

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 119/120 (1942)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Contribution à l'étude des plaques obliques  
**Autor:** Favre, Henry  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52405>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

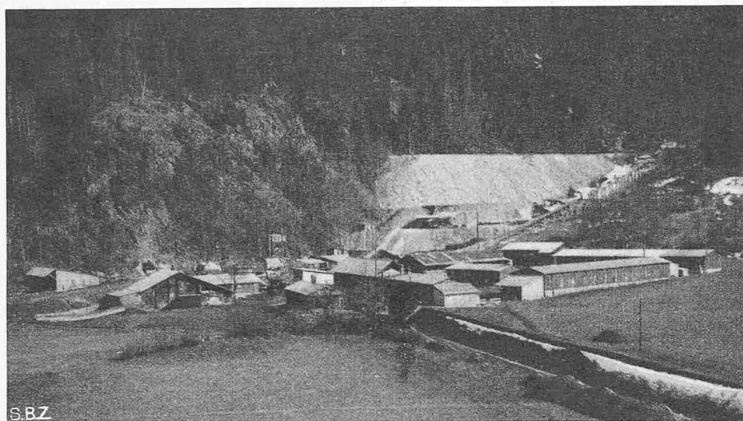
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



erschloss man von diesem Stollen aus die Schieberkammer, und von dieser aus die übrigen Stränge der Verteilung und die Turbinen-Zuleitungen. Die grosse Kaverne wurde durch zwei Stollen auf Kämpferhöhe des Gewölbes und einen Firststollen angegriffen. Gleichzeitig gelangte man durch den Ausbruch des Hauptzuganges (Abb. 30) auf Höhe des Maschinensaalbodens in das Nordende der grossen Kaverne, sowie durch den Vortrieb des Kabelstollens in ihre mittlere Region. Durch den Ausbruch des Zugangstollens zur Messkammer wurde diese selbst und der Unterwasserkanal in Angriff genommen, sodass schon im November 1940 an nicht weniger als vier Stellen Ausbruchgestein zu Tage gefördert und auf die grosse Deponie geführt wurde. Diese verlegte man südlich des Zentralenkopfes an die Halde hinauf, sodass die Materialzüge über einen Bremsberg hinangezogen werden mussten (Abb. 31). (Schluss folgt)

Abb. 31. Baustelle der Zentrale Innertkirchen. Am linken Fuss der Ausbruch-Deponie Mundloch des südlichen Baufensters, links Mündung des Hauptzuganges. Rechts vorn Zufahrtstrasse und -Bahngeleise

Contribution à l'étude des plaques obliques

Par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich (Suite de la page 36)

Während die Baukosten des Maschinenhauses Handeck einschliesslich Unterbau und Umgebungsarbeiten, Anschlussstrasse, Ablaufkanäle usw. rd. Fr. 2 300 000 betragen haben für rd. 42 000 m<sup>3</sup> umbauten Raumes, was einem Betrag von 55 Fr./m<sup>3</sup> entspricht, betragen diese Kosten bei der Kavernenanlage in Innertkirchen für 60 000 m<sup>3</sup> rd. 3 450 000 Fr., also etwa 62 Fr./m<sup>3</sup>. Bei der Handeck haben die Kosten des Maschinenhauses mit Zubehör (ohne elektro-mech. Ausrüstung)  $\frac{2\,300\,000}{120\,000} = \text{rd. } 19 \text{ Fr. pro PS}$  installierte Leistung erreicht. In Innertkirchen betragen sie nur  $\frac{3\,450\,000}{280\,000} = \text{rd. } 13 \text{ Fr. pro PS}$  installierte Leistung beim Vollausbau.

Aus diesen Vergleichen geht hervor, dass eine solche Kavernenanlage bei den Verhältnissen, wie sie in Innertkirchen vorliegen, nicht teurer kommt als die Unterbringung der Maschinenanlage in einem freistehenden Gebäude.

Die Bauausführung begann im Sommer 1940 mit der Ausweitung des südlichen Baufensters (vgl. Kap. II, Seite 28), das durch den ersten Strang der Verteilung und damit in den Druckschacht weiter getrieben wurde. Vom Juli bis zum Oktober

Remarquons que  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$  ne sont pas en général normales aux éléments de surface. Dans le cas particulier où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , les nouvelles composantes des tensions coïncident avec les anciennes. On peut alors remplacer les indices  $u, v$  par  $x, y$ . En appliquant le théorème des moments, par rapport à un axe  $O'$  parallèle à  $z$ , on voit que (fig. 5):

$$\tau_{uv} = \tau_{vu} \dots \dots \dots (13)$$

quel que soit  $\alpha$ .

Quant aux tensions  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , elles sont remplacées par  $\sigma_z, \tau_{vz}, \tau_{zu}$ , dont la définition est évidente. Les indices de chancue des tensions  $\tau_{vz}, \tau_{zu}$  peuvent également être permutés.

Cherchons les relations entre les nouvelles et les anciennes tensions. La comparaison des deux parties de la fig. 6 montre que:

$$\sigma_y = \sigma_v \sin \alpha, \quad \tau_{xy} = \tau_{uv} + \sigma_v \cos \alpha.$$

D'autre part la somme des projections, sur l'axe  $u$ , des forces agissant sur l'élément de volume indiqué à la fig. 7 doit être nulle:

$$\sigma_u + \tau_{uv} \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma_x \sin \alpha = 0.$$

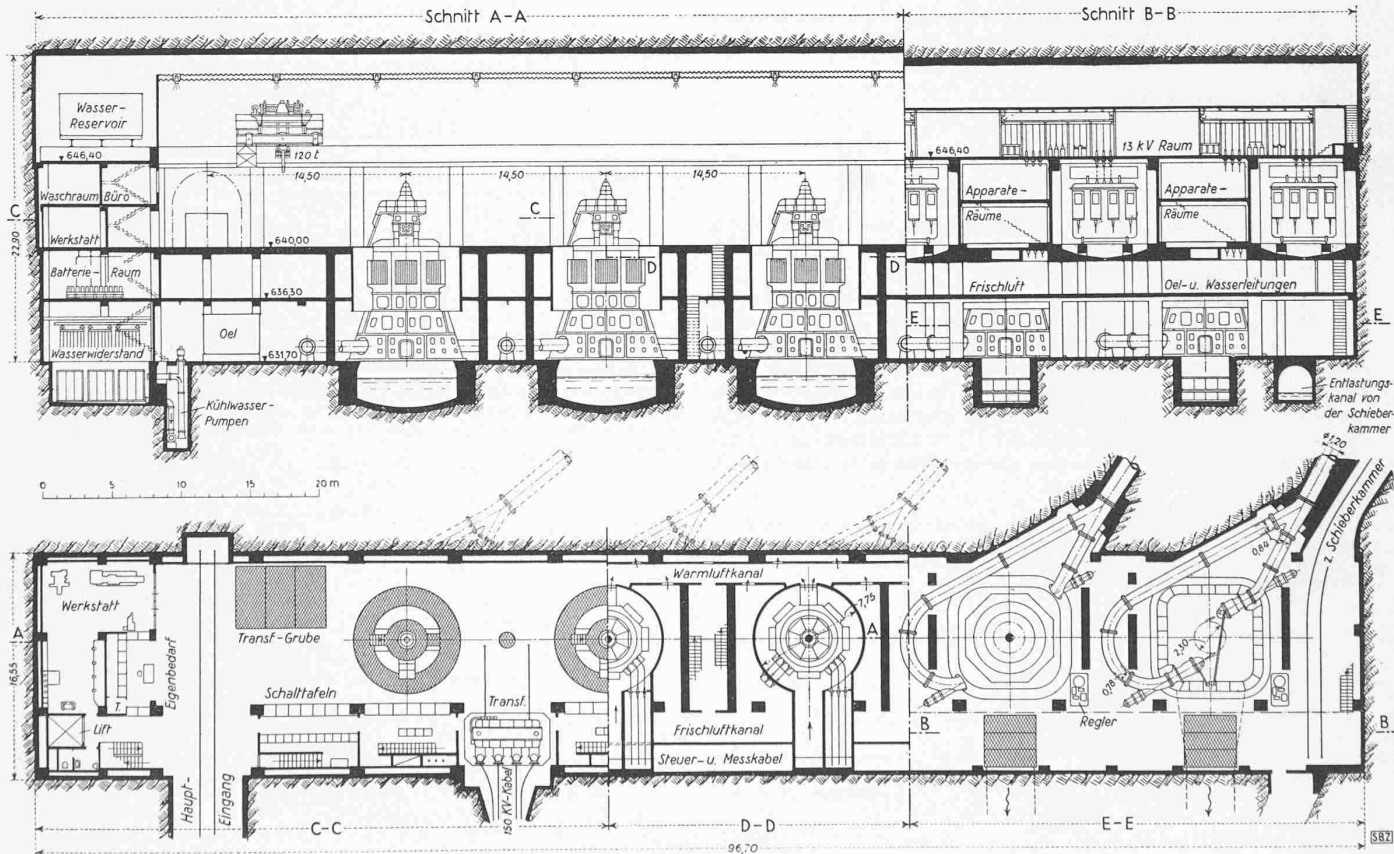


Abb. 28. Zentrale Innertkirchen. Längsschnitt A-B und gestufter Grundriss C-D-E, Masstab 1 : 500

Résolvant par rapport à  $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$  le système constitué par les trois dernières équations, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \sin \alpha \sigma_x + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \sigma_y - 2 \cos \alpha \tau_{xy}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sin \alpha} \sigma_y, \quad \tau_{uv} = \tau_{xy} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \sigma_y. \end{aligned} \right\}$$

Remplaçons finalement  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  par les valeurs (1'), nous obtenons les expressions des tensions obliques en fonction des déformations:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right], \\ \sigma_v &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right], \\ \tau_{uv} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \cos \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) + \{ (1+\nu) \sin^2 \alpha - 2 \} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right], \\ \sigma_z = \tau_{vz} = \tau_{zu} &= 0. \end{aligned} \right\} (1'')$$

Les seconds membres de (1'') sont beaucoup plus symétriques que ceux de (1').

On retrouve (1) (2) (3) (4) en faisant  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $u = x$ ,  $v = y$  dans les formules (1'') (2'') (3'') (4'').

3. Application aux plaques obliques

Soit une plaque dont le contour est un parallélogramme de côtés  $2a$  et  $2b$  faisant un angle  $\alpha$ . Choisissons, dans le plan équidistant des faces, le système  $u, v, z$  indiqué à la fig. 8. Les conditions au contour s'écriront sans difficulté, grâce au choix des coordonnées. Par exemple, dans les deux cas suivants, nous aurons:

1°) plaque posée:

$$\left. \begin{aligned} \text{pour } u = \pm a: \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} = 0, \\ \text{pour } v = \pm b: \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} = 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

(les conditions relatives aux dérivées secondes expriment que  $\sigma_u = 0$  pour  $u = \pm a$  et  $\sigma_v = 0$  pour  $v = \pm b$ , comme le montrent les deux premières formules (1'') en tenant compte de la condition  $\zeta_0 = 0$  le long du pourtour. On sait, depuis les travaux de Kirchhoff, qu'il n'est pas nécessaire d'annuler les tensions tangentielles le long du contour).

2°) plaque encastrée:

$$\left. \begin{aligned} \text{pour } u = \pm a: \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} = 0, \\ \text{pour } v = \pm b: \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} = 0. \end{aligned} \right\} (15)$$

Si la charge  $p(u, v)$  est donnée, la solution rigoureuse du problème consistera à trouver l'unique intégrale de (2') satisfaisant aux conditions (14) ou (15) 4).

Une méthode approchée résidera dans l'application du principe des travaux virtuels (4'). On choisira pour  $\zeta_0$  une fonction de  $u, v$  satisfaisant aux conditions au contour et contenant un certain nombre de coefficients inconnus. En donnant à ces coefficients des variations arbitraires on obtiendra, par application de (4'), autant d'équations qu'il y a de coefficients. Le principe de cette méthode a été donné par Ritz 5). L'exactitude sera d'autant plus grande que la fonction choisie sera plus adéquate à représenter la surface élastique.

4) On sait en effet que dans chaque cas déterminé le problème n'a qu'une solution (voir par exemple *Föppl*, loc. cit., p. 33 et suiv.).

5) *W. Ritz: Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*, *Drude, Ann. d. Physik* 28, p. 737, 1909.

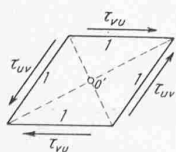


Fig. 5

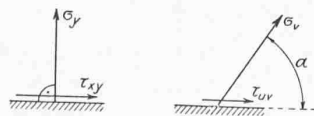


Fig. 6

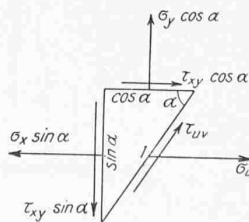


Fig. 7

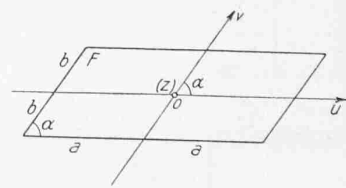


Fig. 8

En général, cette méthode donnera des solutions dont l'approximation suffira à l'ingénieur 6).

Supposons que les conditions au contour soient symétriques par rapport à l'axe  $z$  (c'est le cas de (14) ou (15)) et que l'on ait en outre  $p(-u, -v) \equiv p(u, v)$ , . . . . . (16) c'est-à-dire que les charges soient également symétriques par rapport à cet axe: la surface élastique elle-même sera symétrique par rapport à  $z$ .

En effet, supposons qu'il existe une solution  $\zeta_0(u, v)$  asymétrique par rapport à cet axe. Changeons le sens des axes  $u, v$ , ce qui revient à les faire tourner de  $180^\circ$  dans leur plan. Cette solution sera alors représentée par la fonction  $\zeta_0(-u, -v)$  qui vérifiera la même équation (2'), puisque  $\alpha$  n'a pas changé et que  $p(-u, -v) \equiv p(u, v)$ . Cette fonction satisfera à des conditions au pourtour qui sont aussi les mêmes que précédemment, par raison de symétrie.

Or nous avons précisé que, pour des conditions au pourtour et des charges données, la solution de (2') est unique. Il faut donc nécessairement que

$$\zeta_0(-u, -v) \equiv \zeta_0(u, v), \dots (17)$$

ce qui justifie la proposition énoncée.

Voyons maintenant quelle est l'expression du travail de déformation d'une plaque oblique. Nous avons trouvé pour  $A$  l'expression générale (3'), valable pour un contour et des conditions d'appui quelconques.

Si la plaque a la forme d'un parallélogramme et si  $\zeta_0$  est nul le long du contour, cette expression se simplifie, car:

$$\iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} du dv = \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv. \dots (18)$$

En effet:

$$\begin{aligned} \iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} du dv &= \int_{-b}^+ dv \int_{-a}^+ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right) du = \\ &= \int_{-b}^+ dv \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right]_{-a}^+ - \int_{-a}^+ \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial u \partial v^2} du \right\} = - \\ &= - \int_{-a}^+ du \int_{-b}^+ \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial u \partial v^2} dv = - \\ &= - \int_{-a}^+ du \int_{-b}^+ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right) dv = - \\ &= - \int_{-a}^+ du \left\{ \left[ \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right]_{-b}^+ - \int_{-b}^+ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 dv \right\} = \\ &= \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv. \end{aligned}$$

L'expression (3') s'écrit, compte tenu de (18):

$$\boxed{A = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \iint_{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1+2\cos^2\alpha) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4\cos\alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right\} du dv.} \dots (3'')$$

6) Une autre méthode approchée consistera à utiliser des équations aux différences. A cet effet, on choisira un réseau constitué par des parallèles aux axes  $u$  et  $v$ . L'équation (2') sera remplacée par les deux suivantes:

$$\Delta U = \frac{12(1-\nu^2)p}{Eh^3}, \quad \Delta \zeta_0 = U,$$

où

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

et  $U$  désigne une fonction de  $u, v$ .

Chacune de ces deux relations sera elle-même remplacée par un système d'équations linéaires.

Telle est la valeur du travail intérieur de déformation de la plaque oblique dont le contour (posé ou encastré) satisfait à la condition:

$$\zeta_0 = 0 \text{ pour } u = \pm a \text{ et } v = \pm b.$$

4. La plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie. Calcul de la flèche

Soit  $p_0$  la charge constante. Choisissons tout d'abord, pour  $\zeta_0(u, v)$ , la fonction très simple

$$\zeta_0 = \frac{f}{4} \left( \cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left( \cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right). \quad (19)$$

On vérifie facilement qu'elle satisfait aux conditions au contour de la plaque encastrée (15) ainsi qu'à celle de symétrie par rapport à l'axe  $z$  (17).  $f$  désigne une constante qui est à déterminer à l'aide de (4') en utilisant pour  $A$  l'expression (3''). Cette constante est la flèche au centre de la plaque, car  $\left. \begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix} \right\} \zeta_0 = f$ .

Des calculs élémentaires donnent:

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)^2 du dv = \frac{3}{16} ab \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 f^2,$$

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right)^2 du dv = \frac{3}{16} ab \left( \frac{\pi}{b} \right)^4 f^2,$$

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv = \frac{1}{16} ab \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 f^2,$$

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} du dv = 0^7);$$

$$A = \frac{E h^3 \pi^4}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

$$\delta A = \frac{E h^3 \pi^4}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right];$$

$$\delta \zeta_0 = \frac{\delta f}{4} \left( \cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left( \cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right),$$

$$\int \int (F) p_0 \delta \zeta_0 du dv = p_0 ab \delta f.$$

Introduisons ces valeurs dans (4'):

$$\sin \alpha p_0 ab \delta f - \frac{E h^3 \pi^4}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right] = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à  $f$ :

7) Cette dernière intégrale est nulle lorsqu'on prend pour  $\zeta_0$  une expression de la forme  $P_1(u)P_2(v)$ ,  $P_1$  étant une fonction de  $u$  s'annulant pour  $\pm a$ ,  $P_2$  une fonction de  $v$  ayant pour racines  $\pm b$ .

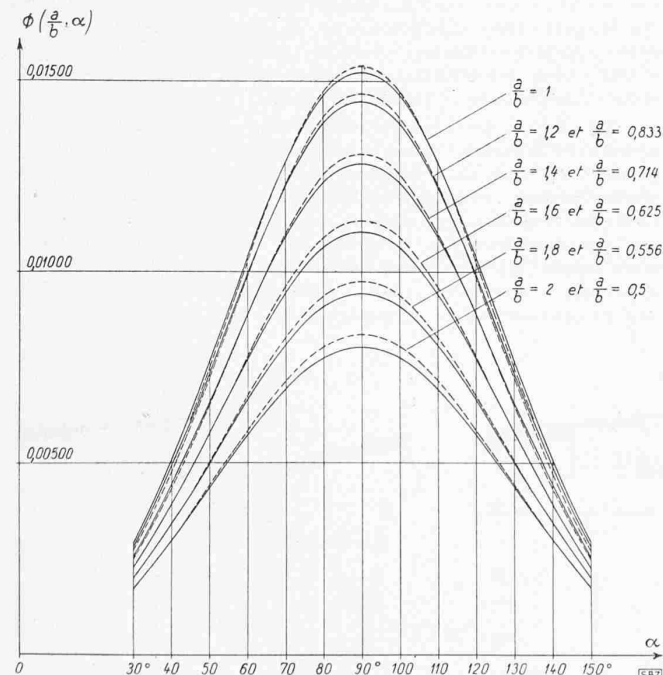


Fig. 9. Représentation graphique de la fonction  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ :  
 --- d'après la formule (23), ——— d'après la formule proposée (28)

$$f = 0,6570 \frac{(1 - \nu^2) p_0}{E h^3} \frac{a^2 b^2 \sin^4 \alpha}{\frac{2}{3} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} \quad (20)$$

Si l'on remarque que

$$F = 4ab \sin \alpha, \quad (21)$$

la valeur de la flèche peut aussi s'écrire:

$$f = (1 - \nu^2) \frac{F^2 p_0}{E h^3} \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right), \quad (22)$$

où

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{0,04106 \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} \quad (23)$$

est un facteur numérique qui ne dépend que du rapport  $\frac{a}{b}$  et de l'angle  $\alpha$ , c'est-à-dire de la forme des faces de la plaque. La fig. 9 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$ , pour  $0,5 < \frac{a}{b} < 2$  et  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$  (trait interrompu). Elle montre clairement l'influence de la forme sur la valeur de la flèche, dans le domaine particulièrement intéressant pour l'ingénieur.

La surface (19) a ceci de particulier que les profils axiaux  $u = 0$  et  $v = 0$  sont des lignes dont la courbure a la même valeur absolue au centre et aux extrémités<sup>9)</sup>. Cette égalité n'existe certainement pas pour la surface élastique réelle. En d'autres termes la fonction choisie ne tient aucunement compte de la courbure des profils axiaux.

On obtiendra donc une meilleure approximation en prenant pour  $\zeta$ , une expression qui satisfait à certaines conditions de courbure. Nous allons le faire sans que cela entraîne de grandes complications dans les calculs. Choisissons pour  $\zeta_0$  une fonction telle que, dans le cas particulier de la plaque carrée, les profils axiaux aient une courbure convenable au centre et aux extrémités.

M. Nadai a précisément indiqué, dans son remarquable ouvrage «Elastische Platten», une méthode de très bonne approximation pour le calcul des plaques rectangulaires encastrées à charges uniformément réparties<sup>10)</sup>. Des chiffres précis indiqués il est facile de déduire que, pour la plaque carrée, le rapport de la courbure aux extrémités d'un profil axial à la courbure au centre est de -2,900.

Prenons alors pour  $\zeta_0$  la fonction suivante, qui satisfait à la condition de symétrie (17):

$$\zeta_0 = \varepsilon (u^6 + \alpha a^2 u^4 + \beta a^4 u^2 + \gamma a^6) \cdot (v^6 + \alpha b^2 v^4 + \beta b^4 v^2 + \gamma b^6). \quad (24)$$

Déterminons les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  en tenant compte que le profil  $v = 0$  (ou  $u = 0$ ) doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$\left. \begin{matrix} \zeta_0 \\ u = \pm a \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left. \begin{matrix} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \\ u = \pm a \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \\ u = +a \end{matrix} \right\} : \left. \begin{matrix} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \\ u = 0 \end{matrix} \right\} = -2,900, \quad (25)$$

ce qui donne, après simplifications, les trois équations

$$\left. \begin{matrix} 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ 3 + 2\alpha + \beta = 0, \\ 15 + 6\alpha + 3,900 = 0; \end{matrix} \right\}$$

dont la solution est:

$$\alpha = +1,834, \quad \beta = -6,668, \quad \gamma = +3,834.$$

Si, en outre, nous remplaçons  $\varepsilon$  par  $\frac{f}{\gamma^2 a^6 b^6} = \frac{f}{14,699 a^6 b^6}$ , nous obtenons pour  $\zeta_0$ :

$$\zeta_0 = \frac{f}{14,699 a^6 b^6} (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (v^6 + 1,834 b^2 v^4 - 6,668 b^4 v^2 + 3,834 b^6), \quad (26)$$

où  $f$  désigne une constante qui est à déterminer à l'aide de (4'); ce n'est autre que la flèche au centre de la plaque.

On obtient par des calculs élémentaires:

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)^2 du dv = 24,083 \frac{b}{a^3} f^2,$$

$$\int \int (F) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right)^2 du dv = 24,083 \frac{a}{b^3} f^2,$$

<sup>8)</sup> On obtient le même résultat en égalant le travail intérieur de déformation  $A$  donné par (3'') à la valeur  $\frac{\sin \alpha}{2} \int \int (F) p_0 \zeta_0 du dv$  du travail des forces extérieures.

<sup>9)</sup> Tout profil  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  de la surface (19) jouit d'ailleurs de cette propriété.

<sup>10)</sup> Springer, Berlin, 1925, p. 180 et suiv.

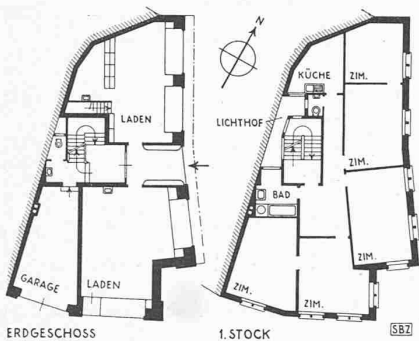
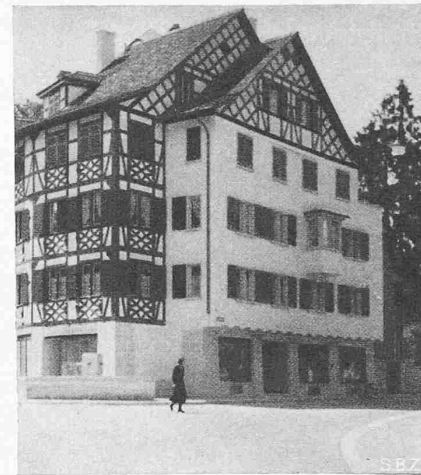
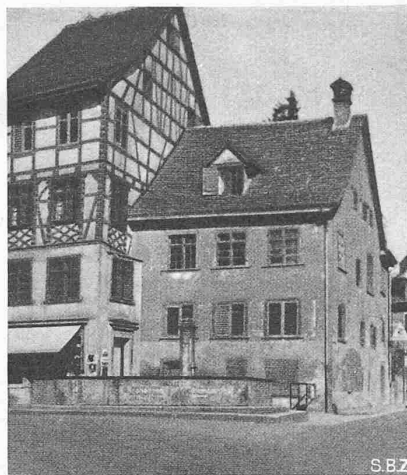


Abb. 1. Grundrisse des Neubaus 1 : 400

Abb. 2 und 3 (rechts). Altbau und Neubau

Haus zur Farb, Schaffhausen



$$\iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv = 6,018 \frac{f^2}{ab}$$

$$\iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} du dv = 0.$$

$$A = \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

$$\delta A = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

$$\iint_{(F)} p_0 \delta \zeta_0 du dv = 1,2240 p_0 ab \delta f.$$

L'équation des travaux virtuels (4') s'écrit :

$$1,2240 \sin \alpha p_0 ab \delta f - \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right] = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à f :

$$f = 0,6100 \frac{(1 - \nu^2) p_0}{E h^3} \frac{a^2 b^2 \sin^4 \alpha}{\frac{1}{2} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \cos^2 \alpha} \quad (27)$$

Cette valeur de la flèche peut s'écrire :

$$f = \frac{(1 - \nu^2) F^2 p_0}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right), \quad (22)$$

où

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{0,03813 \sin^2 \alpha}{\frac{1}{2} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \cos^2 \alpha} \quad (28)$$

La fig. 9 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$  (trait continu).

Si nous comparons les courbes  $\Phi$  données par la formule (23), à celles données par (28), on voit qu'elles diffèrent peu dans le domaine considéré. La flèche ne dépend donc pas beaucoup du choix de  $\zeta_0(u, v)$ , pourvu que les conditions (15) et (17) soient satisfaites. Ceci est très compréhensible. En effet,  $f$  dépend de la déformation de toute la surface de la plaque et ne peut être que relativement peu influencé par la répartition de la courbure.

Il est toutefois évident que les formules (27) et (28) sont plus exactes que (20) et (23) — surtout pour des formes voisines de la plaque carrée — puisque nous avons choisi  $\zeta_0$  de façon à ce que les profils axiaux aient, pour  $a = b$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , une courbure correspondant autant que possible à la réalité.

C'est pourquoi nous proposons, pour le calcul de la flèche, les formules (27) et (28). Il faut s'attendre, dans le domaine  $0,5 < \frac{a}{b} < 2, 30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , à ce qu'elles donnent  $f$  à quelques pour cent près.

La fig. 9 montre que, pour des valeurs  $F, h, E, \nu, p_0$  données, c'est la plaque carrée ( $a = b, \alpha = 90^\circ$ ) qui accuse la plus grande flèche. Si  $\frac{a}{b}$  est aussi donné, la flèche est maximum pour la plaque rectangulaire ( $\alpha = 90^\circ$ ). Enfin, si  $F, h, E, \nu, p_0, \alpha$  sont donnés,  $f$  est maximum pour la plaque dont le contour est un losange ( $a = b$ ). Ces résultats s'obtiennent également facilement par voie analytique. (Fin voir page 60)

Drei Neubauten in der Schaffhauser Altstadt

Von Arch. ARNOLD MEYER, Hallau

Haus zur Farb auf der Steig, erbaut 1934 (Abb. 1 bis 3). Nachdem bereits einige Jahre früher von der Einwohnergemeinde Schaffhausen vorsorglicherweise das in Frage stehende Haus erworben worden war, nahm man 1934 eine Strassenverbreiterung vor. Die kleine übrig bleibende Baustelle wurde von den Stadtbehörden zur Wiederbebauung zum Verkauf angeboten mit der Verpflichtung, aus Rücksicht auf das Stadtbild das bestehende Eichenriegelwerk zu erhalten. Unter verschiedenen eingereichten Vorschlägen wurde vom Stadtrat dem Projekt, das der vorliegenden Ausführung zu Grunde lag, der Vorzug gegeben. Bei der weiteren Untersuchung zeigte sich aber, dass die Erhaltung des Riegelwerkes unmöglich war, da das Holz sich teilweise in sehr schlechtem Zustand befand. Daher wurde versucht, den Forderungen des Stadtrates Folge zu geben durch eine dem alten Bilde nahekommende Neuausführung.

Die durch die Strassenerweiterung ausserordentlich klein gewordene Baustelle konnte durch eine auf der Ostseite auf die ganze Tiefe des Grundstückes durchgeführte Auskragung der Obergeschosse (zwischen die auskragenden I-Träger sind kleine Gewölbe gespannt, vgl. Abb. 3) um rd. 65 cm derart verbreitert werden, dass sich die Ueberbauung des Grundstückes gerade noch lohnte. Die Erstellung des neuen Brunnens an der Strassenkreuzung wurde leider nicht vollständig nach den Vorschlägen des Projektverfassers durchgeführt.

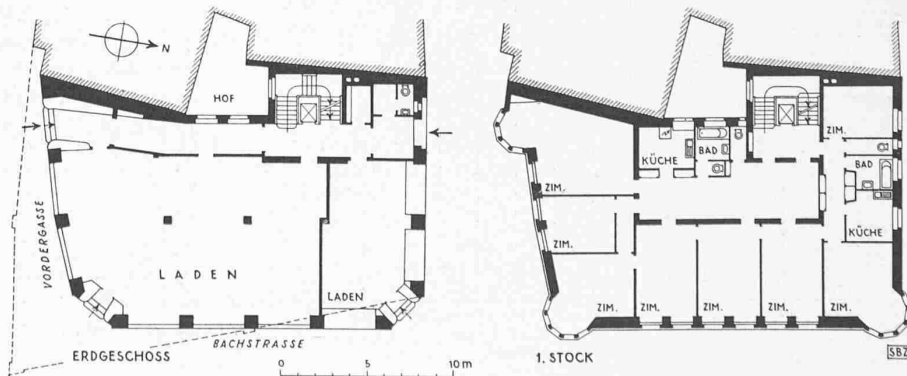


Abb. 7. Neubau «Zur Platte» in Schaffhausen. Grundrisse 1 : 400

Luft untersucht und darauf das Aufspritzen des Kraftstoffes auf Wände mit Kolbentemperaturen und auf glühende Wände, und dieses unter den verschiedensten, möglichen Bedingungen. Die Versuchsanlage besteht aus einem langsamlaufenden Kompressor mit direkt angeschlossener Verdichtungsbombe mit Beobachtungsfenstern, die stroboskopische Filmaufnahmen gestatten. Die Druckmessung geschieht durch Piezoquarz-Indikator und die Temperaturmessung durch Thermolemente. Die untersuchten Vorgänge werden an Hand von zahlreichen Kurven und Filmbildern erklärt.

Die Versuche ergeben, dass der Aufspritzvorgang im Dieselmotor den Charakter eines Strömungsvorganges besitzt. Der Kraftstoffstrahl entwickelt sich nach dem Aufspritzen in Wandnähe, ohne von der Wand freikommen zu können. Wandtemperaturen von über 550 °C verhindern das Auftreffen flüssigen Kraftstoffes auf die Wand. Hohe Wandtemperaturen ergeben zusätzliche Aufheizung des Strahles und vermindern den Zündverzögerung.

Die zweite Arbeit, über Messung des Zündverzögerung, erfasst ebenfalls ein sehr heikles Problem des Verbrennungsvorganges im Dieselmotor. An einer Versuchsbombe wurden Aufladung, Druck, Temperatur der Umgebung und Dichte stets gleich gehalten, während lediglich die Verbrennungslufttemperatur zu Beginn der Einspritzung verändert wurde. Die Messung des Zündverzögerung (Zeit vom Einspritzbeginn des Kraftstoffes bis zum Beginn der ersten auftretenden Zündung) wurde durch Photozellen und Farbfilter ausgeführt, die gestatteten, die verschiedenen Wellenlängen der Strahlung beim Zündbeginn zu untersuchen. Man hat Dieselmotoröle verschiedener Herkunft untersucht und festgestellt, dass die Messung des Zündverzögerung mit Photozelle auch am laufenden Motor möglich sein sollte, wobei wertvolle Erkenntnisse über den Verbrennungsvorgang gewonnen werden könnten.

M. Troesch.

#### Eingegangene Werke; Besprechung vorbehalten:

**Schwere Notbrücke mit verdübelten Balken.** Von Hptm. F. Stüssli. Mit 26 Abb. Sonderdruck aus «Technische Mitteilungen für Sappeure, Pontoniere und Mineure». Zürich 1942, Gesellschaft für militärische Bautechnik.

**Planungs-Probleme der Region Basel.** Von P. Trüdinger, Chef des Stadtplanbureau Basel. Mit 13 Abb. Basel 1942, beziehbar durch die «Basler Woche». Preis geh. 30 Rappen.

**Die Rechnungsprüfung bei Aktiengesellschaften.** Von Charles Wille, Genf. Deutsche Ausgabe von Hermann Flury, Sekretär des Verbandes Schweizer. Bücherexperten. 62 Seiten. Zürich 1942, Polygraphischer Verlag. Preis kart. Fr. 3,50.

**Das Kostenträgungsprinzip im Elektrizitätsrecht Art. 17 EIG.** Von Dr. iur. Albert Laubi. Zürcher Dissertation, Affoltern a. A. 1942, Verlag Dr. J. Weiss. Preis kart. 5 Fr.

## Contribution à l'étude des plaques obliques

Par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich  
(Suite de la page 54)

### 5. Valeurs des tensions dans la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie.

Les tensions en un point d'une plaque dépendent des dérivées  $\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v}$ , comme le montrent les formules (1''), c'est-à-dire de la courbure de la surface élastique au point considéré. Il est donc essentiel, pour calculer ces tensions, d'utiliser une surface  $\zeta_0$  dont la courbure soit aussi conforme que possible à la réalité. C'est pourquoi il faut se garder d'utiliser dans ce but la fonction (19). Par contre la solution représentée par les équations (26) et (27) est beaucoup plus adéquate au calcul des tensions, surtout dans un domaine voisin de la plaque carrée.

La discussion générale des tensions calculées à l'aide de (1''), (26) et (27) sortirait du cadre de cette étude. Nous voulons nous contenter de les calculer en deux points caractéristiques: au centre de la plaque et au milieu d'un des côtés.

#### 1°) Tensions au centre de la plaque ( $u = v = 0$ ).

De l'équation (26) on tire:

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\right)_{u=0, v=0} = -3,478 \frac{f}{a^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}\right)_{u=0, v=0} = -3,478 \frac{f}{b^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v}\right)_{u=0, v=0} = 0.$$

Substituant dans (1''), il vient:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= 3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{b^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) a^2}{a^2 b^2} z, \\ \sigma_v &= 3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{a^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) b^2}{a^2 b^2} z, \\ \tau_{uv} &= -3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{(a^2 + b^2) \cos \alpha}{a^2 b^2} z; \end{aligned} \right\} (29)$$

d'où, en remplaçant  $f$  par sa valeur (27):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= 2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{b^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) a^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \sigma_v &= 2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) b^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \tau_{uv} &= -2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{(a^2 + b^2) \cos \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z. \end{aligned} \right\} (29')$$

2°) Tensions au milieu d'un des côtés ( $u = 0, v = b$ ).

On tire également de (26):

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\right)_{u=0, v=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}\right)_{u=0, v=b} = +10,087 \frac{f}{b^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v}\right)_{u=0, v=b} = 0;$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha}{b^2} z, \\ \sigma_v &= -10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{1}{b^2} z, \\ \tau_{uv} &= +10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{\cos \alpha}{b^2} z. \end{aligned} \right\} (30)$$

Et en remplaçant  $f$  par sa valeur (27):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \sigma_v &= -6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \tau_{uv} &= +6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 \cos \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z. \end{aligned} \right\} (30')$$

On peut ensuite, si l'on veut, calculer les tensions normales et tangentielles ordinaires, en projetant les tensions (29') et (30') sur des axes respectivement perpendiculaires et parallèles aux éléments de surface.

Il sera également facile de déterminer les tensions normales et tangentielles relatives à un élément quelconque parallèle à  $z$ , en utilisant par exemple le procédé graphique de Mohr.

Il faut s'attendre à ce que les tensions calculées par (29') et (30') soient exactes à quelques pour cent près dans le domaine  $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$ ,  $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ . Par contre, si l'on sort de ce domaine, tout en restant dans celui considéré plus haut  $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$ ,  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , ces tensions seront affectées d'erreurs plus grandes.

### 6. Conclusions

Ce mémoire montre qu'il est commode d'utiliser des coordonnées obliques pour les plaques dont le contour est un parallélogramme. L'exemple traité est même éloquent à ce sujet, car nous avons pu établir une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie, avec autant de facilité que si elle était rectangulaire! Il n'en sera peut-être pas toujours ainsi pour d'autres problèmes concernant les plaques obliques. Nous croyons cependant que les formules données permettront en général d'arriver au but avec plus d'élégance qu'en utilisant des coordonnées cartésiennes rectangulaires.

L'application des coordonnées obliques à certains problèmes d'élasticité bidimensionnelle ou même de torsion conduirait à des conclusions analogues à celles que nous venons de formuler pour les plaques.

Zurich, le 24 mars 1942.

<sup>1)</sup> Les formules (29') et (30') donnent, pour la plaque carrée, des tensions différant de  $\frac{1}{2}\%$  de celles trouvées par M. Nadai pour la même forme (loc. cit.). Il en est de même pour la formule (27) de la flèche.

Für den Textteil verantwortliche Redaktion:

Dipl. Ing. CARL JEGHER, Dipl. Ing. WERNER JEGHER

Zuschriften: An die Redaktion der «SBZ», Zürich, Dianstr. 5, Tel. 3 45 07