

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 109/110 (1937)
Heft: 12

Artikel: Die Eigenschwingung des Schwingers mit Spiel und Verspannung
Autor: Ziegler, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49012>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Eigenschwingung des Schwingers mit Spiel und Vorspannung — Contrôle de la qualité d'un béton au moyen de la densité de celui-ci. — Vom Betrieb der Reichsautobahnen. — Wettbewerb für ein Tonhalle- und Kongress-Gebäude in Zürich. — Der Titelschutz für Ingenieure und Architekten im Kanton Tessin. — Mitteilungen: Werner Siemens. Verhütung von Kohlenstaubexplosionen. Arbeitsmöglichkeit in Britisch

Süd-Afrika. Französische Elektrizitätswirtschaft. Leichtbaustoffe aus Kunstharzschäum. Schweiz. Landesausstellung Zürich 1939. Geleise-Verlegung der New York-Centralbahn. Leitungsgeräusche. 14. Internat. Architektenkongress Paris 1937. — Wettbewerbe: Kirche in Method-Suscévoz. Hallenbad in Hackney (London). Verwaltungsgebäude bei der Universität Lausanne. — Literatur. — Mittlgn. der Vereine. — Vortrags-Kalender.

Band 109

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 12

Die Eigenschwingung des Schwingers mit Spiel und Vorspannung

Von Dipl. Phys. HANS ZIEGLER, Zürich

Im Anschluss an eine Studie von Kryloff und Bogoljuboff «Ueber einige Methoden der nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz»¹⁾ ist in einem hier erschienenen Aufsatz²⁾ von Prof. Dr. Ernst Meissner die Schwingung mit Vorspannung behandelt und insbesondere nachgewiesen worden, dass sich die Meissnersche Integrations-Methode³⁾ zur Herstellung der Lösung sehr gut eignet.

Im Folgenden sei gezeigt, dass sich die Meissnersche Methode sehr leicht auch auf ähnliche Schwingungsvorgänge anwenden lässt. Es soll das allgemeinste Problem eines Schwingers mit Spiel und Vorspannung untersucht und ein allgemeiner Ausdruck für die Periode der Eigenschwingung abgeleitet werden. Das Problem lässt sich auch rein analytisch behandeln, wie es etwa von K. Klotter⁴⁾ angedeutet wurde; die Methode der graphischen Integration bietet aber den Vorteil der Anschaulichkeit und Uebersichtlichkeit.

Es handelt sich darum, die Funktion $x(t)$ zu bestimmen, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

und gegebenen Anfangsbedingungen genügt, wobei $k(x)$ ein Kraftgesetz nach Art der Abb. 1 a bis f ist, wie es in den einfachen Anordnungen der Abb. 1 oder bei drehfedernden Kupplungen auftreten kann⁵⁾. In allen Fällen ist das Rückstellkraftgesetz symmetrisch zum Koordinatenursprung.

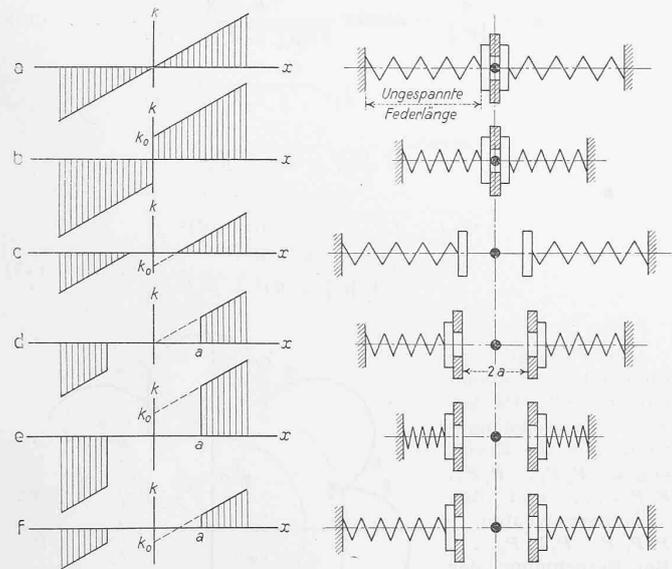


Abb. 1. Links Kraftgesetze, rechts Anordnungsbeispiele für Fall a bis f (es ist in allen Fällen die selbe Feder verwendet).

Fall a) ist der gewohnte Fall einer rein linearen Rückstellkraft. Im Falle b) hat der Schwinger eine Vorspannung k_0 . Man verwicklicht ihn etwa folgendermassen: Ein Massenpunkt soll sich längs einer Geraden bewegen können. Um diese Gerade legt man in einer Normalebene einen dünnen (theoretisch unendlich dünnen) Ring, der als Anschlag dient für zwei gleichstarke, gleichlange, gleich vorgespannte Federn, die beide an ihrem freien Ende eine Platte gegen diesen Ring drücken. Die Gleichgewichtslage für den Massenpunkt ist das Zentrum des Ringes.

1) «SBZ.», Bd. 103, S. 255* u. 267* (Nr. 22 u. 23 vom 2. und 9. Juni 1934).
 2) Meissner: «Ueber eine nicht-harmonische Schwingung», «SBZ.», Bd. 104, S. 35* (Nr. 4 vom 28. Juli 1934).
 3) Entwickelt in «SBZ.», Bd. 62, Nr. 15 und 16 (1913); Bd. 84, Nr. 23 und 24 (1924); Bd. 98, Nr. 23 und 26 (1931); Bd. 99, Nr. 3, 4 und 13 (1932); zusammengefasst in dem Büchlein «Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion», Verlag der «SBZ.», 1932. Preis 3 Fr.
 4) K. Klotter: «Ueber die freien Bewegungen einfacher Schwinger mit nicht gerader Kennlinie», «Ing.-Arch.», VII. Bd., 2. Heft, April 1936, S. 87.
 5) Altmann: «Drehfedernde Kupplungen», «ZVDI.», Bd. 80, Nr. 9, S. 245 (29. Februar 1936).

Entfernt man ihn nun längs der Geraden um einen kleinen Betrag aus der Gleichgewichtslage, so wirkt von der Feder her, gegen die er ausgelenkt wird, sofort eine beträchtliche Rückstellkraft auf ihn. Im Falle c) handelt es sich um einen Schwinger mit Spiel, den man etwa so herstellen kann, dass man zwischen zwei Federn, die in der selben Axe liegen und an ihren äusseren Enden befestigt sind, während sich in der ungespannten Lage die inneren Enden bis auf den Betrag $2a$ nähern, einen Massenpunkt bringt. Im Spielraum zwischen den beiden Federn bewegt sich der Punkt frei, während er weiter rechts von der rechten Feder eine Rückstellkraft nach links, weiter links von der linken Feder eine solche nach rechts erfährt. In den Fällen d), e) und f) haben wir die selben Anordnungen wie in den Fällen a), b) und c), also den linearen Schwinger, den Schwinger mit Vorspannung und denjenigen mit Spiel, nur dass jetzt durch geeignete Anschläge ein Spielraum zwischen den Federn geschaffen, bzw. der vorhandene Spielraum vergrössert wird.

Man entnimmt der Abb. 1, dass in allen sechs Fällen der Betrag der Rückstellkraft folgenden Verlauf hat:

$$\left. \begin{aligned} |k| &= k_0 + n^2 x && \text{für } x > a \\ |k| &= k_0 - n^2 x && \text{für } x < -a \\ |k| &= 0 && \text{für } |x| < a \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

In den Fällen a) und b) ist $a = 0$, im Falle c) $a = -\frac{k_0}{n^2}$ und im Falle f) $a > -\frac{k_0}{n^2}$ zu setzen, wie dies in Tabelle 1 vermerkt ist. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten damit:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + n^2 x + k_0 &= 0 && \text{für } x > a \\ m\ddot{x} + n^2 x - k_0 &= 0 && \text{für } x < -a \\ m\ddot{x} &= 0 && \text{für } |x| < a \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

Die Fälle a) . . . f) unterscheiden sich in der Wahl von a und k_0 . Führt man mit der Substitution

$$u = \frac{n}{\sqrt{m}} t \quad \dots \quad (4)$$

die Funktion $x(t)$ in die neue Funktion $p(u)$ über, so hat man für diese, wenn man Ableitungen nach u mit (\prime) bezeichnet, folgende Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p'' + p &= -d && \text{für } p > a \\ p'' + p &= d && \text{für } p < -a \\ p'' &= 0 && \text{für } |p| < a \end{aligned} \right\} \dots \quad (5)$$

mit $d = \frac{k_0}{n^2} \quad \dots \quad (6)$

Die Werte für k_0 , d und a , die man der Abb. 1 entnimmt, sind in Tabelle 1 für die sechs verschiedenen Fälle zusammengestellt.

Tabelle 1

Fall	Charakteristikum	k_0	d	a
a)	Weder Spiel noch Vorspannung	0	0	0
b)	Vorspannung	> 0	> 0	0
c)	Spiel	< 0	< 0	$= -\frac{k_0}{n^2} = -d > 0$
d)	Spiel und Vorspannung	0	0	> 0
e)		> 0	> 0	> 0
f)		< 0	< 0	$> -\frac{k_0}{n^2} = -d > 0$

Ein Blick auf die Gleichungen (5) zeigt, dass sich die Linienbilder der Schwingungen ausschliesslich aus Punkten, Kreisen und Kreisevolventen zusammensetzen. Im Folgenden sollen die Linienbilder der einzelnen Fälle hergestellt und aus ihnen die Eigenperioden bestimmt werden.

Fall a): Er entspricht dem harmonischen Schwinger mit der Periode $U = 2\pi \quad \dots \quad (7)$

Fall b): Dieser Fall wurde von Prof. Meissner behandelt (siehe Fussnote 2). Die Eigenperiode ist

$$U = 2\pi - 4 \arcsin \frac{d}{\sqrt{(|p_0| + d)^2 + p_0'^2}} = 4 \arccos \frac{d}{\sqrt{(|p_0| + d)^2 + p_0'^2}} \quad \dots \quad (8)$$

Fall c) :

Abb. 2 a zeigt das Liniensbild, in Abb. 2 b zum Fahrplan umgezeichnet. p_0 und p'_0 sind beide positiv angenommen; ausserdem ist $p_0 > a$ gewählt. Es gilt also vorderhand die erste der Gleichungen (5). Der Radius des Liniensbildes ist gemäss Tabelle 1 gleich $-d = a$, das Liniensbild also der Kreisbogen $P_0 P_1$. In P_1 hat das Liniensbild eine gemeinsame Tangente mit dem Kreis k vom Radius a um O : $p_1 = a$; die dritte der Gleichungen (5) tritt in Kraft. Es ist also fortan $p'' = 0$, somit p' konstant gleich p'_1 und $p''' = 0$. Das Liniensbild der Ableitung wird damit zum Kreis vom Radius $q' = p' + p''' = p'_1$, dessen Mittelpunkt wegen $p''' = 0$ mit dem Koordinatenursprung O zusammenfällt. Dementsprechend wird das Liniensbild zur Evolvente $P_1 P_2 P_3$ an diesen Kreis k' . Im Punkte P_3 wird p kleiner als $-a$; es tritt die zweite der Gleichungen (5) in Kraft, und das Liniensbild wird zum Kreisbogen $P_3 P_4$ vom Radius a . Nun wiederholt sich alles von neuem, sodass das Liniensbild abwechselungsweise aus den Kreisbögen $P_0 P_1, P_3 P_4, P_6 P_7, \dots$ und den Kreisevolventen $P_1 P_2 P_3, P_4 P_5 P_6, P_7 P_8 P_9, \dots$ besteht.

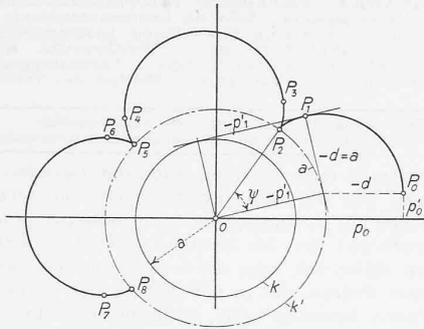


Abb. 2 a. Liniensbild für Fall c.

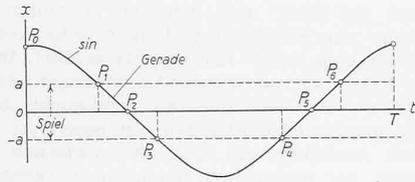


Abb. 2 b. Fahrplan für Fall c. Den Kreisbögen des Liniensbildes entsprechen die Sinusbögen $P_0 P_1, P_3 P_4, \dots$, den Evolventen die Geraden $P_1 P_2 P_3, P_4 P_5 P_6, \dots$.

Man sieht sofort, dass die Schwingung periodisch ist; Ort und Geschwindigkeit des Schwingers sind beispielsweise in den Liniensbildpunkten P_2 und P_8 dieselben. Die Periode der Schwingung ist

$$U = 2\pi + 4\psi \dots (9)$$

Aus der Abb. 2 a liest man ab:

$$\psi = \frac{a}{|p'_1|} = \frac{a}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2}} \dots (10)$$

sodass die Periode endgültig lautet:

$$U = 2\pi + \frac{4a}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2}} \dots (11)$$

Diese Formel für U gilt nur dann, wenn $p_0 > a$, die anfängliche Auslenkung des Schwingers also über das Spiel hinausgeht. Die Untersuchung des andern Falles erübrigt sich aber aus folgendem Grunde: Während der Bewegung bleibt die totale Energie des Schwingers konstant. Bewegungen mit verschiedenen Anfangsbedingungen, aber mit der gleichen Gesamtenergie liefern kongruente, lediglich um O verdrehte Liniensbilder. Die Periode der Eigenschwingung hängt somit nicht von den Anfangsbedingungen einzeln, sondern nur von der Energie des Schwingers ab. Die am Schluss aufgestellte Formel für die Periode wird durch Einführung der Energie von den Anfangsbedingungen unabhängig gemacht werden und damit für beliebige Anfangsbedingungen gültig sein.

Fall d) :

Abb. 3 zeigt das Liniensbild, das jenem von Fall c) sehr ähnlich ist und sich von ihm eigentlich nur dadurch unterscheidet, dass die Kreisbogen zu Punkten entartet sind. Auch hier sind $p_0 > a$ und $p'_0 > 0$ gewählt. Das Liniensbild besteht wegen $d = 0$ anfänglich aus dem Punkt $P_0 = P_1$. Die Stützgerade dreht sich solange um P_0 , bis sie den Kreis k vom Radius a um O berührt. Da fortan $p < a$ ist, wird wie im letzten Fall das Liniensbild zur Evolvente $P_1 P_2 P_3$ an den Kreis k' vom Radius $|p'_1|$ um O , bis es in P_3 eine neue ge-

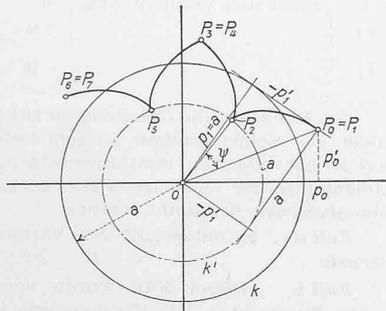


Abb. 3. Liniensbild für Fall d.

meinsame Tangente mit dem Kreis k besitzt, also wieder zum Punkt $P_3 = P_4$ wird usw.

Das Liniensbild besteht also abwechselungsweise aus den Punkten $P_0 = P_1, P_3 = P_4, P_6 = P_7, \dots$ und den Evolventen $P_1 P_2 P_3, P_4 P_5 P_6, \dots$.

Auch diese Schwingung ist periodisch und hat die Periode:

$$U = 2\pi + 4\psi \dots (12)$$

Aus der Abb. 3 liest man ab:

$$\psi = \frac{a}{|p'_1|} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2}} = \frac{a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2 - a^2}} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2}} \dots (13)$$

Damit wird die Periode:

$$U = 2\pi + \frac{4a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2 - a^2}} - 4 \arcsin \frac{a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2}} = \frac{4a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2 - a^2}} + 4 \arccos \frac{a}{\sqrt{p_0'^2 + p_0'^2}} \dots (14)$$

Fall e) :

Konstruiert man wie in den letzten Fällen mittels der Gleichungen (5) und den Werten der Tabelle 1 das Liniensbild, so erhält man eine Figur, wie sie in Abb. 4 dargestellt ist. Das Liniensbild besteht abwechselungsweise aus den Kreisbögen $P_0 P_1, P_3 P_4, P_6 P_7, \dots$ und den Evolventen $P_1 P_2 P_3, P_4 P_5 P_6, \dots$.

Die Periode der Eigenschwingung ist

$$U = 2\pi + 4\psi \dots (15)$$

Ferner liest man aus der Figur ab:

$$\psi = \frac{a}{|p'_1|} - \arcsin \frac{a+d}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2}} \dots (16)$$

$$U = 2\pi + \frac{4a}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2 - (a+d)^2}} - 4 \arcsin \frac{a+d}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2}} = \frac{4a}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2 - (a+d)^2}} + 4 \arccos \frac{a+d}{\sqrt{([p_0] + d)^2 + p_0'^2}} \dots (17)$$

Fall f) :

Abb. 5 zeigt das Liniensbild für diesen letzten Fall. Es besteht abwechselungsweise aus den Kreisbögen $P_0 P_1, P_3 P_4, P_6 P_7, \dots$ und den Kreisevolventen $P_1 P_2 P_3, P_4 P_5 P_6, \dots$. Bei Berechnung der Eigenschwingungsperiode erhält man genau die Formeln (15), (16) und (17).

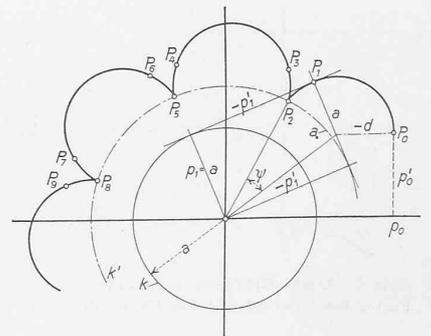


Abb. 5. Liniensbild für Fall f.

Zusammenfassung :

Ein Vergleich der Formeln (7), (8), (11), (14) und (17) zeigt, dass in der letzten Formel (17) alle übrigen enthalten sind und aus ihr sofort hervorgehen, wenn man die in Tabelle 1 zusammengestellten, für die verschiedenen Kraftgesetze charakteristischen Werte für a und d in sie einsetzt. Insbesondere erhält man den von Prof. Meissner angegebenen Wert für die Eigenperiode des Schwingers mit reiner Vorspannung, wenn man in (17) $a = 0$ setzt. Wählt man auch noch $d = 0$, so erhält man die Periode des harmonischen Schwingers.

Wie schon oben angedeutet, hängt die Periode U nicht von den Anfangsbedingungen einzeln, sondern nur von der Totalenergie des Schwingers ab. Durch Einführung der Energie soll nun Formel (17), die nur gilt, wenn die anfängliche Auslenkung über das Spiel hinausgeht, in einen allgemein gültigen Ausdruck übergeführt werden:

Die Energie des Schwingers ist

$$E = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} + \int_0^{x_0} k dx \dots (18)$$

Aus (4) folgt

$$\frac{m \dot{x}_0^2}{2} = \frac{n^2}{2} p_0^2 \dots (19)$$

Ferner ist die potentielle Anfangsenergie gleich dem Inhalt des schraffierten Trapezes in Abb. 6:

$$\int_0^{x_0} k dx = (k_0 + n^2 |p_0| + k_0 + n^2 a) \frac{|p_0| - a}{2} = \frac{n^2}{2} (2d + |p_0| + a) (|p_0| - a) = \frac{n^2}{2} \left\{ (|p_0| + d)^2 - (a + d)^2 \right\} \dots (20)$$

Daraus folgt

$$(|p_0| + d)^2 + p_0^2 - (a + d)^2 = \frac{2E}{n^2} \dots (21)$$

Führt man dies in (17) ein, so hat man für die Eigenperiode

$$U = 2\pi + \frac{4an}{\sqrt{2E}} - 4 \arcsin \frac{n(a+d)}{\sqrt{2E+n^2(a+d)^2}} = \frac{4an}{\sqrt{2E}} + 4 \arccos \frac{n(a+d)}{\sqrt{2E+n^2(a+d)^2}} \dots (22)$$

oder, wenn man unter Benützung von (4) und (6) wieder zur ursprünglichen Veränderlichen, der Zeit, zurückkehrt:

$$T = 4\sqrt{m} \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{a}{\sqrt{2E}} - \frac{1}{n} \arcsin \frac{na + \frac{k_0}{n}}{\sqrt{2E + (na + \frac{k_0}{n})^2}} \right\} = 4\sqrt{m} \left\{ \frac{a}{\sqrt{2E}} + \frac{1}{n} \arccos \frac{na + \frac{k_0}{n}}{\sqrt{2E + (na + \frac{k_0}{n})^2}} \right\} \dots (23)$$

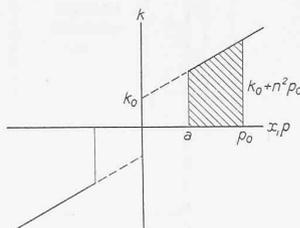


Abb. 6.

Aus diesem letzten Ausdruck, dem man beiläufig entnimmt, dass sich die Periode der Schwingung mit wachsender Energie jener der harmonischen Schwingung mit gleich geneigter Charakteristik nähert, lässt sich bei Kenntnis des Rückstellkraftgesetzes und der Schwingungsenergie sofort die Eigenperiode berechnen.

Contrôle de la qualité d'un béton au moyen de la densité de celui-ci

par J. BOLOMEY, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de Lausanne

La résistance à la compression d'un béton est donnée, avec une précision suffisante pour les besoins du chantier, par la formule:

$$R = (C/E - 0,50) \cdot K \dots (1)$$

qui est une simplification de notre formule générale:

$$R = \left[\left(\frac{\Delta}{2,35} \right)^2 \frac{C}{E} \right]^{3/2} \frac{K}{2} \dots (2)$$

R = Résistance à la compression en kg/cm².

C/E = Rapport du poids du ciment au poids de l'eau de gâchage.

Δ = Densité du béton lors de sa mise en oeuvre.

K = Coefficient de résistance, variable avec la qualité du ciment, le mode et la durée du durcissement. Pour les ciments suisses actuels K est compris dans les limites suivantes:

	3 jours	7 jours	28 jours
C. P. ordinaire	K = 70 à 100	140 à 170	180 à 250
C. P. spécial	K = 130 à 160	200 à 260	280 à 350

Le coefficient K étant connu, la résistance probable du béton sera aussi dès que nous aurons déterminé le rapport C/E, c'est-à-dire dès que nous connaîtrons le dosage effectif en ciment et la quantité d'eau de gâchage totale (eau retenue par le ballast humide et eau ajoutée) par m³ de béton.

Détermination du dosage effectif. Le dosage effectif du béton peut être déterminé exactement, sans perte de temps, en comptant le nombre de gâchées nécessaires pour exécuter un élément de l'ouvrage dont le volume est facile à calculer en raison de sa forme géométrique (sommier, mur coffré, etc.). Connaissant le nombre de gâchées, le poids du ciment par gâchée, le volume

exécuté, nous en déduisons immédiatement le dosage par m³ de béton:

$$\text{Dosage en kg/m}^3 = \frac{\text{Poids du ciment utilisé}}{\text{Volume de béton exécuté}}$$

Le dosage effectif peut aussi être déterminé en mesurant exactement (par exemple au moyen d'une caisse sans fond posée sur une surface plane) le volume occupé par une seule gâchée du béton.

Détermination de la quantité d'eau de gâchage. Nous pouvons calculer la quantité d'eau de gâchage dès que nous connaissons le dosage et les densités absolues (vides nuls) du béton, du ciment et du ballast. En effet, soient:

C, S, E les poids du ciment, du ballast et de l'eau en kg/m³ de béton.

c, s, e, v les volumes en litres occupés dans 1 m³ de béton par le ciment, le ballast, l'eau et les vides.

Δ_b le poids du m³ de béton au moment du gâchage, vides nuls, c'est-à-dire v = 0.

Δ_c et Δ_s les densités absolues du ciment et du ballast. En général on peut admettre, comme première approximation:

$$\Delta_c = 3,10 \quad \Delta_s = 2,65$$

Nous avons:

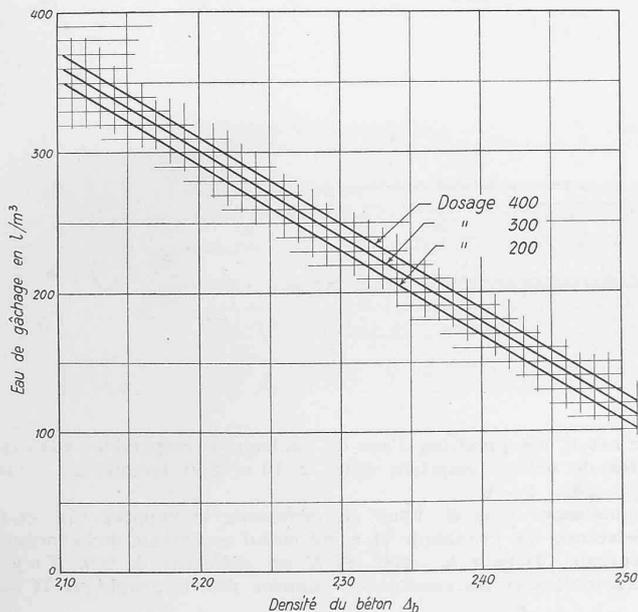
$$\Delta_b = C + S + E \quad \text{d'où} \quad \Delta_b - C = A = S + E$$

$$1000 = c + s + e + v$$

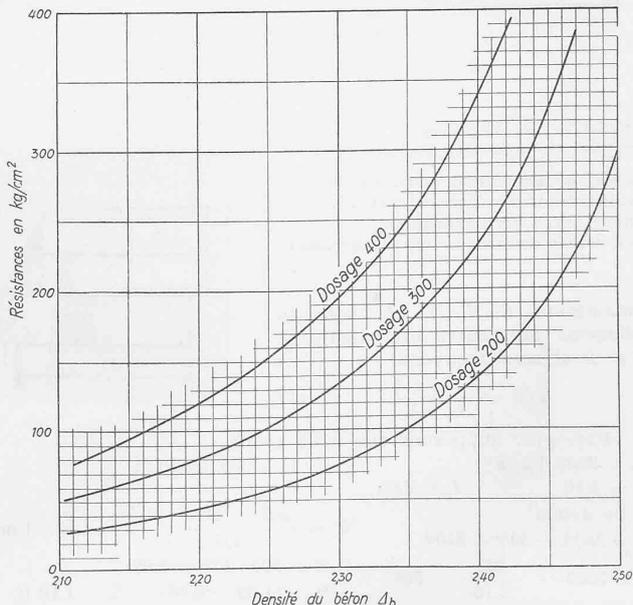
$$\text{si } v = 0, \text{ nous en tirons}$$

$$1000 - \frac{C}{\Delta_c} = \frac{S}{\Delta_s} + E = B$$

$$\text{en effet } c = \frac{C}{\Delta_c} \quad s = \frac{S}{\Delta_s}$$



Graphique I: Eau de gâchage.



Graphique II: Résistance à la compression du béton.