

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103/104 (1934)
Heft: 4

Artikel: Ueber eine nicht -harmonische Schwingung
Autor: Meissner, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83246>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber eine nicht-harmonische Schwingung. — Der Studio-Neubau des „Radio-Zürich“. — Fernsehen mit Kathodenstrahlen. — Mitteilungen: Der Grossfunksender Berlin. Drahtlose Kurzwellen-Verbindung über die Meerenge von Calais. Der Schweizerische Wasserwirtschaftsverband. „Goudron fillerisè“. Die Reklame

an der Landstrasse. Deselektische Motorwagenzüge in Holland. Die Bauten für die Weltausstellung in Brüssel 1935. Wasserbaulaboratorium in Leningrad. Das Corsotheater in Zürich. — Nekrologe: Emil Usteri-Faesi. — Literatur: Schiess- und Sprengstoffe. Eingegangene Werke.

Band 104

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Verbandsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 4

Ueber eine nicht-harmonische Schwingung.

Von Prof. Dr. ERNST MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Unter dem Titel: „Ueber einige Methoden der Nicht-Linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz“ ist kürzlich hier¹⁾ eine Arbeit von Kryloff und Bogoliuboff erschienen, die sich u. a. mit der näherungsweise Lösung einer Differentialgleichung befasst, wie sie bei Schwingungen mit nicht-linearem Elastizitätsgesetz auftritt.

In den nachfolgenden Zeilen will ich zeigen, dass die von mir entwickelte graphische Integrationstheorie²⁾ sich sehr gut eignet, die Lösung herzustellen, zu überblicken und Näherungsausdrücke dafür anzugeben.

1. Die Eigenschwingungen.

Es handelt sich darum, die Funktion $x(t)$ zu bestimmen aus der Beziehung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + P(x) = 0$$

wo $P(x)$ ein nicht lineares Kraftgesetz nach Art der Abb. 1 ist. Man hat also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = \begin{cases} -h & \text{wenn } x > 0 \\ +h & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Durch

$$u = nt$$

wird ein neues Zeitmass eingeführt, und es werden Ableitungen nach u mit Strichen bezeichnet. Es geht $x(t)$ in eine Funktion $p(u)$ über, und man hat

$$\begin{aligned} p'' + p &= -\frac{h}{n^2} = -\delta & \text{wenn } p > 0 \\ p'' + p &= +\delta & \text{wenn } p < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Es gilt jetzt, das Linienbild dieser Funktion zu konstruieren. Aber $p'' + p = \rho$ bedeutet gerade dessen Krümmungsradius. Die Beziehungen (1) sagen also einfach aus, dass dieser streckenweise konstant ist und jedesmal sein Vorzeichen wechselt, wenn p durch Null geht, d. h. wenn vom Anfangspunkt O aus eine Tangente an das Linienbild gezogen werden kann. Dem entsprechend setzt es sich aus einer Reihe von Kreisbögen vom Halbmesser δ zusammen und wird folgendermassen konstruiert:

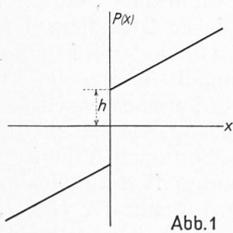


Abb. 1

1) SBZ, Band 103, S. 255* und 267* (Nr. 22, 23 vom 2. und 9. Juni 1934).

2) SBZ, Band 62, Nr. 15 und 16 (11./18. Oktober 1913); Bd. 84, Nr. 23 und 24 (6./13. Dez. 1924); Bd. 98, Nr. 23 und 26 (5./26. Dezember 1931); Bd. 99, Nr. 3, 4 und 13 (16./23. Januar und 26. März 1932), (auch im Sonderdruck erschienen).

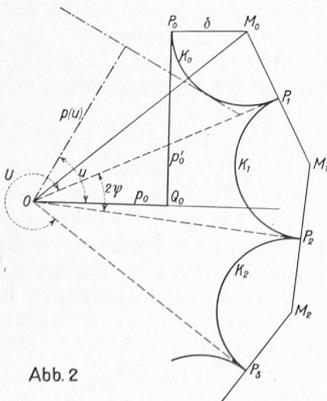


Abb. 2

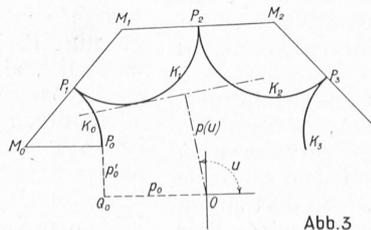


Abb. 3

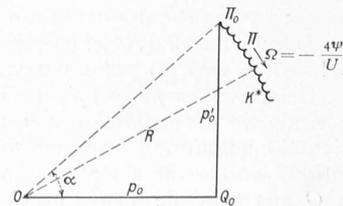


Abb. 4

Für $u = 0$ seien p_0 und p'_0 die vorgeschriebenen Anfangswerte. Dadurch ist (Abb. 2) der Anfangspunkt P_0 des Linienbildes bestimmt ($OQ_0 = p_0$; $Q_0P_0 = p'_0$). Unter der Annahme $p > 0$ ist jetzt der Krümmungsradius $\rho = -\delta$ und der Kreis K_0 mit M_0 als Zentrum ist zunächst Linienbild und zwar bis zur Tangente OP_1 von O aus, wo $p = 0$ wird. Hier wechselt mit p auch ρ das Vorzeichen, und wir erhalten als Fortsetzung den Kreis K_1 mit M_1 als Mittelpunkt ($P_1M_1 = \delta$). Dieser gilt, bis p zum zweiten Male gleich null wird (in P_2), worauf der Krümmungsradius wieder sein Vorzeichen wechselt und so fort.

Das Linienbild besteht also aus den Kreisbögen $P_0P_1P_2P_3$. Demnach ist für alle Anfangsbedingungen die Lösung periodisch, und die Periode U ist die Ergänzung zu 2π vom Doppelten des Winkels 2ψ , unter dem der Bogen P_1P_2 von O aus gesehen wird. Die Periode ist demnach von der Lage von O zum Diagramm, d. h. von den Anfangsbedingungen abhängig.

Man hat

$$\begin{aligned} \psi &= \arcsin \frac{P_1M_0}{OM_0} = \arcsin \frac{\delta}{\sqrt{(p_0 + \delta)^2 + p_0'^2}} = \\ &= \arcsin \frac{h}{\sqrt{(p_0 n^2 + h)^2 + n^4 p_0'^2}}, \quad U = 2\pi - 4\psi \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad U = 4 \arcsin \frac{\delta}{\sqrt{(p_0 + \delta)^2 + p_0'^2}}$$

Für $p_0 = A$; $p'_0 = 0$ folgt der im erwähnten Aufsatz angegebene Wert. Da der Winkel 2ψ der zwei von O ausgehenden Kreistangenten kleiner als π ist, so ist

$$0 < 4\psi < 2\pi, \text{ ebenso } 0 < U < 2\pi \text{ und } n < \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Die Abb. 3 zeigt, wie das Linienbild im Fall $p_0 < 0$ aussieht. Der erste der Kreisbögen ist nach der entgegengesetzten Seite offen. Zu bemerken bleibt, dass für die anfängliche Ruhelage ($p_0 = 0$; $p'_0 = 0$) die Lösung nicht definiert ist, wie es der Unbestimmtheit der Restitutionskraft für diesen Fall entspricht (Abb. 1).

2. Die Näherungslösung.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Grösse δ klein ist gegen den Ausdruck $\sqrt{p_0^2 + p_0'^2}$. Wir haben es alsdann mit heftigen Schwingungen zu tun. Das Linienbild hat jetzt die Form eines fein gezähnten Kreises (Abb. 4). Man kann die Makrostruktur des Integrals erfassen, wenn man jeden der kleinen Zähne durch einen mittleren Punkt II ersetzt, vorausgesetzt, dass man die Werte von u auf ein Intervall der Grösse U beschränkt. Für das nächstfolgende Intervall U wäre alsdann der Punkt II um zwei Zähne nach rückwärts zu verlegen. Es ist deshalb möglich, die Näherungslösung auf jeden Wert von u auszudehnen. Man hat nur den Punkt II auf dem Kreise K^* von Zahn zu Zahn gleichförmig rückwärts laufen zu lassen, und zwar muss

er sich während der Zeit U um zwei Zähne verschieben, sein Fahrstrahl OII muss demnach die Winkelgeschwindigkeit $-\frac{4\psi}{U}$ besitzen.

Die Anfangslage II_0 von II muss irgendwo auf der Strecke $P_0 M_0$, z. B. in ihrer Mitte, gewählt werden. Sind R und α ihre Polarkoordinaten, so ist

$$\sqrt{p_0^2 + p_0'^2} < R < \sqrt{(p_0 + \delta)^2 + p_0'^2}.$$

Nach Ablauf der Zeit u sind die Koordinaten von II

$$\xi = R \cos\left(\alpha - \frac{4\psi}{U} u\right),$$

$$\eta = R \sin\left(\alpha - \frac{4\psi}{U} u\right)$$

Die Stützfunktion p^* , die p annäherungsweise ersetzt, wird

$$p^* = \xi \cos u + \eta \sin u = R \cos\left(\alpha - \frac{4\psi + U}{U} u\right) = R \cos\left(\frac{2\pi}{U} u - \alpha\right).$$

Trotzdem die Annäherung bis zur Grössenordnung δ geht, zeigt die Näherungslösung, die sozusagen einer unendlich feinen Zähnung entspricht, einen andern Charakter. Ihr Linienbild ist geglättet, die Feinstruktur abgeschliffen, unsichtbar geworden. Die geglättete Lösung ist rein harmonisch und ihre Periode ist $U < 2\pi$. Es liegt hier der Fall vor, den Kryloff und Bogoliuboff als den *quasi-linearen* bezeichnen.

3. Die erzwungene Schwingung.

Auf das bisher betrachtete System wirke jetzt noch eine periodische Störung $K(u)$. Ihre Periode sei Ω .

$$K(u + \Omega) \equiv K(u)$$

Die erzwungene Schwingung genügt dann der Beziehung

$$p''(u) + p(u) = \begin{cases} -\delta + K(u) & \text{wenn } p > 0 \\ +\delta + K(u) & \text{wenn } p < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Die Konstruktion ihres Linienbildes geschieht mittels zweier Hilfskurven C_1 und C_2 .

Wir zeichnen zuerst den Bogen S_1 , der der Lösung von

$$p_1 = p_1'' + p_1 = -\delta + K(u) \quad 0 \leq u \leq \Omega$$

bei beliebigen Anfangsbedingungen entspricht. C_1 entsteht dann durch wiederholtes Aneinanderreihen kongruenter Bögen S_1 so, dass eine stetige Kurve mit stetiger Tangente herauskommt. Man hat dazu S_1 um einen gewissen Punkt schrittweise zu drehen um die Winkel $\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$

Analog bilde man die Kurve C_2 aus Bögen S_2 , die der Gleichung

$$p_2 = p_2'' + p_2 = +\delta + K(u)$$

entsprechen. Wenn $\Omega/2\pi$ irrational ist, so setzen sich C_1 und C_2 aus unendlich vielen Bögen zusammen. Ist dagegen

$$\Omega/2\pi = \frac{p}{q}$$

(p und q ganze Zahlen),

so schliessen sich die Kurven C_1 und C_2 nach p Umläufen, und sie bestehen aus q Bögen S . Dieser Fall ist der Abb. 5 zugrunde gelegt ($p = 1, q = 3$). Für die praktische Verwendung schneidet man die Kurven zweckmässig aus Pappe und markiert an den Randpunkten die zugehörigen Werte von u .

Durch Parallelverschieben der C -Kurven kann jetzt das Integral von (2) gefunden werden.

Seien wieder p_0 und p_0' die Anfangswerte der Lösung. Sie sind die Koordinaten des Punktes P_0 , in dem das Linienbild beginnt. Dieses ist zunächst mit der Kurve C_1 identisch und zwar bis zum Punkte P_1 , in dem die erste von O ausgehende Tangente C_1 berührt. Von dort an gilt nun die Kurve C_2 , die so parallel verschoben wird, dass

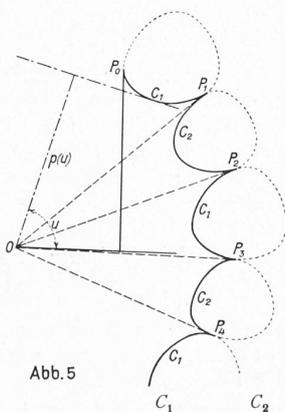


Abb. 5

$0 \leq u < \frac{\pi}{6}$	$q = -a$	$q = 3a$
$\frac{\pi}{6} \leq u < \frac{\pi}{3}$	$q = -2a$	$q = 2a$
$\frac{\pi}{3} \leq u < \frac{2\pi}{3}$	$q = -3a$	$q = a$
	$\Omega = \frac{2\pi}{3}$	$\delta = 2a$

die beiden zusammenfallenden Punkte von C_1 und C_2 zu den selben u -Werten gehören. C_2 gilt jetzt wieder bis zu derjenigen Stelle, in der die nächste von O ausgehende Tangente berührt, u. s. f. Man hat also eine der früheren durchaus analoge Konstruktion, nur ist an Stelle der Kreise das Kurvenpaar $C_1 C_2$ getreten.

Das Linienbild, das sich so ergibt, hängt stark und in nicht einfacher Weise von den Anfangsbedingungen ab und natürlich sehr wesentlich auch von der Form der Kurven C , also von der Art der Störung.

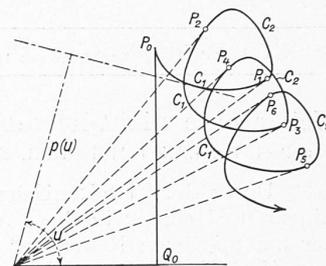


Abb. 6

Hier sind in der Hauptsache folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $|K(u)| < \delta, \quad \varrho_1 < 0, \quad \varrho_2 > 0$ für jedes u .

Beide Kurven C sind konvexe Kurven, das Linienbild ist gezahnt (Abb. 5).

2. $K(u) > \delta$ also $\varrho_1 > 0$, und um so mehr $\varrho_2 = \varrho_1 + 2\delta > 0$. Das Linienbild hat Schleifenform (Abb. 6).

Eine oder beide Funktionen ϱ_1, ϱ_2 wechseln im Innern des Intervalls $(0, \Omega)$ das Zeichen. Das Linienbild zeigt verwickelte Zackenform.

Praktisch zu prüfen ist nun die Frage der periodischen Lösungen, bezw. der Resonanz. Da werden sicher die Anfangsbedingungen eine Hauptrolle spielen. Streng periodische Lösungen wird es nur ausnahmsweise geben bei speziellen $K(u)$ und speziellen Anfangsbedingungen. Die Schleifen- oder Spitzenkurve kann sich mehr und mehr von O entfernen oder aber um O umlaufen. Die Dimensionen einer Schleife können aus den Dimensionen der S -Bögen eingeschätzt werden. Sind sie klein gegenüber der Grösse $\sqrt{p_0^2 + p_0'^2}$, so kann wie bei der Eigenschwingung eine Näherungslösung von der Form

$$p^*(u) = a(u) \cos(u) + b(u) \sin(u)$$

mit langsam sich änderndem a und b angesetzt werden, indem man a und b als die Koordination eines mittlern Punktes der Schleife oder Zacke ansieht. Doch soll darauf hier nicht weiter eingegangen werden.

Der Studio-Neubau des „Radio-Zürich“.

Von OTTO DÜRR, Arch. S. I. A., Zürich.

Die ersten, bescheidenen Studioräume, die die Radiogenossenschaft in Zürich nach ihrer Gründung im Jahre 1924 im städtischen Amthaus IV am Lindenhof eingerichtet hatte, mussten infolge Raummangel bereits im Oktober 1927 aufgegeben werden; die Radiogenossenschaft bezog eigens ausgebaute Räume im Neubau des Geschäftshauses „Sihlporte“ in Zürich 1. Aber schon nach Ablauf von fünf Jahren konnten, infolge der sprunghaften Entwicklung des Radio und der gesteigerten Ansprüche der Hörer, auch diese Räume den grösseren Anforderungen nicht mehr genügen. Nach gründlicher Erwägung beschloss der leitende Ausschuss den Bau eines eigenen Radiohauses. Die Tatsache, dass das ständige Orchester des Landessenders Beromünster¹⁾ dem Studio Zürich zugesprochen wurde, fiel beim Beschluss stark ins Gewicht.

Als Bauplatz wurde ein in städtischem Besitz befindliches Grundstück im Milchbuckgebiet, an der Brunnenhofstrasse gewählt; entscheidend für diese Wahl war der günstige Preis des Baulandes, der um so stärker ins Gewicht fiel, als ausser dem momentan erforderlichen Bedarf eine grössere Landreserve für spätere Erweiterungsbauten mit erworben werden musste. Die Entwicklung des Radio ist noch keineswegs abgeschlossen, somit kann das Bedürfnis nach weiteren Räumen unvermutet auftreten. Sodann liegt das Grundstück abseits vom Strassenlärm und ausser-

¹⁾ Dessen Beschreibung in SBZ Bd. 101, S. 33* (21. Jan. 33). Red.