

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 119/120 (1942)
Heft: 4

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Contribution à l'étude des plaques obliques. — Das Kraftwerk Innertkirchen, die zweite Stufe der Oberhasliwerke. — Neuere Akkumulatoren-Lokomotiven. — Aktuelle Schmieröl- und Treibstoff-Fragen. — Die Steigsiedelung in Schaffhausen. — Eigenes Heim des Architekten Walter Henne. — Mitteilungen: Bodenvermörtelung mit

Zement im Strassenbau. Sintermetall-Gleitlager. — Nekrologe: Jakob Schnurrenberger. Eduard Wagner. — Wettbewerbe: Kant. Verwaltungsgebäude Liestal. Freiplastiken auf dem alten Tonhalleareal in Zürich. Neubau des Crédit foncier vaudois in Yverdon. Petruskirche mit Kirchengemeindehaus Bern. — Literatur.

Contribution à l'étude des plaques obliques

Par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale

Les plaques sollicitées à la flexion et limitées par un cercle, une ellipse ou un rectangle ont été l'objet de nombreuses études théoriques. On rencontre cependant aussi, dans la pratique, des plaques dont le contour est un parallélogramme. Elles sont appelées «obliques» pour les distinguer de la forme rectangulaire.

Le problème de la flexion des plaques obliques n'a tenté, jusqu'ici, que de rares théoriciens¹⁾. Cela est certainement dû au fait que, si l'on utilise des coordonnées rectangulaires, les conditions aux limites sont moins simples à exprimer pour un parallélogramme que pour un rectangle.

Le but de ce mémoire est double.

Il est tout d'abord destiné à établir les principales équations régissant l'équilibre de la plaque limitée par un parallélogramme, en utilisant un système de coordonnées cartésiennes obliques, dont deux des axes sont parallèles aux côtés du parallélogramme et le troisième perpendiculaire à son plan. C'est le système le mieux adapté à la forme de plaque considérée. Il permet d'exprimer les conditions au contour avec la même commodité que les coordonnées rectangulaires le permettent dans le cas du rectangle, ce qui est un grand avantage pour les recherches théoriques.

En outre ce mémoire présente, comme application, une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encadrée, à charge uniformément répartie.

1. Rappel des principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes rectangulaires

Considérons une plaque d'épaisseur h , sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces et posée ou encadrée le long du pourtour²⁾ (fig. 1). Choisissons un système cartésien rectangulaire fixe $Oxyz$, les axes x, y étant situés dans le plan équidistant des faces, avant la déformation. Soit $\zeta_0 = \overline{PP'}$ le déplacement, parallèle à z , d'un point $P(x, y)$ de ce plan. Le lieu des points $P'(x, y, \zeta_0)$ est la «surface élastique».

On démontre, dans la théorie des plaques, que les tensions $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ en un point (xyz) sont liées aux déformations par les relations suivantes³⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0; \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

où E désigne le module d'élasticité et $\nu = \frac{1}{m}$ le coefficient de Poisson.

¹⁾ Citons: Brigatti, C. V.: Applicazione del metodo di H. Marcus al calcolo della piastra parallelogrammica. Ric. Ingegn. 6, 1938.
²⁾ Anzelius, A.: Ueber die elastische Deformation parallelogrammförmiger Platten. Bauingenieur 20, 1939.
 Vogt, H.: Die Berechnung schiefwinkliger Platten und plattenartiger Brückensysteme. Dissertation der Technischen Hochschule Hannover, 1940.
³⁾ Une plaque est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque, est relativement petite par rapport aux autres dimensions. Les bases de ce solide constituent les «faces» de la plaque. Comme l'épaisseur est petite, on assimile souvent les faces latérales à une ligne qui est le «pourtour» ou «contour» de la plaque.
⁴⁾ Voir par exemple: A. et L. Föppl, Drang und Zwang. Oldenbourg, Munich et Berlin 1941, p. 126 et suiv.

Les formules (1) permettent de calculer les tensions dès que l'on connaît $\zeta_0(x, y)$. Cette fonction doit 1°) satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre:

$$\Delta \Delta \zeta_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} p, \quad (2)$$

$p(x, y)$ étant la charge par unité de surface; 2°) remplir les conditions au contour.

Le travail intérieur de déformation est donné par l'intégrale double suivante, étendue à la surface F de la plaque:

$$A = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint (F) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dF. \quad (3)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit, pour une déformation définie par une variation $\delta \zeta_0$ de ζ_0 qui satisfait aux conditions imposées au contour:

$$\iint (F) p \delta \zeta_0 dF - \delta A = 0. \quad (4)$$

2. Principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes obliques

Pour établir ces équations, nous utiliserons les relations (1) à (4) et ferons un changement de coordonnées.

Soit x, y, z le système précédemment défini. Nous introduisons un second système u, v, z tel que les axes u, z coïncident respectivement avec x, z , l'axe v étant situé dans le plan x, y et faisant l'angle α avec u (fig. 2).

Les formules de transformation sont (fig. 3):

$$x = u + v \cos \alpha, \quad y = v \sin \alpha, \quad z = z; \quad (5)$$

d'où:

$$u = x - \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad v = \frac{y}{\sin \alpha}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Remarquons que ζ_0 peut être considéré comme fonction composée des variables indépendantes x, y :

$$\zeta_0 = \zeta_0 [u(x, y), v(x, y)],$$

d'où les formules de transformation suivantes:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \cdot 0, \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right), \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \quad (11)$$

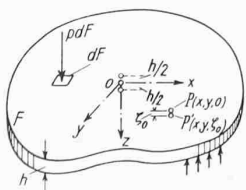


Fig. 1

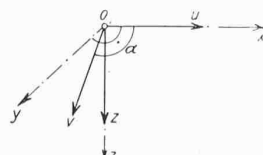


Fig. 2

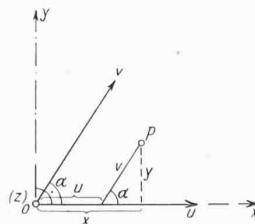


Fig. 3

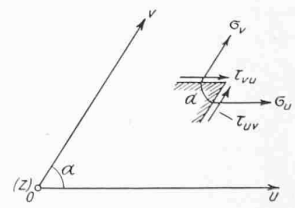


Fig. 4