Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 109/110 (1937)
Heft: 12

Inhaltsverzeichnis

Band 109 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 12

Die Eigenschwingung des Schwingers mit Spiel und Vorspannung

Von Dipl. Phys. HANS ZIEGLER, Zürich

Im Anschluss an eine Studie von Kryloff und Bogoljuboff «Ueber einige Methoden der nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz» [1]) ist in einem hier erschienenen Aufsatze [2]) von Prof. Dr. Ernst Meissner die Schwingung mit Vorspannung behandelt und insbesondere nachgewiesen worden, dass sich die Meissnersche Integrations-Methode [3]) zur Herstellung der Lösung sehr gut eignet.

Im Folgenden sei gezeigt, dass sich die Meissnersche Methode sehr leicht auch auf ähnliche Schwingungsvorgänge anwenden lässt. Es soll das allgemeinste Problem eines Schwingers mit Spiel und Vorspannung untersucht und ein allgemeiner Ausdruck für die Periode der Eigenschwingung abgeleitet werden. Das Problem lässt sich auch rein analytisch behandeln, wie es etwa von K. Klotter [4]) angedeutet wurde; die Methode der graphischen Integration bietet aber den Vorteil der Anschaulichkeit und Uebersichtlichkeit.

Es handelt sich darum, die Funktion $x(t)$ zu bestimmen, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + k(x) = 0 \qquad (1)$$

und gegebenen Anfangsbedingungen genügt, wobei $k(x)$ ein Kraftgesetz nach Art der Abb. 1 a bis f ist, wie es in den einfachen Anordnungen der Abb. 1 oder bei drehfedernden Kupplungen auftreten kann [5]). In allen Fällen ist das Rückstellkraftgesetz symmetrisch zum Koordinatenursprung.

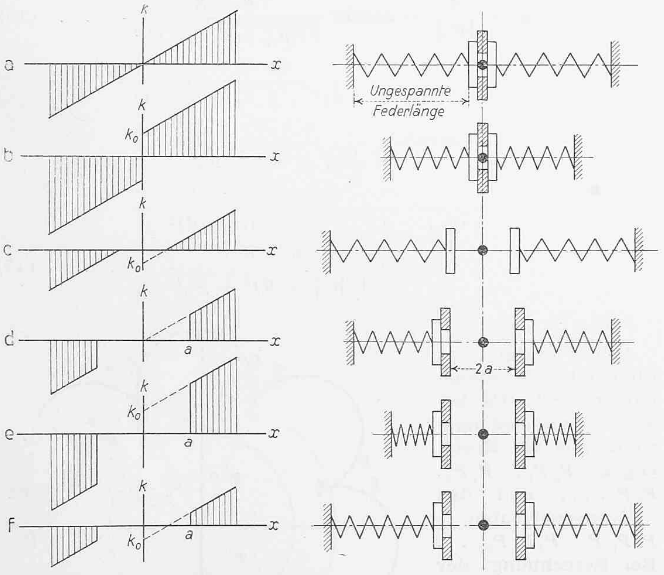

Abb. 1. Links Kraftgesetze, rechts Anordnungsbeispiele für Fall a bis f (es ist in allen Fällen die selbe Feder verwendet).

Fall a) ist der gewohnte Fall einer rein linearen Rückstellkraft. Im Falle b) hat der Schwinger eine Vorspannung k_0. Man verwirklicht ihn etwa folgendermassen: Ein Massenpunkt soll sich längs einer Geraden bewegen können. Um diese Gerade legt man in einer Normalebene einen dünnen (theoretisch unendlich dünnen) Ring, der als Anschlag dient für zwei gleichstarke, gleichlange, gleich vorgespannte Federn, die beide an ihrem freien Ende eine Platte gegen diesen Ring drücken. Die Gleichgewichtslage für den Massenpunkt ist das Zentrum des Ringes. Entfernt man ihn nun längs der Geraden um einen kleinen Betrag aus der Gleichgewichtslage, so wirkt von der Feder her, gegen die er ausgelenkt wird, sofort eine beträchtliche Rückstellkraft auf ihn. Im Falle c) handelt es sich um einen Schwinger mit Spiel, den man etwa so herstellen kann, dass man zwischen zwei Federn, die in der selben Axe liegen und an ihren äussern Enden befestigt sind, während sich in der ungespannten Lage die inneren Enden bis auf den Betrag 2 a nähern, einen Massenpunkt bringt. Im Spielraum zwischen den beiden Federn bewegt sich der Punkt frei, während er weiter rechts von der rechten Feder eine Rückstellkraft nach links, weiter links von der linken Feder eine solche nach rechts erfährt. In den Fällen d), e) und f) haben wir die selben Anordnungen wie in den Fällen a), b) und c), also den linearen Schwinger, den Schwinger mit Vorspannung und denjenigen mit Spiel, nur dass jetzt durch geeignete Anschläge ein Spielraum zwischen den Federn geschaffen, bezw. der vorhandene Spielraum vergrössert wird.

Man entnimmt der Abb. 1, dass in allen sechs Fällen der Betrag der Rückstellkraft folgenden Verlauf hat:

$$\left.\begin{array}{ll} |k| = k_0 + n^2 x & \text{für } x > a \\ |k| = k_0 - n^2 x & \text{für } x < -a \\ |k| = 0 & \text{für } |x| < a \end{array}\right\} \qquad (2)$$

In den Fällen a) und b) ist $a = 0$, im Falle c) $a = -\frac{k_0}{n^2}$ und im Falle f) $a > -\frac{k_0}{n^2}$ zu setzen, wie dies in Tabelle 1 vermerkt ist. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten damit:

$$\left.\begin{array}{ll} m\ddot{x} + n^2 x + k_0 = 0 & \text{für } x > a \\ m\ddot{x} + n^2 x - k_0 = 0 & \text{für } x < -a \\ m\ddot{x} = 0 & \text{für } |x| < a \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Die Fälle a) ... f) unterscheiden sich in der Wahl von a und k_0. Führt man mit der Substitution

$$u = \frac{n}{\sqrt{m}}\, t \qquad (4)$$

die Funktion $x(t)$ in die neue Funktion $p(u)$ über, so hat man für diese, wenn man Ableitungen nach u mit ($'$) bezeichnet, folgende Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} p'' + p = -d & \text{für } p > a \\ p'' + p = d & \text{für } p < -a \\ p'' = 0 & \text{für } |p| < a \end{array}\right\} \qquad (5)$$

mit

$$d = \frac{k_0}{n^2} \qquad (6)$$

Die Werte für k_0, d und a, die man der Abb. 1 entnimmt, sind in Tabelle 1 für die sechs verschiedenen Fälle zusammengestellt.

Tabelle 1

Fall	Charakteristikum	k_0	d	a
a)	Weder Spiel noch Vorspannung	0	0	0
b)	Vorspannung	> 0	> 0	0
c)	Spiel	< 0	< 0	$= -\frac{k_0}{n^2} = -d > 0$
d)	Spiel und Vorspannung	0	0	> 0
e)		> 0	> 0	> 0
f)		< 0	< 0	$> -\frac{k_0}{n^2} = -d > 0$

Ein Blick auf die Gleichungen (5) zeigt, dass sich die Linienbilder der Schwingungen ausschliesslich aus Punkten, Kreisen und Kreisevolventen zusammensetzen. Im Folgenden sollen die Linienbilder der einzelnen Fälle hergestellt und aus ihnen die Eigenperioden bestimmt werden.

Fall a): Er entspricht dem harmonischen Schwinger mit der Periode

$$U = 2\pi \qquad (7)$$

Fall b): Dieser Fall wurde von Prof. Meissner behandelt (siehe Fussnote [2]). Die Eigenperiode ist

$$U = 2\pi - 4 \arcsin \frac{d}{\sqrt{(|p_0| + d)^2 + {p'_0}^2}} = \\ = 4 \arccos \frac{d}{\sqrt{(|p_0| + d)^2 + {p'_0}^2}} \qquad (8)$$

[1]) «SBZ.», Bd. 103, S. 255* u. 267* (Nr. 22 u. 23 vom 2. und 9. Juni 1934).

[2]) *Meissner:* «Ueber eine nicht-harmonische Schwingung», «SBZ.», Bd. 104, S. 35* (Nr. 4 vom 28. Juli 1934).

[3]) Entwickelt in «SBZ.» Bd. 62, Nr. 15 und 16 (1913); Bd. 84, Nr. 23 und 24 (1924); Bd. 98, Nr. 23 und 26 (1931); Bd. 99, Nr. 3, 4 und 13 (1932); zusammengefasst in dem Büchlein «Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion», Verlag der «SBZ.», 1932. Preis 3 Fr.

[4]) *K. Klotter:* «Ueber die freien Bewegungen einfacher Schwinger mit nicht gerader Kennlinie». «Ing.-Arch.», VII. Bd., 2. Heft, April 1936, S. 87.

[5]) *Altmann:* «Drehfedernde Kupplungen», «ZVDI.», Bd. 80, Nr. 9, S. 245 (29. Februar 1936).