

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 117/118 (1941)  
**Heft:** 22

**Artikel:** Näherungsweise Bestimmung von Knicklasten  
**Autor:** Everts, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83563>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

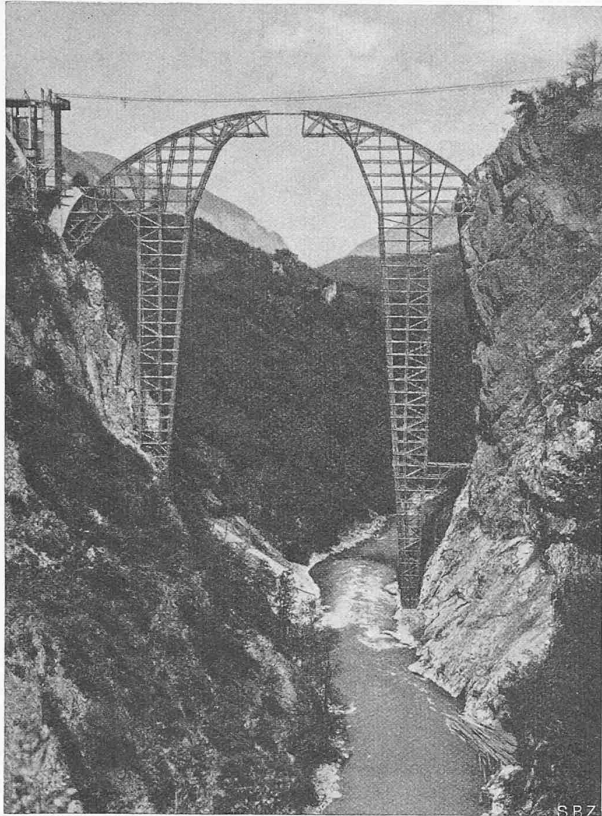


Abb. 3. Schliessen des Lehrgerüsts

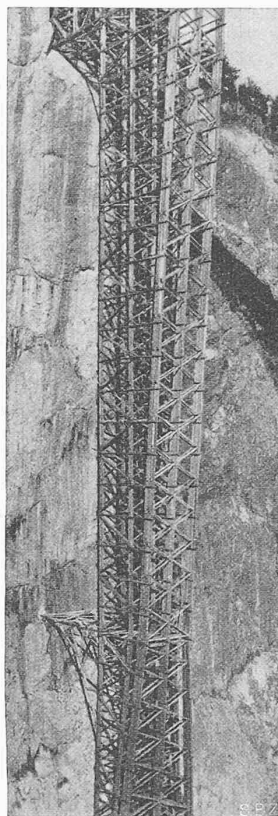


Abb. 4. Rechtsufriger Gerüstturm

ersten Ring, hervorgerufen durch die ringweise Gewölbeerstellung, wieder daraus zum Verschwinden gebracht wird, was namentlich bei Kastengewölben von grosser Spannweite von Bedeutung ist und dadurch ohne die hydraulischen Pressen erreicht werden kann. Es sei damit angedeutet, wie mit Fächer- und Turmgerüsten bei der ringweisen Erstellung von Eisenbetonbögen eine qualitative Steigerung und wohl auch Oekonomie erzielt werden kann. (Entwurf und Ausführung des Lehrgerüsts stammen vom Berichtersteller. Red.)

Die Tarabrücke wurde auf Grund eines öffentlichen Submissionswettbewerbes der auftraggebenden Behörde von der jugoslawischen Privatindustrie projektiert und ausgeführt.

### Näherungsweise Bestimmung von Knicklasten

Von Dipl. Ing. G. EVERTS, Thun

Die im Folgenden angegebene Methode zur näherungsweise Bestimmung der Knicklast von Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment lehnt sich in ihren Grundzügen eng an das bekannte Verfahren von Vianello an. Durch Verwendung des Mittelwertsatzes von Barta (Ing. Archiv 1937, Bd. 8, Seite 35) wird jedoch eine Abschätzung der Fehlabweichung des gefundenen Näherungswertes von der exakten Lösung ermöglicht.

#### Theorie:

Die Differentialgleichung der geraden Stabaxe lautet:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y_x'' = - \frac{M_x}{T_x J_x} = - \frac{P y_x}{T_x J_x} \quad (1)$$

Dabei kann der Einfluss der Querkraft  $\frac{dQ}{dx} \frac{1}{GF}$  bekanntlich vernachlässigt werden.

Mit  $T$  wird der Engesser'sche Knickmodul bezeichnet.

$$T = E_1 \frac{J_1}{J} + E_2 \frac{J_2}{J} \quad (2)$$

Zum Gleichgewicht ist erforderlich:

$$T_x J_x \frac{y_x''}{y_x} = - P \quad (3)$$

Diese Gleichung (3) ergibt nur bei der exakten Biegelinie an jeder Stelle  $x$  immer den gleichen Wert  $P$ . Bei mehr oder weniger willkürlich angenommenen Biegelinien schwankt  $P$  bekanntlich zwischen zwei Grenzen. Nach dem Mittelwertsatz von Barta liegt nun die exakte Knicklast  $P_K$ , die bei Verwendung der genauen Biegelinie gefunden würde, stets zwischen den Grenzen

$$\left( - T_x J_x \frac{y_x''}{y_x} \right)_{\min} \leq P_K \leq \left( - T_x J_x \frac{y_x''}{y_x} \right)_{\max} \quad (4)$$

Die Eulersche Knickgleichung wird dabei wie üblich geschrieben:

$$P_K = \frac{\pi^2 T_c J_c}{l_K^2} \quad (5)$$

wobei  $J_c$  ein beliebiges, jedoch für die ganze Stablänge  $l$  konstant angenommenes Trägheitsmoment,  $T_c$  den zu  $J_c$  gehörigen Knickmodul und  $l_K$  die für  $J_c$  gültige Knicklänge darstellt. Da die Differentialgleichung (1) sowohl linear als auch homogen ist, spielt die Wahl von  $J_c$  keine Rolle.

Die Knicklänge  $l_K$  ist im allgemeinen nicht schon zum Voraus bekannt. Gleichung (5) wird daher geschrieben:

$$P_K = k \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2} \quad (6)$$

wobei  $k l_K^2 = l^2$  ist.

Für  $J_c$  nimmt man meistens am besten ein mittleres Trägheitsmoment an, da andernfalls für die graphische Konstruktion ungünstige Masstabverhältnisse entstehen. Zur Bestimmung des unbekanntes Koeffizienten  $k$  geht man nun wie folgt vor:

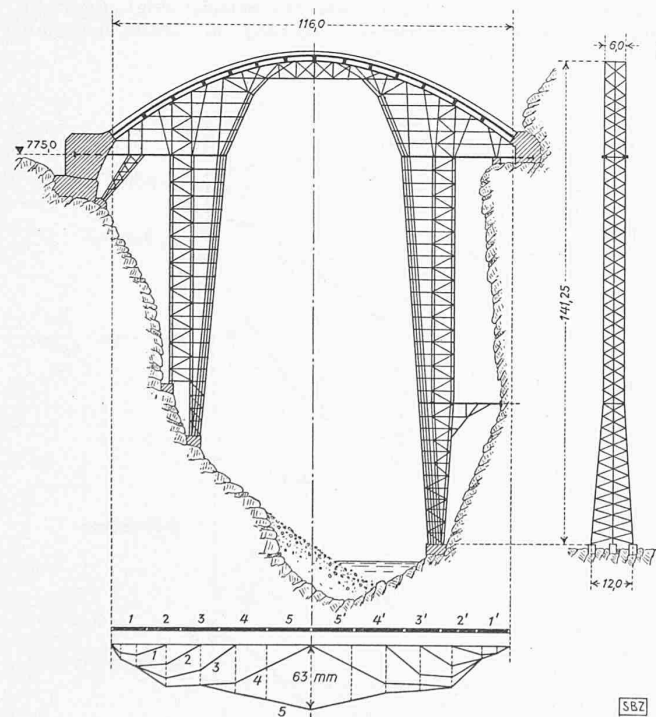


Abb. 2. Lehrgerüst 1 : 2000. Entwurf und Ausführung R. CORAY, Chur Gemessene Einsenkungen unter der Last des ersten Gewölberinges

Ringe sehr vorteilhaft an den Kämpfern mit provisorischen Gelenken versehen werden. Es entstehen dadurch Zweigelenkbögen. Diese provisorischen Gelenke werden zusammen mit den Längsfugen nach dem Absenken des Gerüsts ausbetoniert, wodurch erst das beidseitig eingespannte Gewölbe hergestellt ist. Durch diese Massnahme wird erzielt, dass die Verkürzung des Bogens infolge Schwinden des Betons und Belastung durch sein Eigengewicht sich ohne wesentliche Spannungserhöhung auswirken kann, und dass die zusätzliche Druckspannung im

Man nimmt eine möglichst zweckmässige und einfache Biegelinie  $y_0$  an (Kreisbogen, Parabel oder Sinuslinie, Abb. 1). Würde diese angenommene Biegelinie  $y_0$  der exakten Biegelinie entsprechen, so wäre nach Gleichung (1)

$$P_0 y_{0x} = P_K y_{0x} = -T_x J_x y''_{0x}$$

Meist wird sie jedoch von der tatsächlichen Biegelinie abweichen und mittels des Verfahrens von Vianello einer genaueren Biegelinie  $y_1$  angenähert werden müssen. Die mit Hilfe von  $y_0$  gefundene Knicklast  $P_0$  weicht dadurch auch von der endgültigen Last  $P_K$  ab.

$$P_0 y_{0x} \longrightarrow -T_x J_x y''_{1x}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (6) erhält man:

$$P_0 y_{0x} = k_0 \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2} y_{0x} \longrightarrow -T_x J_x y''_{1x} \quad (7)$$

Wird für die beliebige Last  $P$  in Gleichung (3) die angenäherte Knicklast  $P_0$  eingesetzt, so ist bei Kombination mit Gleichung (6):

$$-T_x J_x y''_{1x} = k_0 \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2} y_{1x}$$

Mit Gleichung (4) zusammen ergibt sich daraus:

$$\left(k_0 \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2}\right)_{\min} \leq P_K \leq \left(k_0 \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2}\right)_{\max}$$

$$(k_0)_{\min} \leq k \leq (k_0)_{\max} \quad (8)$$

Ferner:

$$k_0 = -\frac{J_x T_x}{J_c T_c} \frac{y''_{1x}}{y_{1x}} \frac{l^2}{\pi^2} \quad (9)$$

Gleichung (7) und (9) ergeben:

$$k_0 = k_0 \frac{y_{0x}}{y_{1x}} \quad (10)$$

Für den Fall, dass die angenommene Biegelinie  $y_0$  gleich der Biegelinie  $y_1$  und damit auch gleich der endgültigen Biegelinie ist, wird  $k_0 = k$  und damit auch  $P_0 = P_K$ . Hiermit sind die für den allgemeinen Knickfall gültigen Gleichungen gegeben.

**Anwendung:**

Die Ordinaten  $y$  der Biegelinien werden immer von der Wirkungslinie der Knicklast  $P$  aus gemessen. Diese Wirkungslinie ist dabei festgelegt durch die Biegemomentennullpunkte, bzw. Wendepunkte des Stabes. (Bei gelenkig gelagertem Stabende geht die Wirkungslinie somit stets durch das Gelenk.)

Am nachfolgenden Beispiel eines beidseitig eingespannten Stabes im elastischen Knickbereich,  $T_x = E$ , soll das angegebene Verfahren kurz erläutert werden:

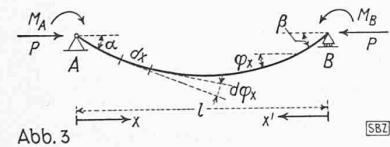


Abb. 3

Zuerst wird der Trägheitsmomenten - Verlauf des Stabes bestimmt und  $J_c$  festgelegt (s. Abb. 2, I). Dann wird eine für den

Stab mögliche Biegelinie  $y_0$  angenommen. Die Wirkungslinie der Knicklast  $P$  muss durch die Momentennullpunkte (Wendepunkte) der Biegelinie gehen (Abb. 2, II). Unter Berücksichtigung der Gleichung (7) wird nun mittels der Biegelinie  $y_0$  die reduzierte Momentenfläche gezeichnet. Bei eingespannten Stabenden muss die Nulllinie dieser Momentenfläche neu konstruiert werden. Für den Fall vollständiger Einspannung ergibt sie sich aus den Bedingungen der Abb. 3.

a)  $\alpha = 0$ , b)  $\beta = 0$ .

Aus diesen zwei Bedingungen ergibt sich

$$c) \int_0^l d\varphi = 0$$

Oder mit andern Worten:

a) Auf Grund der Arbeitsgleichung ist

$$\alpha = \int_0^l \frac{M M' dx}{T_x J_x} = \frac{1}{l T_c J_c} \int_0^l M_{\text{red}} x' dx = 0; \quad M_{\text{red}} = M \frac{T_c J_c}{T_x J_x}$$

$$\text{Daraus: } \int_0^l M_{\text{red}} x dx = 0 \quad \text{wobei } \int_0^l M_{\text{red}} dx = F_{\text{red}}$$

Das heisst: Das statische Moment von  $F_{\text{red}}$  um das Auflager  $B$  muss Null sein.

$$b) \beta = \int_0^l \frac{M M' dx}{T_x J_x} = \frac{1}{l T_c J_c} \int_0^l M_{\text{red}} x dx = 0$$

$$\text{Daraus: } \int_0^l M_{\text{red}} x dx = 0$$

Das heisst: Das statische Moment von  $F_{\text{red}}$  um das Auflager  $A$  muss Null sein.

$$c) \int_0^l d\varphi = 0 = \int_0^l \frac{M dx}{T_x J_x} = \frac{1}{T_c J_c} \int_0^l M_{\text{red}} dx = \frac{1}{T_c J_c} F_{\text{red}} = 0$$

$$\text{Daraus: } F_{\text{red}} = 0$$

Infolge der Umlagerung der Nulllinie der reduzierten Momentenfläche verschieben sich auch die Wendepunkte der angenommenen Biegelinie  $y_0$ , deren Verlauf daher nun auch abgeändert werden muss (siehe Abb. 2, III und II). Mit der reduzierten Momentenfläche als Belastung zeichnet man nun die neue, exaktere Biegelinie  $y_1$ . Als Kontrolle, dass die Bedingungen a), b) und c) auch tatsächlich erfüllt worden sind, müssen die Tangenten der Einspannstellen  $A$  und  $B$  zusammenfallen (Abbildung 2, V).

Als Belastungskräfte werden im Kräftepolygon die um  $\Delta l$  von einander entfernten Ordinaten 1, 2, 3, 4, ... der reduzierten Momentenfläche aufgetragen. Der Polabstand  $H$  ergäbe sich dabei zu  $H = \frac{l^2}{k_0 \pi^2 \Delta l}$

In der graphischen Konstruktion wird jedoch der um  $k_0$  zu grosse Wert  $H = \frac{l^2}{\pi^2 \Delta l}$  verwendet.

Dadurch wird auch die Biegelinie  $y_1$  um  $k_0$  zu gross. Nach Gleichung (10) ist dann

$$k_0 = k_0 \frac{y_{0x}}{k_1 y_{1x}} \quad \text{und somit } k_0 = \frac{y_{0x}}{y_{1x}}$$

An jeder Stelle  $x$  wird der  $k_0$ -Wert gerechnet, indem das Verhältnis der abgeänderten  $y_0$ -Biegelinie zur  $y_1$ -Biegelinie gebildet wird. Nach dem Mittelwertsatz von Barta, Gleichung (8), muss dann  $(k_0)_{\min} < k < (k_0)_{\max}$  sein (Abb. 2, VI).

Um eine bessere Annäherung der  $k$ -Werte zu erreichen, wird das ganze Verfahren, diesmal jedoch von der genaueren Biegelinie  $y_1$  ausgehend, wiederholt (Abb. 2, VII). Eine dritte Näherung ist wohl kaum nötig, da, wie das Beispiel zeigt, die Streuung der  $k$ -Werte der zweiten Näherung,  $k_1$ , schon innerhalb einer Toleranz von  $\pm 5\%$  liegt.

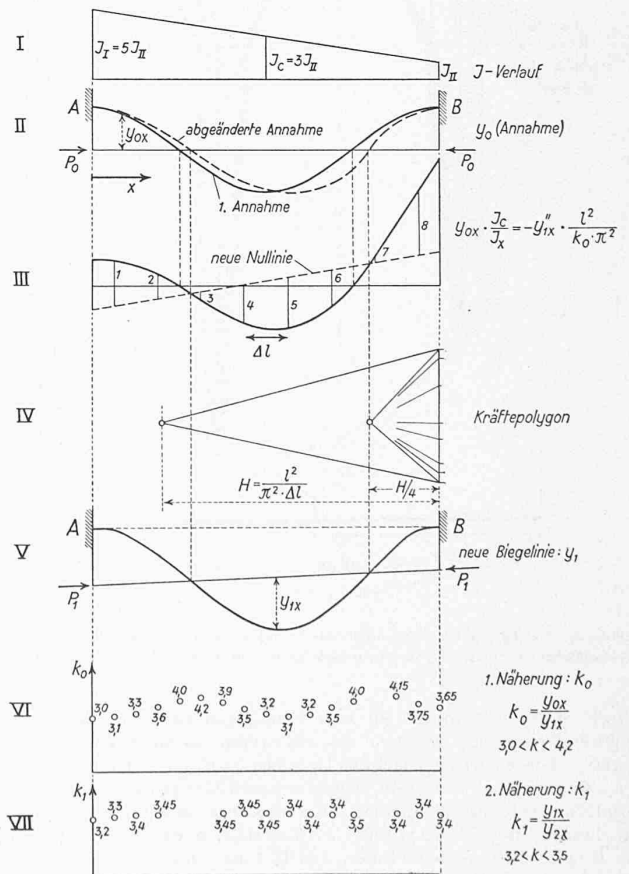


Abb. 2 Beidseitig eingespannter Stab