

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 117/118 (1941)
Heft: 1

Artikel: Die Berechnung von ebenen Trägerrosten
Autor: Kruck, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83477>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die technischen Verdienste Eulers beschränken sich aber keineswegs nur auf Turbinen. Wer weiss heute, dass Euler eine exakte Zahnradberechnung angab, eine Linsenschleifmaschine erfand, die Theorie der Zentrifugalpumpe aufstellte, den Wasserstoss in langen Röhren sehr ausführlich berechnete und seine unerhörte mechanische und rechnerische Begabung auf Ramme, Windmühle, Säge und schliesslich auf den damals soeben erfundenen Luftballon anwandte? Bis tief in das neunzehnte Jahrhundert bildeten die Werke Eulers über Optik, den Schiffbau, die Ballistik die Grundlage für die Ausbildung der Ingenieure aller Länder.

Unser Nachbarland Italien hat die technischen Leistungen seines grossen Künstlers Leonardo da Vinci vor kurzem gefeiert und ihre Bedeutung für die Kultur Italiens unterstrichen. Eine ähnliche Begeisterung herrschte 1909 in der Schweiz, als die Naturforschende Gesellschaft beschloss, Eulers Werke zu drucken. Das Unternehmen war damals finanziell gesichert. Durch den Krieg ging die Hälfte der Abonnenten verloren und die Herstellungskosten verdoppelten sich beinahe. Seit 1918 schritt der Druck nur kümmerlich weiter und in den letzten 15 Jahren konnten nur sechs Bände herausgegeben werden. So sind bis heute erst 27 Bände von den insgesamt 75 Bänden erschienen. Wir wenden uns daher an die Schweizerischen Unternehmungen der Industrie, insbesondere der Wasserwirtschaft und der Maschinen, in der Hoffnung, ein Kapital von 100 000 Fr. zu erhalten. Durch diese Stärkung unserer Mittel würden wir in die Lage versetzt, jährlich etwa zwei Bände zu drucken.

Zum Schluss weisen wir darauf hin, dass unser Unternehmen das grösste seiner Art ist, und dass die Bände, nebst ihrem Inhalt, wenn sie einmal fertiggestellt sind, ein Denkmal darstellen, das der Schweiz auf Jahrhunderte hinaus Ansehen und Ehre bereiten wird.

Für die Eulerkommission und die Redaktion:

Prof. Dr. RUDOLF FUETER, Präsident Prof. Dr. J. ACKERET, Herausg.
 Prof. Dr. M. PLANCHEREL, Vizepräsi. der Bände über Maschinenwesen
 Dr. Ch. ZOELLY, Schatzmeister Prof. Dr. A. SPEISER, Generalred.

Diesen Aufruf unterstützen: Dr. h. c. H. Eggenberger, Bern, Ing. Carl Jegher, Zürich, Prof. Dr. h. c. E. Meyer-Peter, Zürich, Dr. E. Moll, Bern, Prof. Dr. R. Neeser, Genève, Dir. F. Ringwald, Luzern, Dr. h. c. M. Schiesser, Baden, Ing. R. A. Schmidt, Lausanne, Dir. E. Stiefel, Basel, Prof. Dr. A. Stodola, Zürich, Dir. W. Trüb, Zürich, alt Ständerat Dr. O. Wettstein, Zürich, Dr. H. Wolfer, Winterthur, Prof. Dr. W. Wyssling, Wädenswil.

Die Berechnung von ebenen Trägerrosten

Von Dr. sc. techn. G. KRUCK, Public Works Department, Bangkok, Siam

1. Einleitung

Ueber die Berechnung von Trägerrosten ist schon viel und ausführlich geschrieben worden. Es heisst daher beinahe Wasser in den Rhein tragen, noch mehr darüber zu veröffentlichen. Trotzdem glaubt der Verfasser, dass die Berechnung, die hier dargestellt werden soll, für die Anwendung in der Praxis Vorteile besitzt.

Modellverfahren (siehe: «Die vereinfachte Berechnung von zweiseitig gelagerten Trägerrosten», von Dr. Ing. Fritz Leonhardt; Berlin, Wilhelm Ernst & Sohn) besitzen gewiss Vorteile, doch können Modellversuche nicht immer und nicht überall durchgeführt werden. Auch ist die Berechnung von Trägerrosten oft gar nicht so mühsam, dass sich Modellversuche lohnen würden.

Die einfachste Berechnung eines statisch unbestimmten Systems erhalten wir in der Regel, wenn wir ein Grundsystem wählen, das sich statisch möglichst wenig vom wirklichen System unterscheidet. Wählen wir als Beispiel den kontinuierlichen Balken: Das Grundsystem der verschiedenen einfachen Balken mit den Stützmomenten als Unbekannten ist weniger verschieden vom wirklichen System und einfacher in der Berechnung als das Grundsystem eines einzigen Balkens auf zwei Stützen mit

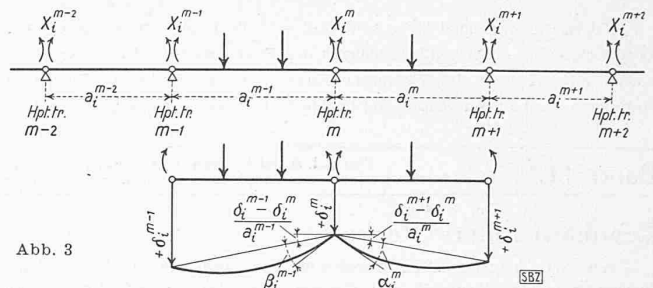


Abb. 3

den Auflagerdrücken der weggelassenen Stützen als Ueberzähligen. Trotzdem wurden für die Berechnung von Trägerrosten meist die Auflagerkräfte in den Kreuzungspunkten als Unbekannte eingeführt. Die Wahl der Durchbiegungen der Knotenpunkte als Ueberzählige führt zu ähnlichen Gleichungssystemen (Methode von Ostenfeld). 1919 hat Dr. Karner die Längsträgermomente über den Querträgern als Unbekannte eingeführt. Das selbe Verfahren verwendet auch Dr. Kurt Beyer in seinem Buche: «Die Statik im Eisenbetonbau». Die Berechnung wird aber wesentlich vereinfacht, wenn wir als Unbekannte die Stützmomente der Querträger über den Längsträgern einführen. Als Grundsystem wählen wir das System der Hauptträger mit gelenkig angeschlossenen Querträgern, ein System, das sich vom wirklichen weit weniger unterscheidet als die bisher verwendeten Grundsysteme.

Der Verfasser leitet im folgenden die Bestimmungsgleichung für ein beliebiges Stützmoment eines Querträgers ab für den allgemeinen Fall eines beliebigen ebenen Trägerrosts. Diese Gleichung entspricht der Clapeyron'schen Gleichung für das Stützmoment eines kontinuierlichen Trägers auf festen Stützen. Für jeden beliebigen Trägerrost kann dann das System der Bestimmungsgleichungen der Unbekannten angeschrieben werden in allgemeiner Form. Die Bestimmung der Koeffizienten ist verhältnismässig einfach. Die Zahl der Unbekannten kann selbstverständlich nicht verringert werden, doch hat die Methode den grossen Vorteil, dass oft nur ein Teil der Bestimmungsgleichungen benutzt werden muss, da bei Belastung eines Querträgers die weiter entfernten Querträger an der Lastverteilung kleinen Anteil haben, deren Stützmomente daher vernachlässigt werden können. Bei symmetrischen Trägerrosten lassen sich die Bestimmungsgleichungen einfach in kleinere Gruppen aufteilen.

Das Verfahren ist vom Verfasser für die Berechnung von mehreren Balkenbrücken mit Nutzen verwendet worden.

2. System und Grundsystem

Der ebene Trägerrost besteht aus zwei sich kreuzenden Systemen von Balken. In weitaus den meisten Fällen sind die Balken eines Systems untereinander parallel und die beiden Systeme schneiden sich unter einem rechten Winkel, doch wollen wir den allgemeinen Fall behandeln mit der Einschränkung, dass die Balken eines Systems sich untereinander nicht schneiden. Es gibt Trägerroste, wo beide Balkensysteme Auflager besitzen und solche, bei denen nur ein System abgestützt ist (Balkenbrücken mit Querträgern). Wir können beide Fälle gemeinsam untersuchen. Die Verdrehungssteifigkeit der Träger vernachlässigen wir.

Die Bezeichnung der Trägersysteme wollen wir dem Brückenbau entnehmen: Falls nur ein System von Balken gelagert ist, nennen wir die abgestützten Balken Hauptträger; falls beide Systeme Lager besitzen, bezeichnen wir mit Hauptträger die steiferen Balken. Die Lagerung der Hauptträger kann statisch bestimmt oder unbestimmt sein. Das andere System wird durch die Querträger gebildet. Sie können statisch unbestimmt, einseitig oder gar nicht abgestützt sein (Abb. 1).

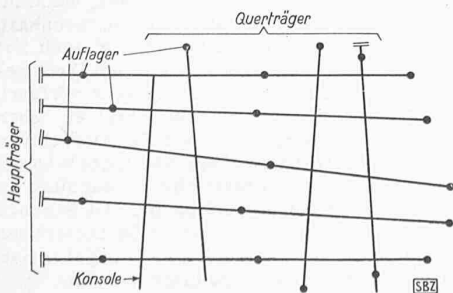


Abb. 1

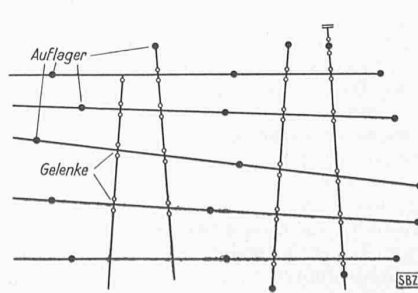


Abb. 2

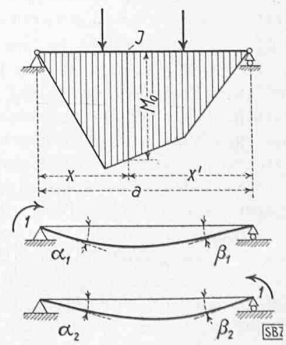


Abb. 5

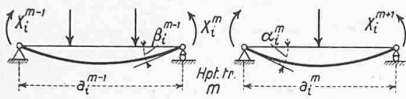


Abb. 4

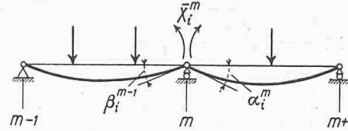


Abb. 6

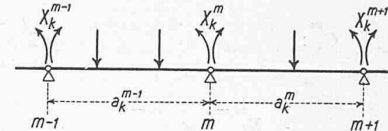


Abb. 7

Die Anzahl der Hauptträger betrage n , mit m bezeichnen wir einen beliebigen Hauptträger, A_m stelle eine Grösse A dar, die dem Hauptträger m zugeordnet ist. Die Anzahl der Querträger betrage l , mit i bezeichnen wir einen beliebigen Querträger, A_i stelle die Grösse A dar, die dem Querträger i zugeordnet ist. A_i^m bedeutet die Grösse A im Kreuzungspunkt des Hauptträgers m mit dem Querträger i .

Als Grundsystem wählen wir das System der statisch bestimmt oder unbestimmt gelagerten Hauptträger, an die die Querträger gelenkig angeschlossen sind (Abb. 2). Die Querträger im Grundsystem sind einfache, zweiseitig gelagerte Balken, unter Umständen mit Konsolen bei den Randhauptträgern. Die Hauptträger können auch durch Rahmen gebildet werden; die Querträger hingegen sind in den folgenden Ableitungen über allfällige vorkommenden Auflagerpunkte gelenkig gelagert vorausgesetzt. Die Stützmomente X der Querträger bilden die statisch unbestimmten Grössen.

3. Ableitung der allgemeinen Bestimmungsgleichung

Wir betrachten die Stütze m des Querträgers i (Abb. 3): Die Grössen eines Querträgers (Spannweite, Trägheitsmoment) bezeichnen wir nach dem linksliegenden Knoten; die Durchbiegungen seien $+\delta$ nach abwärts. α und β sind die Winkel zwischen der elastischen Linie des Balkens und der Verbindungsgeraden der Auflagerpunkte am linken, bzw. rechten Auflager.

Da der Querträger über dem Auflager m kontinuierlich durchgeht, so muss die Verdrehung der Stabaxe links vom Auflager der rechts vom Auflager entsprechen:

$$\frac{\delta_i^{m-1} - \delta_i^m}{\alpha_i} + \beta_i = - \left[\frac{\delta_i^{m+1} - \delta_i^m}{\alpha_i} + \alpha_i^m \right]$$

$$\beta_i^{m-1} + \alpha_i^m + \delta_i^{m-1} \times \frac{1}{\alpha_i^{m-1}} - \delta_i^m \times \left(\frac{1}{\alpha_i^{m-1}} + \frac{1}{\alpha_i^m} \right) + \delta_i^{m+1} \times \frac{1}{\alpha_i^m} = 0 \dots (1)$$

Die Verdrehungen α und β hängen von der Belastung und den Stützmomenten ab. Sie können wie folgt angeschrieben werden (Abb. 4):

$$\beta_i^{m-1} = \beta_{i_0}^{m-1} + X_i^{m-1} \times \beta_{i_1}^{m-1} + X_i^m \times \beta_{i_2}^{m-1}$$

$$\alpha_i^m = \alpha_{i_0}^m + X_i^m \times \alpha_{i_1}^m + X_i^{m+1} \times \alpha_{i_2}^m$$

Dabei bedeutet:

$$\alpha_0 = \int_0^a M_0 \frac{X'}{a} \frac{dx}{EJ}, \beta_0 = \int_0^a M_0 \frac{X}{a} \frac{dx}{EJ} \dots (2)$$

Verdrehungen im statisch bestimmt gelagerten Balken unter der aufgetragenen Last (Abb. 5). Bei den Randhauptträgern können die Querträger Konsolen haben, an der Ableitung ändert sich nichts: für M_0 ist wiederum das Moment im statisch bestimmt gelagerten Balken einzuführen unter Berücksichtigung des Konsolmomentes.

$$\alpha_1 = \int_0^a \frac{(X')^2}{(a)^2} \frac{dx}{EJ}, \alpha_2 = \beta_1 = \int_0^a \frac{X X'}{(a)^2} \frac{dx}{EJ}, \beta_2 = \int_0^a \frac{(X)^2}{(a)^2} \frac{dx}{EJ}$$

Verdrehungen im statisch bestimmt gelagerten Balken infolge der Auflagermomente 1.

Wir setzen die Werte (2) in (1) ein und erhalten:

$$X_i^{m-1} \times \beta_{i_1}^{m-1} + X_i^m (\beta_{i_2}^{m-1} + \alpha_{i_1}^m) + X_i^{m+1} \times \alpha_{i_2}^m + \delta_i^{m-1} \times \frac{1}{\alpha_i^{m-1}} - \delta_i^m \times \left(\frac{1}{\alpha_i^{m-1}} + \frac{1}{\alpha_i^m} \right) + \delta_i^{m+1} \times \frac{1}{\alpha_i^m} = - (\beta_{i_0}^{m-1} + \alpha_{i_0}^m) \dots (3)$$

Das Glied auf der rechten Seite lässt sich umformen. Wir bezeichnen mit \bar{X} das Stützmoment des über zwei Felder durchgehenden Balkens auf festen Stützen (Abb. 6).

$$\beta_i^{m-1} = \beta_{i_0}^{m-1} + \bar{X}_i^m \times \beta_{i_2}^{m-1}$$

$$\alpha_i^m = \alpha_{i_0}^m + \bar{X}_i^m \times \alpha_{i_1}^m$$

$$\beta_i^{m-1} = -\alpha_i^m : \beta_{i_0}^{m-1} + \bar{X}_i^m \times \beta_{i_2}^{m-1} = -\alpha_{i_0}^m - \bar{X}_i^m \times \alpha_{i_1}^m$$

somit:

$$- (\beta_{i_0}^{m-1} + \alpha_{i_0}^m) = \bar{X}_i^m \times (\beta_{i_2}^{m-1} + \alpha_{i_1}^m) \dots (4)$$

Die Belastung der Hauptträger besteht aus der Belastung im Grundsystem plus der Belastung, die die Stützmomente X der Querträger bedingen. Die Belastung, die die Stützmomente des Querträgers k im Hauptträger m hervorrufen, bezeichnen wir mit Z_k^m (Abb. 7).

$$Z_k^m = \frac{X_k^{m-1}}{\alpha_k^{m-1}} - X_k^m \left(\frac{1}{\alpha_k^{m-1}} + \frac{1}{\alpha_k^m} \right) + \frac{X_k^{m+1}}{\alpha_k^m} \dots (5)$$

Die Belastung des Hauptträgers m ist in Abb. 8 dargestellt.

Die Durchbiegung δ_i^m des Hauptträgers m an der Stelle i infolge der Last im Grundsystem nennen wir $\delta_{i_0}^m$; die Durchbiegung infolge $Z_k^m = 1$ bezeichnen wir mit $\delta_{i_k}^m$. Die Hauptträger im Grundsystem sind dabei einfache oder kontinuierliche Balken oder Rahmen. Dann können wir schreiben:

$$\delta_i^m = \delta_{i_0}^m + \delta_{i_1}^m \times Z_1^m + \dots + \delta_{i_k}^m \times Z_k^m + \dots + \delta_{i_l}^m \times Z_l^m + \dots$$

oder kürzer:

$$\delta_i^m = \delta_{i_0}^m + \sum_{k=1}^l \delta_{i_k}^m \times Z_k^m \dots (6)$$

Mit M_0^m bezeichnen wir die Momente des Hauptträgers m im Grundsystem für den zu untersuchenden Lastfall, mit M_i^m die Momente im Grundsystem infolge $Z_i^m = 1$, mit M_k^m die Momente infolge $Z_k^m = 1$. Dann ist:

$$\delta_{i_0}^m = \int M_0^m \times M_i^m \times \frac{dx}{EJ}$$

$$\delta_{i_k}^m = \int M_k^m \times M_i^m \times \frac{dx}{EJ}$$

\int bedeutet: die Integration erstreckt sich über den ganzen Träger m .

Nun ersetzen wir Z_k^m in Gleichung (6) durch Gleichung (5) und erhalten:

$$\delta_i^m = \delta_{i_0}^m + \sum_{k=1}^l \delta_{i_k}^m \times \left[\frac{X_k^{m-1}}{\alpha_k^{m-1}} - X_k^m \times \left(\frac{1}{\alpha_k^{m-1}} + \frac{1}{\alpha_k^m} \right) + \frac{X_k^{m+1}}{\alpha_k^m} \right] \dots (7)$$

Für δ_i^{m-1} und δ_i^{m+1} erhalten wir analoge Ausdrücke mit um 1 verschobenen Indices m . Diese Werte führen wir in Gleichung (3) ein, bringen die unbekanntenen Stützmomente X auf die linke Seite und die Lastglieder auf die rechte Seite und erhalten auf diese Weise die Bestimmungsgleichung G_i^m für das Stützmoment X_i^m in allgemeiner Form. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
G_i^m : & + \sum_{k=1}^l X_k^{m-2} \times \frac{\delta_{ik}^{m-1}}{a_k^{m-2} \times a_i^{m-1}} \\
& + X_i^{m-1} \times \beta_{i1}^{m-1} - \sum_{k=1}^l X_k^{m-1} \times \left[\frac{\delta_{ik}^{m-1}}{a_i^{m-1}} \times \left(\frac{1}{a_k^{m-2}} + \frac{1}{a_k^{m-1}} \right) + \frac{\delta_{ik}^m}{a_k^{m-1}} \left(\frac{1}{a_i^{m-1}} + \frac{1}{a_i^m} \right) \right] \\
& + X_i^m \times (\beta_{i2}^{m-1} + \alpha_{i1}^m) + \sum_{k=1}^l X_k^m \times \left[\frac{\delta_{ik}^{m-1}}{a_i^{m-1} \times a_k^{m-1}} + \delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a_i^{m-1}} + \frac{1}{a_i^m} \right) \left(\frac{1}{a_k^{m-1}} + \frac{1}{a_k^m} \right) + \frac{\delta_{ik}^{m+1}}{a_i^m \times a_k^m} \right] \\
& + X_i^{m+1} \times \alpha_{i2}^m - \sum_{k=1}^l X_k^{m+1} \times \left[\frac{\delta_{ik}^m}{a_k^m} \left(\frac{1}{a_i^{m-1}} + \frac{1}{a_i^m} \right) + \frac{\delta_{ik}^{m+1}}{a_i^m} \left(\frac{1}{a_k^m} + \frac{1}{a_k^{m+1}} \right) \right] \\
& + \sum_{k=1}^l X_k^{m+2} \times \frac{\delta_{ik}^{m+1}}{a_i^m \times a_k^{m+1}} = L_i^m. \\
L_i^m = & - (\beta_{i0}^{m-1} + \alpha_{i0}^m) - \delta_{i0}^{m-1} \times \frac{1}{a_i^{m-1}} + \delta_{i0}^m \left(\frac{1}{a_i^{m-1}} + \frac{1}{a_i^m} \right) - \delta_{i0}^{m+1} \times \frac{1}{a_i^m} \\
= & + \bar{X}_i^m \times (\beta_{i2}^{m-1} + \alpha_{i1}^m) - \delta_{i0}^{m-1} \times \frac{1}{a_i^{m-1}} + \delta_{i0}^m \left(\frac{1}{a_i^{m-1}} + \frac{1}{a_i^m} \right) - \delta_{i0}^{m+1} \times \frac{1}{a_i^m} \quad (8)
\end{aligned}$$

Die Gleichung enthält sämtliche Querträger-Stützenmomente von fünf nebeneinanderliegenden Hauptträgern. Die Koeffizienten berechnen sich aus den Werten δ_{ik} der Hauptträger und den Querträgerlängen; einzig bei den drei Stützenmomenten X_i^{m-1} , X_i^m , X_i^{m+1} treten noch die Werte α und β hinzu, die von den Querträgerlängen und -Trägheitsmomenten abhängen. Auch das Lastglied zerfällt in zwei Teile: Der erste Teil rührt her von der Belastung des Querträgers i , der zweite Teil von der Belastung der Hauptträger im Grundsystem. Indem wir diese Gleichung (8) für jedes unbekannte Querträgerstützmoment ansprechen, erhalten wir die nötigen Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten.

Das Gleichungssystem scheint reichlich kompliziert, doch werden wir später sehen, dass oft nur eine kleine Anzahl von Unbekannten berücksichtigt werden muss. Auch tritt die Gleichung selten in dieser allgemeinen Form auf. Wir wollen die Gleichung (8) daher vorerst noch vereinfachen für die meist vorkommenden Fälle.

4. Spezialfälle

Fast immer werden die Hauptträger und die Querträger untereinander parallel sein. Dann sind die Querträgerlängen zwischen den Hauptträgern unabhängig vom einzelnen Querträger. Für diesen Fall erhalten wir die Gleichung 8a:

$$\begin{aligned}
G_i^m : & + \sum_{k=1}^l X_k^{m-2} \times \frac{\delta_{ik}^{m-1}}{a^{m-2} \times a^{m-1}} \\
& + X_i^{m-1} \times \beta_{i1}^{m-1} - \sum_{k=1}^l \frac{X_k^{m-1}}{a^{m-1}} \times \left[\delta_{ik}^{m-1} \times \left(\frac{1}{a^{m-2}} + \frac{1}{a^{m-1}} \right) + \delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) \right] \\
& + X_i^m \times (\beta_{i2}^{m-1} + \alpha_{i1}^m) + \sum_{k=1}^l X_k^m \times \left[\delta_{ik}^{m-1} \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} \right)^2 + \delta_{ik}^m \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right)^2 + \delta_{ik}^{m+1} \times \left(\frac{1}{a^m} \right)^2 \right] \\
& + X_i^{m+1} \times \alpha_{i2}^m - \sum_{k=1}^l \frac{X_k^{m+1}}{a^m} \times \left[\delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) + \delta_{ik}^{m+1} \times \left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^{m+1}} \right) \right] \\
& + \sum_{k=1}^l X_k^{m+2} \times \frac{\delta_{ik}^{m+1}}{a^m \times a^{m+1}} = L_i^m \\
L_i^m = & \bar{X}_i^m \times (\beta_{i2}^{m-1} + \alpha_{i1}^m) - \delta_{i0}^{m-1} \times \frac{1}{a^{m-1}} + \delta_{i0}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) - \delta_{i0}^{m+1} \times \frac{1}{a^m} \quad (8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_i^m : & + \sum_{k=1}^l X_k^{m-2} \times \frac{\delta_{ik}^{m-1}}{a^{m-2} \times a^{m-1}} \\
& + X_i^{m-1} \times \frac{a_i^{m-1}}{6} - \sum_{k=1}^l \frac{X_k^{m-1}}{a^{m-1}} \times \left[\delta_{ik}^{m-1} \times \left(\frac{1}{a^{m-2}} + \frac{1}{a^{m-1}} \right) + \delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) \right] \\
& + X_i^m \times \frac{a_i^{m-1} + a_i^m}{3} + \sum_{k=1}^l X_k^m \times \left[\delta_{ik}^{m-1} \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} \right)^2 + \delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right)^2 + \delta_{ik}^{m+1} \times \left(\frac{1}{a^m} \right)^2 \right] \\
& + X_i^{m+1} \times \frac{a_i^m}{6} - \sum_{k=1}^l \frac{X_k^{m+1}}{a^m} \times \left[\delta_{ik}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) + \delta_{ik}^{m+1} \times \left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^{m+1}} \right) \right] \\
& + \sum_{k=1}^l X_k^{m+2} \times \frac{\delta_{ik}^{m+1}}{a^m \times a^{m+1}} = \bar{L}_i^m \\
\bar{L}_i^m = & \bar{X}_i^m \times \frac{a_i^{m-1} + a_i^m}{3} - \delta_{i0}^{m-1} \times \frac{1}{a^{m-1}} + \delta_{i0}^m \times \left(\frac{1}{a^{m-1}} + \frac{1}{a^m} \right) - \delta_{i0}^{m+1} \times \frac{1}{a^m} \quad (8b)
\end{aligned}$$

In den meisten Fällen werden die Querträger zwischen zwei Hauptträgern konstanten Querschnitt haben. Das Trägheitsmoment des Querträgers i zwischen den Hauptträgern m und $m + 1$ bezeichnen wir mit J_i^m , J_c sei ein beliebig wählbares Vergleichsträgheitsmoment. Dann wird:

$$\beta_{i1}^{m-1} = \frac{a^{m-1}}{6 E J_i^{m-1}} \quad \beta_{i2}^{m-1} = \frac{a^{m-1}}{3 E J_i^{m-1}} \quad \alpha_{i1}^m = \frac{a^m}{3 E J_i^m} \quad \alpha_{i2}^m = \frac{a^m}{6 E J_i^m}$$

Wir bezeichnen ferner: $a_i^m \times \frac{J_c}{J_i^m} = \bar{a}_i^m \quad E J_c \times \delta_{ik}^m = \bar{\delta}_{ik}^m$

Nun multiplizieren wir die ganze Gleichung (8a) mit $E J_c$ und erhalten Gleichung 8b (Seite 4 unten).

Zumeist liegen die Hauptträger in gleichen Abständen a . Für diesen Fall vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung weiterhin. Wir multiplizieren die ganze Gleichung mit $(a)^2$.

$$G_i^m: \quad + \sum_{k=1}^l X_k^{m-2} \times \bar{\delta}_{ik}^{m-1} \\ + X_i^{m-1} \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}_i^{m-1} \quad - 2 \sum_{k=1}^l X_k^{m-1} \times (\bar{\delta}_{ik}^{m-1} + \bar{\delta}_{ik}^m) \\ + X_i^m \times \frac{(a)^2}{3} \times (\bar{a}_i^{m-1} + \bar{a}_i^m) + \sum_{k=1}^l X_k^m \times (\bar{\delta}_{ik}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{ik}^m + \bar{\delta}_{ik}^{m+1}) \\ + X_i^{m+1} \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}_i^m \quad - 2 \sum_{k=1}^l X_k^{m+1} \times (\bar{\delta}_{ik}^m + \bar{\delta}_{ik}^{m+1}) \\ + \sum_{k=1}^l X_k^{m+2} \times \bar{\delta}_{ik}^{m+1} = \bar{L}_i^m \\ \bar{L}_i^m = \bar{X}_i^m \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}_i^{m-1} + \bar{a}_i^m) - a (\bar{\delta}_{i0}^{m-1} - 2 \bar{\delta}_{i0}^m + \bar{\delta}_{i0}^{m+1}) \quad \dots \quad (8c)$$

Den einfachsten Fall haben wir in einem System, wo sämtliche Hauptträger und sämtliche Querträger untereinander gleich sind. Dann lautet die Bestimmungsgleichung:

$$G_i^m: \quad + \sum_{k=1}^l X_k^{m-2} \times \bar{\delta}_{ik} \\ + X_i^{m-1} \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a} - 4 \sum_{k=1}^l X_k^{m-1} \times \bar{\delta}_{ik} \\ + X_i^m \times \frac{2(a)^2}{3} \times \bar{a} + 6 \sum_{k=1}^l X_k^m \times \bar{\delta}_{ik} \\ + X_i^{m+1} \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a} - 4 \sum_{k=1}^l X_k^{m+1} \times \bar{\delta}_{ik} \\ + \sum_{k=1}^l X_k^{m+2} \times \bar{\delta}_{ik} = \bar{L}_i^m \\ \bar{L}_i^m = \bar{X}_i^m \times \frac{2(a)^2}{3} \times \bar{a} - a (\bar{\delta}_{i0}^{m-1} - 2 \bar{\delta}_{i0}^m + \bar{\delta}_{i0}^{m+1}) \quad \dots \quad (8d)$$

Um den Aufbau der Bestimmungsgleichungen deutlich zu zeigen, wollen wir die Gleichung (8c) ausschreiben:

Quertr.	Haupttr. m-2	Hauptträger m-1	Hauptträger m	Hauptträger m+1	Haupttr. m+2
1	$+ X_1^{m-2} \times \bar{\delta}_{i1}^{m-1}$	$- 2 X_1^{m-1} \times (\bar{\delta}_{i1}^{m-1} + \bar{\delta}_{i1}^m)$	$+ X_1^m \times (\bar{\delta}_{i1}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{i1}^m + \bar{\delta}_{i1}^{m+1})$	$- 2 X_1^{m+1} \times (\bar{\delta}_{i1}^m + \bar{\delta}_{i1}^{m+1})$	$+ X_1^{m+2} \times \bar{\delta}_{i1}^{m+1}$
k	$+ X_k^{m-2} \times \bar{\delta}_{ik}^{m-1}$	$- 2 X_k^{m-1} \times (\bar{\delta}_{ik}^{m-1} + \bar{\delta}_{ik}^m)$	$+ X_k^m \times (\bar{\delta}_{ik}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{ik}^m + \bar{\delta}_{ik}^{m+1})$	$- 2 X_k^{m+1} \times (\bar{\delta}_{ik}^m + \bar{\delta}_{ik}^{m+1})$	$+ X_k^{m+2} \times \bar{\delta}_{ik}^{m+1}$
i-1	$+ X_{i-1}^{m-2} \times \bar{\delta}_{i,i-1}^{m-1}$	$- 2 X_{i-1}^{m-1} \times (\bar{\delta}_{i,i-1}^{m-1} + \bar{\delta}_{i,i-1}^m)$	$+ X_{i-1}^m \times (\bar{\delta}_{i,i-1}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{i,i-1}^m + \bar{\delta}_{i,i-1}^{m+1})$	$- 2 X_{i-1}^{m+1} \times (\bar{\delta}_{i,i-1}^m + \bar{\delta}_{i,i-1}^{m+1})$	$+ X_{i-1}^{m+2} \times \bar{\delta}_{i,i-1}^{m+1}$
i	$+ X_i^{m-2} \times \bar{\delta}_{ii}^{m-1}$	$+ X_i^{m-1} \times [\frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}_i^{m-1} - 2 (\bar{\delta}_{ii}^{m-1} + \bar{\delta}_{ii}^m)]$	$+ X_i^m \times [\frac{(a)^2}{3} (\bar{a}_i^{m-1} + \bar{a}_i^m) + \bar{\delta}_{ii}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{ii}^m + \bar{\delta}_{ii}^{m+1}]$	$+ X_i^{m+1} \times [\frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}_i^m - 2 (\bar{\delta}_{ii}^m + \bar{\delta}_{ii}^{m+1})]$	$+ X_i^{m+2} \times \bar{\delta}_{ii}^{m+1}$
i+1	$+ X_{i+1}^{m-2} \times \bar{\delta}_{i,i+1}^{m-1}$	$- 2 X_{i+1}^{m-1} \times (\bar{\delta}_{i,i+1}^{m-1} + \bar{\delta}_{i,i+1}^m)$	$+ X_{i+1}^m \times (\bar{\delta}_{i,i+1}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{i,i+1}^m + \bar{\delta}_{i,i+1}^{m+1})$	$- 2 X_{i+1}^{m+1} \times (\bar{\delta}_{i,i+1}^m + \bar{\delta}_{i,i+1}^{m+1})$	$+ X_{i+1}^{m+2} \times \bar{\delta}_{i,i+1}^{m+1}$
l	$+ X_l^{m-2} \times \bar{\delta}_{il}^{m-1}$	$- 2 X_l^{m-1} \times (\bar{\delta}_{il}^{m-1} + \bar{\delta}_{il}^m)$	$+ X_l^m \times (\bar{\delta}_{il}^{m-1} + 4 \bar{\delta}_{il}^m + \bar{\delta}_{il}^{m+1})$	$- 2 X_l^{m+1} \times (\bar{\delta}_{il}^m + \bar{\delta}_{il}^{m+1})$	$+ X_l^{m+2} \times \bar{\delta}_{il}^{m+1}$
$= \bar{L}_i^m = \bar{X}_i^m \times \frac{(a)^2}{3} \times (\bar{a}_i^{m-1} + \bar{a}_i^m) - a (\bar{\delta}_{i0}^{m-1} - 2 \bar{\delta}_{i0}^m + \bar{\delta}_{i0}^{m+1}) \quad (8c)$					

Diese Gleichungen (8) gelten allgemein für beliebig gelagerte Trägerroste. In dieser allgemeinen Form erscheint die Gleichung G_i^m aber nur, falls links und rechts vom Hauptträger m noch je drei weitere Hauptträger vorhanden sind. Im andern Falle werden aus der allgemeinen Gleichung diejenigen Glieder herausgestrichen, für die entweder kein unbekanntes Stützmoment vorkommt oder für die die Durchbiegungen $\delta = 0$ sind.

Wir betrachten zunächst den zweiseitig gelagerten Trägerrost (Balkenbrücken, Abb. 9).

Das Stützmoment des Querträgers über dem Randträger 1 ist als Konsolmoment bekannt. Wir wollen im folgenden die Gleichungen in der Form (8c) anschreiben. Die Gleichung G_1^m (Bestimmungsgleichung für X_1^m) lautet:

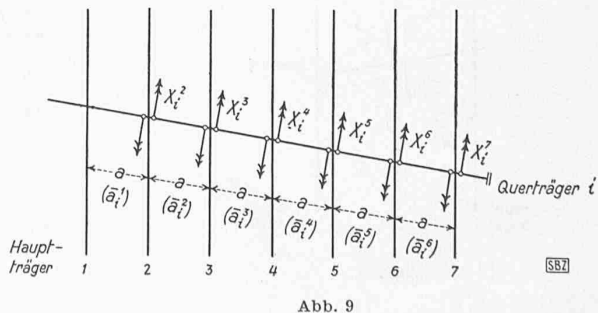


Abb. 9

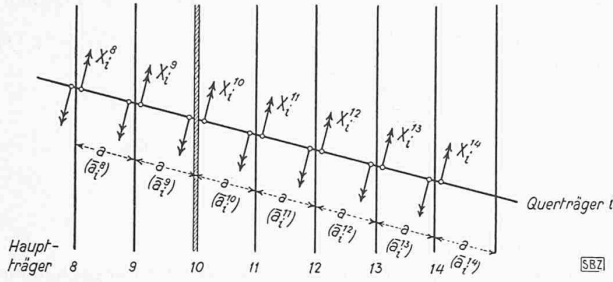


Abb. 12

$$\begin{aligned}
 &+ X^2_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^1_i + \bar{a}^2_i) + \sum_{k=1}^l X^2_k (\bar{\delta}^1_{ik} + 4\bar{\delta}^2_{ik} + \bar{\delta}^3_{ik}) \\
 &+ X^3_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^2_i - 2 \sum_{k=1}^l X^3_k (\bar{\delta}^2_{ik} + \bar{\delta}^3_{ik}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^l X^4_k \times \bar{\delta}^3_{ik} = \bar{L}^2_i = \\
 &= \bar{X}^2_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^1_i + \bar{a}^2_i) - a (\bar{\delta}^1_{i0} - 2\bar{\delta}^2_{i0} + \bar{\delta}^3_{i0})
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass für die Bestimmung von \bar{X}^2_i das Konsolmoment berücksichtigt werden muss (Abb. 10). Die Gleichung G^3_i zur Bestimmung von X^3_i lautet:

$$\begin{aligned}
 &+ X^2_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^2_i - 2 \sum_{k=1}^l X^2_k \times (\bar{\delta}^2_{ik} + \bar{\delta}^3_{ik}) \\
 &+ X^3_i \times \frac{(a)^2}{3} \times (\bar{a}^2_i + \bar{a}^3_i) + \sum_{k=1}^l X^3_k \times (\bar{\delta}^2_{ik} + 4\bar{\delta}^3_{ik} + \bar{\delta}^4_{ik}) \\
 &+ X^4_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^3_i - 2 \sum_{k=1}^l X^4_k \times (\bar{\delta}^3_{ik} + \bar{\delta}^4_{ik}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^l X^5_k \times \bar{\delta}^4_{ik} = \bar{L}^3_i = \\
 &= \bar{X}^3_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^2_i + \bar{a}^3_i) - a (\bar{\delta}^2_{i0} - 2\bar{\delta}^3_{i0} + \bar{\delta}^4_{i0})
 \end{aligned}$$

Erst Gleichung G^4_i hat die volle, allgemeine Form, sofern mindestens sieben Hauptträger vorhanden sind.

Den einfachsten Fall haben wir, wenn bloss drei Hauptträger vorhanden sind (Abb. 11). Die Bestimmungsgleichung für X^2_i lautet dann:

$$\begin{aligned}
 X^2_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^1_i + \bar{a}^2_i) + \sum_{k=1}^l X^2_k \times (\bar{\delta}^1_{ik} + 4\bar{\delta}^2_{ik} + \bar{\delta}^3_{ik}) = \\
 = \bar{L}^2_i = \bar{X}^2_i \times \frac{(a)^2}{3} \times (\bar{a}^1_i + \bar{a}^2_i) - a (\bar{\delta}^1_{i0} - 2\bar{\delta}^2_{i0} + \bar{\delta}^3_{i0})
 \end{aligned}$$

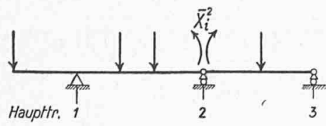


Abb. 10

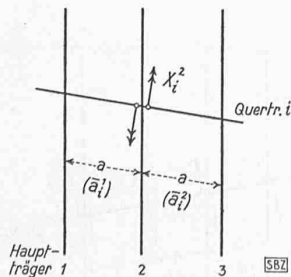


Abb. 11

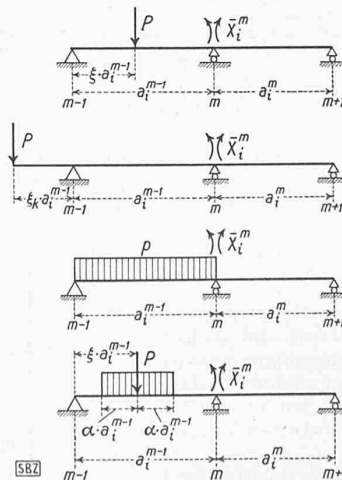


Abb. 13 bis 16

In Trägerrosten mit drei- und vierseitiger Auflagerung haben wir wiederum in der allgemeinen Gleichung (8) diejenigen Glieder wegzulassen, für die entweder kein unbekanntes Stützmoment besteht oder für die die Durchbiegungen $\delta = 0$ sind. Als Beispiel wählen wir den Rost in Abb. 12.

«Hauptträger» 10 sei eine Auflagerwand, somit sind sämtliche $\delta^{10}_i = \delta^{10}_{ik} = 0$. Daher lautet Gleichung G^{10}_i in der Form von (8c):

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{k=1}^l X^9_k \times \bar{\delta}^9_{ik} \\
 &+ X^9_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^9_i - 2 \sum_{k=1}^l X^9_k \times \bar{\delta}^9_{ik} \\
 &+ X^{10}_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^9_i + \bar{a}^{10}_i) + \sum_{k=1}^l X^{10}_k \times (\bar{\delta}^9_{ik} + \bar{\delta}^{11}_{ik}) \\
 &+ X^{11}_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^{10}_i - 2 \sum_{k=1}^l X^{11}_k \times \bar{\delta}^{11}_{ik} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^l X^{12}_k \times \bar{\delta}^{11}_{ik} = \bar{L}^{10}_i = \\
 &= \bar{X}^{10}_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^9_i + \bar{a}^{10}_i) - a (\bar{\delta}^9_{i0} + \bar{\delta}^{11}_{i0})
 \end{aligned}$$

Gleichung G^{11}_i lautet:

$$\begin{aligned}
 &+ X^{10}_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^{10}_i - 2 \sum_{k=1}^l X^{10}_k \times \bar{\delta}^{11}_{ik} \\
 &+ X^{11}_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^{10}_i + \bar{a}^{11}_i) + \sum_{k=1}^l X^{11}_k (4\bar{\delta}^{11}_{ik} + \bar{\delta}^{12}_{ik}) \\
 &+ X^{12}_i \times \frac{(a)^2}{6} \times \bar{a}^{11}_i - 2 \sum_{k=1}^l X^{12}_k (\bar{\delta}^{11}_{ik} + \bar{\delta}^{12}_{ik}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^l X^{13}_k \times \bar{\delta}^{12}_{ik} = \bar{L}^{11}_i = \\
 &= \bar{X}^{11}_i \times \frac{(a)^2}{3} (\bar{a}^{10}_i + \bar{a}^{11}_i) + a (2\bar{\delta}^{11}_{i0} - \bar{\delta}^{12}_{i0})
 \end{aligned}$$

Die Gleichung G^{12}_i hat wiederum die allgemeine Form. Ist der Hauptträger 10 keine Wand, sondern ein Hauptträger, der häufiger abgestützt ist als die übrigen, so sind die δ der aufgelagerten Punkte = 0 und die entsprechenden Glieder sind wegzulassen. Diese Beispiele mögen genügen um darzulegen, wie die allgemeinen Gleichungen (8) anzuwenden sind.

Im Lastglied der Bestimmungsgleichung erscheint das Stützmoment \bar{X}^m_i des Balkens auf drei festen Stützen. Es beträgt für die folgenden Lastfälle und für den Fall, dass die Querträger zwischen zwei Hauptträgern konstanten Querschnitt haben:

$$\bar{X}^m_i = -P \frac{(\xi - \xi^3) \times a_i^{m-1}}{2 \left(1 + \frac{a_i^{m-1}}{a_i^{m-1}}\right)} \dots (9a)$$

$$\bar{X}^m_i = +P \frac{\xi k \times a_i^{m-1}}{2 \left(1 + \frac{a_i^{m-1}}{a_i^{m-1}}\right)} \dots (9b)$$

$$\bar{X}^m_i = -\frac{p \times (a_i^{m-1})^2}{8 \left(1 + \frac{a_i^{m-1}}{a_i^{m-1}}\right)} \dots (9c)$$

$$\bar{X}^m_i = -P \frac{\xi (1 - \xi^2 - \alpha^2) a_i^{m-1}}{2 \left(1 + \frac{a_i^{m-1}}{a_i^{m-1}}\right)} \dots (9d)$$

$$\left(\frac{a_i^m}{a_i} = \frac{m}{J_i} \times \frac{J_c}{J_i^m}\right) \quad (\text{Schluss folgt})$$