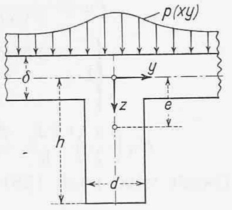
Band 108 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 18

Ueber die Berücksichtigung der Gurtsteifigkeit bei der Berechnung der „mittragenden Breite"

Von Dr. Ing. ERICH REISSNER, Berlin.



Um die Berechnung elastischer Platten, die durch Balken unterstützt sind, durchzuführen, hat man zu berücksichtigen, dass ein Teil der Platte gleichzeitig als Verstärkung des tragenden Balkens wirkt, der so einen zusätzlichen Gurt erhält. Die Breite dieses zusätzlichen Gurtes, die sogenannte «mittragende Breite» ist bisher in der Weise berechnet worden, dass man in plausibler Weise die Plattenbelastung längs des Balkens verteilte und dann zu dieser Belastungsverteilung unter Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit der Platte mit Hilfe der Theorie des ebenen Spannungszustandes eine mittragende Breite berechnete[1]). Da jedoch der Biegungszustand in der Platte den ebenen Spannungszustand beinflusst, so ist dieses Verfahren nicht ganz folgerichtig, wie schon bei Aufstellung dieser Theorie bemerkt wurde[2]).

Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Aufgabe ohne Vernachlässigung gelöst werden kann, und an einem Beispiel ihr zahlenmässiger Einfluss festgestellt werden[3]).

Es werde eine elastische Platte von der Dicke δ und der Steifigkeit $N = E\,\delta^3/12\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$ betrachtet, die durch einen Balken von der Querschnittsfläche F_0 und einem Trägheitsmoment J_0 unterstützt wird. Der Einfachheit halber werde von vornherein angenommen, die Platte sei so belastet, dass der Spannungszustand zu beiden Seiten des Balkens der gleiche ist.

Wir haben erstens einen Biegungszustand in der Platte, bei dem die Durchbiegung w wie bekannt der Differentialgleichung

$$N\,\Delta\Delta w = p\,(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

genügt. Ausserdem ist die Platte aber auch Sitz eines ebenen Spannungszustandes, da infolge der Kopplung von Platte und Balken mit der Durchbiegung des Balkens eine Zerrung der Plattenmittelfläche in seiner Nähe verbunden ist. Die Steifigkeit der Stützung hängt davon ab, wie weit ins Innere hinein sich diese Zerrung fortpflanzt.

Die Spannungen des ebenen Spannungszustandes lassen sich, wie ebenfalls bekannt, folgendermassen als partielle Ableitungen einer Spannungsfunktion Φ schreiben:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} \quad \ldots \quad (2)$$

Dabei genügt Φ der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wie mit Hilfe der Spannungs-Formänderungsbeziehungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\,\sigma_x\right) \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\,\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

abgeleitet wird.

Die Durchbiegung des unterstützenden Balkens von vorläufig unbekannter Gesamtsteifigkeit J werde mit z bezeichnet.

Dann muss längs der Verbindungslinie Platte-Balken (von Chwalla a. a. O. als Kontaktlinie bezeichnet) das folgende System von Bedingungen erfüllt sein.

Wegen der vorausgesetzten Symmetrie hat man

$$y = 0 \quad : \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$y = 0 \quad : \quad v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die dritte Bedingung sagt aus, dass längs des Anschlusses die Plattendurchbiegung mit der Biegungslinie des Balkens übereinstimmen muss, sodass man weiter für

$$y = 0 \quad : \quad w = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

hat. Viertens ist offenbar die Dehnung der Oberkante des Balkens gleich der Zerrung der Plattenmittelfläche längs des Anschlusses. Also gilt mit einem vorläufig unbekannten Abstand e von Balkenschwerpunkt-Plattenmittelfläche

$$y = 0 \quad : \quad e\,z'' = \varepsilon_x \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Fünftens ist schliesslich noch die Differentialgleichung für die Biegungslinie des Balkens aufzustellen. Als Belastung wirkt der Sprung $2\,p_y$ in der Plattenquerkraft sowie eine eventuell vorhandene Linienlast $P\,(x)$ kgcm^{-1}. Wegen der Symmetrie haben wir somit $y = 0 \;:\; (E\,J\,z'')'' - 2\,p_y = P\,(x) \quad \ldots \quad (9)$

Dabei bedeutet J das noch nicht bekannte längs des Balkens veränderliche Trägheitsmoment von Balken plus nichttragendem Gurt.

Nun führen wir als «mittragende Breite» λ diejenige Gurtbreite ein, für die sich an der Anschlusstelle Steg-Gurt bei der Annahme konstanter Längsspannungsverteilung nach der Breite hin dieselbe Längsspannung ergibt wie bei dem Träger mit nach der Seite hin abklingenden Gurtspannungen. Wenn die Breite der Platte mit $2\,b$ bezeichnet wird, ist also

$$\lambda = \frac{\int_0^b \sigma_x\,d\,y}{E\,e\,z''} = \frac{\int_0^b \sigma_x\,d\,y}{E\,(\varepsilon_x)_{y\,=\,0}} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

zu setzen. Zwischen λ, e und J bestehen folgende Beziehungen: Erstens die Bedingung der Schwerpunktslage

$$2\,\lambda\,\delta\,e = \left(\frac{h}{2} - e\right)F_0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

zweitens die Formel für das gesamte Trägheitsmoment J bei Vernachlässigung des Gurtträgheitsmomentes um seine eigene Schweraxe

$$J = J_0 + \left(\frac{h}{2} - e\right)^2 F_0 + 2\,\lambda\,\delta\,e^2$$

die unter Beachtung von (11) weiter

$$J = J_0 + \frac{1}{4}\,h^2 F_0 - \frac{1}{2}\,e\,h\,F_0 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

wird.

Mit Hilfe von (11) und (12) werden nun die Bedingungen (8) und (9) umgeformt. Aus (8) wird

$$y = 0 \quad : \quad \frac{1}{2}\,h\,F_0\,z'' = (2\,\lambda\,\delta + F_0)\,\varepsilon_x$$

und weiter mit (10)

$$y = 0 \quad : \quad \frac{1}{2}\,h\,F_0\,z'' = \left(\frac{2\,\delta}{E\,\varepsilon_x}\int_0^b \sigma_x\,d\,y + F_0\right)\varepsilon_x$$

$$y = 0 \quad : \quad E\,\frac{1}{2}\,h\,F_0\,z'' = 2\,\delta\int_0^b \sigma_x\,dy + E\,F_0\,\varepsilon_x \quad . \quad (8^*)$$

Aus (9) ergibt sich unter Benutzung von (12)

$$y = 0 : \left[E\left(J_0 + \frac{1}{4}\,h^2 F_0\right)z'' - \frac{1}{2}\,h\,F_0\,e\,z''\right]'' - 2\,p_y = P\,(x)$$

was mit (8) die Form

$$y = 0 : E\left[\left(J_0 + \frac{1}{4}\,h^2 F_0\right)z'' - \frac{1}{2}\,h\,F_0\,\varepsilon_x\right]'' - 2\,p_y = P\,(x) \quad (9^*)$$

annimmt.[4])

Das System der Bedingungen (5), (6), (7), (8*) und (9*) reicht nun mit den noch hinzukommenden Bedingungen an den übrigen Plattenrändern, die von Fall zu Fall verschieden sein können, aber keine besonderen Schwierigkeiten bieten, vollkommen aus, das Problem zu einem bestimmten zu machen.

[1]) Siehe z. B. *E. Reissner*, «Z. f. ang. Math. u. Mech.», 15 (1935), p. 359, wo man auch vorhergehende Arbeiten über diesen Gegenstand von *Th. v. Karman, G. Schnadel, W. Metzer, H. Reissner* und *E. Reissner* angegeben findet. Ferner *E. Chwalla*, «Stahlbau», 9 (1936), p. 73, der eine noch vollständigere Literaturzusammenstellung gibt.

[2]) *Th. v. Karman*, A. Föppl-Festschrift, 1924, p. 116, sowie *E. Chwalla*, a. a. O.

[3]) In einer früheren Mitteilung des Verfassers im «Kong. Norske Vidensk. Selsk. Fork.», 8 (1935), p. 13 ist ein weniger einfacher *Ansatz* zur Lösung dieser Frage gegeben, der allerdings dafür den im allgemeinen vernachlässigbaren Einfluss der Schubspannungen im Steg berücksichtigt.

[4]) Eliminiert man aus (9*) z'' vermittels Gl. (8*), so ergibt sich

$$E\left[\frac{4\,\delta\left(J_0 + \frac{1}{4}\,h^2 F_0\right)}{h\,F_0}\int_0^b \sigma_x\,d\,y + \frac{2\,J_0}{h}\,\varepsilon_x\right]'' - 2\,p_y = -\,P(x)\,.$$

Vernachlässigt man nun hier die Plattensteifigkeit N, m. a. W. setzt man $p_y \equiv 0$, so kann man die vorstehende Gleichung zweimal nach x integrieren und erhält in

$$\varepsilon_x + \frac{2\,\delta\left(J_0 + \frac{1}{4}\,h^2 F_0\right)}{J_0\,F_0}\int_0^b \sigma_x\,d\,y = \frac{h}{2\,J_0}\,M\,(x)$$

die Randbedingung der üblichen Theorie der tragenden Breite.