vom Mittelpunkt S , so ergibt sich

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2\pi} = 1,0093 > 1$$

C_2 schneidet C_1 also nur in zwei Punkten P_1 und P_2 auf AD bzw. BD . Will man geradlinige Ränder und Ecken bei C_1 vermeiden, so ersetze man AD und BD durch genügend flache Kreisbogen und runde die Ecken fein, etwa durch kleine Kreise ab.

In einem bessern Sinne als der Schwerpunkt kann somit der Krümmungsschwerpunkt eines Ovals als eine Art Mittelpunkt desselben angesehen werden. Es ist noch zu beachten, dass die Zahl 4 der Schnittpunkte der Ovale erhalten bleibt, wenn man sie um den Krümmungsmittelpunkt gegen einander dreht.

Eine kinematische Aufgabe.

Es seien die sämtlichen Ovale zu suchen, die einem gegebenen regulären n -Eck so einbeschrieben sind, dass sie alle Vieleckeiten berühren und die (unter Aufrechterhaltung aller Berührungsstellen) sich noch mit einem Freiheitsgrad im Vieleck bewegen lassen.

Dieser Forderung wird genügt, wenn alle dem Oval umschriebenen gleichwinkligen n -Ecken auch regulär sind, und dies ist auch eine notwendige Bedingung.

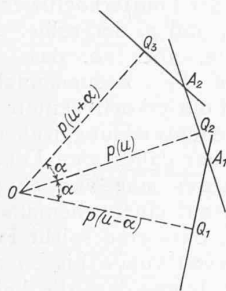


Abb. 45

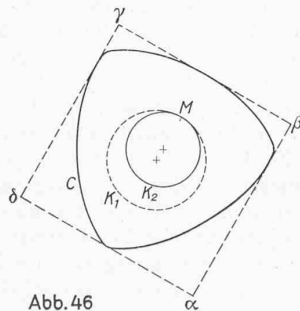


Abb. 46

Ist $\alpha = 2\pi/n$ so sind $g(u - \alpha)$, $g(u)$ und $g(u + \alpha)$ drei aufeinander folgende Seiten eines solchen Polygons. Die in $g(u)$ liegende Polygonseite hat die Länge

$$s = \frac{1}{\sin(\alpha)} [p(u + \alpha) + p(u - \alpha) - 2 p(u) \cos(\alpha)]$$

da sie sich (Abb. 45) aus den Strecken A_1Q_2 und A_2Q_2 zusammensetzt, für die sich ergibt

$$A_1Q_2 \sin(\alpha) = p(u - \alpha) - p(u) \cos(\alpha)$$

$$A_2Q_2 \sin(\alpha) = p(u + \alpha) - p(u) \cos(\alpha)$$

Führt man nun die Fourier-Entwicklung für $p(u)$ ein, so wird

$$s = a_0 \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 [\cos(k\alpha) - \cos(\alpha)]}{k^2 - 1} [a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku)]$$

s ist im allgemeinen eine Funktion von u . Unserer Forderung wird dann und nur dann genügt, wenn s konstant

wird, wenn also die sämtlichen in der Reihe für s auftretenden Fourier-Koeffizienten mit Ausnahme des ersten verschwinden. Es können also von den Grössen a_k und b_k nur diejenigen von null verschieden bleiben, für die $\cos(k\alpha) - \cos(\alpha) = 0$

wird. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn k durch n geteilt den Rest $+1$ oder -1 lässt; k hat die Form $(gn \pm 1)$ wo g eine ganze Zahl ist und es wird

$$p(u) = \frac{a_0}{2} + \xi \cos(u) + \eta \sin(u) -$$

$$\sum_{g=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{gn \pm 1}}{(gn \pm 1)^2 - 1} \cos[(gn \pm 1)u] + \frac{b_{gn \pm 1}}{(gn \pm 1)^2 - 1} \sin[(gn \pm 1)u] \right\}$$

Dieser Ausdruck, in dem die verbleibenden Koeffizienten ganz beliebige Werte haben können, erfüllt die für p erhaltene Funktionalgleichung und gibt ihre allgemeine Lösung. Die Forderung, dass es sich um ein Oval handeln soll, schränkt den Bereich der a_k und b_k -Werte noch ein.⁸⁾

Beispiele.

Die Fälle $n = 2$ und $n = 4$ sind identisch. Die Koeffizienten mit geradem Index müssen verschwinden. Man erhält die Kurven konstanter Breite a_0 . Sie haben bei gleicher Breite auch gleichen Umfang und sie lassen sich noch zwangsläufig im Innern eines Quadrates bewegen.

Abb. 46 zeigt z. B. die Kurve, für die

$$p(u) = 1 + \frac{1}{8} \cos(3u)$$

$$q(u) = 1 - \cos(u).$$

Sie ist in dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ mit einem Freiheitsgrad beweglich. Und zwar sind die zwei Polbahnen der Bewegung die dort angegebenen Kreise K_1 und K_2 .

Der Fall $n = 3$ ist in Abb. 47 dargestellt, die die durch

$$p(u) = 1 + \frac{1}{3} \cos(2u) \quad q(u) = 1 - \cos(2u)$$

gegebene Kurve wiedergibt. Wieder sind beide Polbahnen der Bewegung Kreise, die feste ist der dem gleichseitigen umschriebenen Dreieck einbeschriebene.⁴⁾

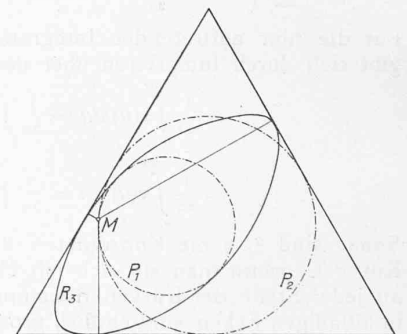


Abb. 47

⁸⁾ Die Reihe für $q(u)$ darf keine negativen Werte annehmen. Die Bedingung dafür bei C. Carathéodory: Math. Ann. Bd. 64 (1907) S. 95 ff.

⁴⁾ Näheres siehe „Ueber die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik“, in der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 54 (1909).

Ausdehnungen dieses und analoger Probleme findet man in den Aufsätzen des Verfassers: „Ueber Punktmengen konstanter Breite“. Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich. Jahrg. 56 (1911) S. 42.

„Ueber die durch reguläre Polyeder nicht stützbaren Körper“ die selbe Zeitschrift Jahrg. 63 (1918) S. 544.

„Ueber positive Darstellungen von Polynomen“. Math. Ann. 70, S. 244.