Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103/104 (1934)
Heft: 2

Inhaltsverzeichnis

Band 103 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 2**

Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, South Philadelphia Works, Philadelphia, Pa.

Der nachstehende Artikel bringt zwei neue Scheibenprofile mit den zugehörigen Spannungsverteilungen, gekennzeichnet durch Einfachheit der erforderlichen Rechenarbeit.

1. Einleitung. Obwohl die Anzahl der bisher bekannten und in der Praxis allgemein benutzten teils graphischen, teils analytischen Verfahren zur Festigkeitsberechnung und Konstruktion von Dampfturbinen-Laufradscheiben nicht gering ist, sieht man sich durch Erwägungen mannigfacher Natur häufig doch gezwungen, nach neuen Lösungen zu forschen. Ausschlaggebend ist hierbei die Forderung, die sonst umständlichen Rechnungsarbeiten möglichst auf ein Minimum zu reduzieren und zu normalisieren, d. h. auf wenige elementare Operationen mit ein für allemal berechneten Normal-Zahlentabellen zurückzuführen. Im Nachstehenden werden zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe entwickelt, die der genannten Forderung in hohem Masse genügen. Beide Verfahren sind mit vergleichenden Beispielen belegt.

2. Die analytische Form des Problems. Das Problem der rotierenden Scheibe in der von A. Stodola herrührenden Näherungsgestalt ist verschiedener Darstellungsformen fähig.[1]) Einige von ihnen sollen sogleich aufgeführt werden.

Zunächst mögen die Bezeichnungen gelten: r = Radius, y = halbe Scheibendicke, u = Radialverschiebung, σ_r = Radialspannung, σ_t = Tangentialspannung, ν = Poissonsche Konstante, E = Elastizitätsmodul, μ = spezifische Masse, ω = Winkelgeschwindigkeit.

Dann hat man als erste Darstellungsform des Problems das Differentialsystem

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+\left(\frac{3}{r}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}\right)\frac{d\sigma_r}{dr}+\left[\frac{2+\nu}{y}\frac{dy}{dr}+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}\right)\right]\frac{\sigma_r}{\gamma}+(3+\nu)\,\mu\omega^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{d\,(r\,y\,\sigma_r)}{dr}-y\,\sigma_t+\mu\omega^2 r^2 y=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Eine äquivalente Form ergibt sich, wenn man die Spannungen durch die Radialverschiebung vermöge der Gleichungen

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right),\qquad \sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right) \quad . \quad (3)$$

ausdrückt. Durch Einsetzen in (2) folgt dann nämlich

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{\nu}{y}\frac{dy}{dr}-\frac{1}{r}\right)\frac{u}{r}+\frac{\mu\omega^2(1-\nu^2)}{E}r=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Eine dritte Darstellungsart ergibt sich, wenn man Gl. (2) mit der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{d\sigma_t}{dr}-\nu\frac{d\sigma_r}{dr}=(1+\nu)\frac{\sigma_r-\sigma_t}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

kombiniert. Führt man dann eine gewisse Funktion S durch die Beziehungen

$$y\,\sigma_r=\frac{S}{r},\qquad y\,\sigma_t=\frac{dS}{dr}+\mu\omega^2 y\,r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ein, so ist Gl. (2) identisch erfüllt, während Gl. (5) die Form

$$\frac{d^2S}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}\right)\frac{dS}{dr}+\left(\frac{\nu}{y}\frac{dy}{dr}-\frac{1}{r}\right)\frac{S}{r}+(3+\nu)\,\mu\omega^2 y\,r=0 \quad . \quad . \quad (7)$$

annimmt.[2])

[1]) Siehe A. Stodola, Dampf- und Gas-Turbinen, 5. u. 6. Auflage, Abschnitte 74 und 181.

[2]) Siehe z. B. A. Föppl, Vorl. über Techn. Mech. Bd. V.

Die Gleichungssysteme (3) und (4) einerseits und (6) und (7) andererseits mögen nun folgender Behandlung unterworfen werden:

Die variablen Koeffizienten der Grundgleichung in einer der Formen (4) oder (7) sind von der zu ermittelnden Funktion (σ_r bezw. S) frei. Gesetzt, diese Koeffizienten seien dnrch eine Beziehung miteinander verknüpft, die eine Integrabilitätsbedingung der in Frage stehenden Differentialgleichung (4) bzw. (7) ist. Da die Koeffizienten nun, wie gesagt, von der zu ermittelnden Funktion frei sind, so ist die Integrabilitätsbedingung nichts anderes als eine Definitionsgleichung für y. Lässt sich diese integrieren, so hat man eine Lösung des Problems.

Diese Methode erweist sich als die Quelle zweier wichtiger Berechnungsverfahren, die nachstehend entwickelt werden.

3. Das Erste Exponentialprofil. Eine Integrabilitätsbedingung der bezeichneten Art ergibt sich unter Benutzung der folgenden elementaren Integrationsmethode von linearen Differentialgleichungen.[3])

Greifen wir zunächst Gl. (4) ins Auge, so mögen folgende abkürzende Bezeichnungen gelten. Es seien P_2, P_1, P_0, P die Koeffizienten von $d^2u:dr^2$, $du:dr$, u und des von u und dessen Ableitungen freien Gliedes der Differentialgleichung (4):

$$P_2=1;\quad P_1=\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}+\frac{1}{r};\quad P_0=\left(\frac{\nu}{y}\frac{dy}{dr}-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r};$$

$$P=\frac{\mu\omega^2(1-\nu^2)}{E}r.$$

Wird nun die Gleichung (4) nach den Regeln der partiellen Integration gliedweise integriert, so folgt

$$\int P dr+\int(P_0-P_1'+P_2'')\,u dr+(P_1-P_2')\,u+P_2\,u'=0$$

worin $P_1'=dP_1:dr$, usw. Somit ist die Ordnungszahl der Gl. (4) um die Einheit erniedrigt, falls $P_0-P_1'+P_2''=0$, oder

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}\right)=\frac{\nu}{r}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}\right)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Profilfunktion y. Die Lösung lautet

$$y=\alpha\,e^{-\beta r^{1+\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

worin α und $-\beta$ die beiden Integrationskonstanten sind. Für diese Profilkurve nimmt die ursprüngliche Differentialgleichung (4) die Gestalt

$$P_2\,u'+(P_1-P_2')\,u+\int P dr=0$$

oder

$$\frac{du}{dr}+\frac{1-(1+\nu)\beta r^{1+\nu}}{r}u+\frac{\mu\omega^2(1-\nu^2)}{2E}r^2=C$$

an, wenn man mit C eine willkürliche Integrationskonstante bezeichnet.

Betrachtet man nun die reduzierte Gleichung

$$\frac{du}{dr}+\frac{1-(1+\nu)\beta r^{1+\nu}}{r}u-C=0$$

und setzt für den Augenblick $C=0$, so findet man eines der zwei Integrale der reduzierten Gleichung (4). Dieses erste Integral lässt sich leicht ermitteln zu

$$D\frac{e^{-\beta r^{1+\nu}}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

worin D wiederum eine Integrationskonstante ist.

Das partikuläre Integral, das dem Gliede mit ω^2 in der ursprünglichen Differentialgleichung entspricht, ergibt sich jetzt durch Variation der Konstanten D im Integral (9). Dieses partikuläre Integral erscheint in endlicher Form,

[3]) Siehe A. Forsyth, Differentialgleichungen, Braunschweig, 1912, p. 101.