Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 105/106 (1935)

Heft: 5

Inhaltsverzeichnis

Band 105 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nr. 5

Belastungsgrenzen des Hohlzylinders unter Innendruck bei Berücksichtigung der Plastizität.

Von Dr. techn. PAUL KOHN, Prag.

Auf Grund der Huber-Mises-Hencky'schen Fliessbedingung wird die Belastungsgrenze für den offenen und geschlossenen Hohlzylinder aus zähem Material bestimmt und in Diagrammen dargestellt. Ferner wird das Halbmesserverhältnis berechnet, für das bei der Entlastung die Fliessgrenze neuerlich überschritten wird, und schliesslich auf die plastischen Deformationen eingegangen. — An Beispielen wird die neue Dimensionierung mit der üblichen verglichen.

Bei der Dimensionierung der durch einen inneren Ueberdruck beanspruchten dickwandigen Hohlzylinder war es bisher üblich, als Belastungsgrenze jenen Ueberdruck anzusehen, bei dem gerade der Innenmantel des Hohlzylinders aus dem elastischen in den plastischen Zustand übergeht. Bei einem zähen Material mit ausgesprochener Fliessgrenze bringt aber eine weitere Drucksteigerung noch keine Gefahr mit sich, wie z. B. die Versuche von Krüger[1]) zeigen, da der Hohlzylinder als Ganzes erst zu fliessen beginnt, wenn sich die plastische Zone bis an den Aussenmantel erstreckt. Als äusserste Belastungsgrenze wird man daher jenen Ueberdruck ansehen müssen, bei welchem der Aussenmantel des Hohlzylinders bis zur Fliessgrenze beansprucht wird. Da praktisch jedes Gefäss öfters belastet und daher auch entlastet wird, so tritt, um eine Zerstörung des Materials hintanzuhalten, als weitere Forderung die Bedingung hinzu, dass bei der Entlastung an keiner Stelle des Hohlzylinders die Fliessgrenze neuerlich überschritten wird.

A. Nádai[2]) gibt die allgemeine Lösung für den Spannungszustand des plastischen Rohres mit konstanter axialer Dehnung an und bestimmt die Integrationskonstanten für den Sonderfall, dass die axiale Dehnung null ist. Er setzt dabei voraus, dass man im ganzen plastischen Gebiet die elastischen Dehnungen gegenüber den plastischen vernachlässigen darf. Dies ist jedoch in der Nähe der Grenze zwischen elastischem und plastischem Gebiet nicht zulässig, da in ihr selbst elastische Dehnungen vorhanden, die plastischen Dehnungen aber null sind. In der vorliegenden Arbeit soll dem vorerwähnten Umstand wenigstens näherungsweise Rechnung getragen werden, was nur formal eine kleine Aenderung der Ausgangsgleichungen mit sich bringt; anderseits sollen aber die beiden wichtigsten technischen Belastungsfälle, nämlich der an den Enden offene und der an den Enden geschlossene, durch Innendruck beanspruchte plastische Hohlzylinder behandelt werden. Es sei gleich vorweggenommen, dass sich für den geschlossenen plastischen Hohlzylinder die axiale Dehnung zu null ergibt, und dass für diesen Fall die schon von Nádai für den Spannungszustand angegebenen einfachen Beziehungen gelten.

Für ein elastisch-plastisches Material gelten für den in axialer Richtung unbegrenzt gedachten und axensymmetrisch belasteten Hohlzylinder die folgenden Deformationsbedingungen in den Zylinderkoordinaten r, φ, z.

$$\varepsilon_r = \alpha\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_\varphi + \sigma_z)\right] + \beta\left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\varphi + \sigma_z)\right] = \frac{du}{dr},$$
$$\varepsilon_\varphi = \alpha\left[\sigma_\varphi - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_r)\right] + \beta\left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right] = \frac{u}{r},$$
$$\varepsilon_z = \alpha\left[\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right] + \beta\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right].$$

Hierin bedeuten σ_r, σ_φ, σ_z die Normalspannungen; ε_r, ε_φ, ε_z die Dehnungen in den Richtungen r, φ und z; u die radiale Verschiebung eines Punktes am Radius r; $1/\alpha$ den Elastizitätsmodul, m den Querkontraktionskoeffizient und $1/\beta$ den Plastizitätsmodul.

Im elastischen Gebiet ist $\beta = 0$ und $\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r\,\sigma_\varphi - \sigma_r\,\sigma_z - \sigma_\varphi\,\sigma_z < \sigma_0^2$, wenn σ_0 die Spannung an der Fliessgrenze bedeutet.

Im plastischen Gebiet ist die Fliessbedingung von Huber-Mises-Hencky erfüllt, also

$$\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r\,\sigma_\varphi - \sigma_r\,\sigma_z - \sigma_\varphi\,\sigma_z = \sigma_0^2\,. \quad . \quad (1)$$

und β ist eine vom Verformungszustand des Hohlzylinders abhängige Veränderliche.

Für das plastische Gebiet ersetzen wir nun näherungsweise die Deformationsbedingungen durch:

$$\varepsilon_r = \vartheta\left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\varphi + \sigma_z)\right] = \frac{du}{dr}, \quad . \quad . \quad (2\,a)$$
$$\varepsilon_\varphi = \vartheta\left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right] = \frac{u}{r}, \quad . \quad . \quad (2\,b)$$
$$\varepsilon_z = \vartheta\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right], \quad . \quad . \quad (2\,c)$$

indem wir in den Klammerausdrücken mit α der Ausgangsgleichungen, m $\left(\text{für Flusstahl } m = \frac{10}{3}\right)$ durch 2 ersetzen und $\vartheta = \alpha + \beta$ einführen.

Der Fehler, den man durch diesen Ersatz begeht, ist vernachlässigbar; er ist klein in der Grenzschicht zwischen elastischem und plastischem Gebiet und er wird umso kleiner, je grösser die Entfernung von der Grenzschicht ist, weil sich in grösserer Entfernung von ihr α gegen β vernachlässigen lässt.

Zur Bestimmung des Spannungs-Dehnungszustandes sind weiter noch die Gleichgewichtsbedingungen in radialer und axialer Richtung notwendig. Diese lauten

$$r\,\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\varphi - \sigma_r \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

und

$$\int_a^b 2\,\pi\,r\,\sigma_z\,dr = q\,a^2\,\pi \quad . \quad . \quad (3\,b)$$

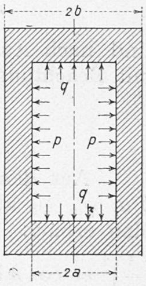

Abb. 1.

worin q (s. Abb. 1) den in axialer Richtung auf die Zylinderböden wirkenden, vorläufig noch beliebig grossen inneren Ueberdruck bedeuten soll.

Da es sich beim axial unbegrenzten, durch Innendruck beanspruchten Hohlzylinder um einen ebenen axensymmetrischen Deformationszustand handelt, ist $\varepsilon_z =$ konstant und alle übrigen in den Gleichungen (1) bis (3) vorkommenden Grössen und daher auch ϑ sind nur Funktionen der Veränderlichen r.

Eliminiert man unter Beachtung dieses Umstandes u und σ_z aus den Gleichungen (2), so ergibt sich

$$\frac{d\,(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{\sigma_\varphi - \sigma_r} = -\,\frac{d\vartheta}{\vartheta} - 2\,\frac{dr}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

anderseits erhält man durch Verbindung von Gleichung (1) und (2 c)

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 = \frac{4}{3}\left[\sigma_0^2 - \left(\frac{\varepsilon_z}{\vartheta}\right)^2\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Führt man die dimensionslose Grösse

$$\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{\sigma_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

in die Gleichungen (3 a), (4) und (5) ein, so lassen sich die Grössen ϑ, σ_r, r als Funktionen der Grösse ψ darstellen. Man erhält

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\psi\,d\psi}{1 - \psi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

[1]) *W. Krüger*, Forschungsarbeit d. V. D. I., H. 87; 1910.

[2]) *A. Nádai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe; Verlag Springer, 1927.