

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 121/122 (1943)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Ueber ein Luftfahrtsproblem (Kurs im Wind)  
**Autor:** Levi-Civita, Tullio  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53126>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber ein Luftfahrtproblem (Kurs im Wind). — † Tullio Levi-Civita, 1873-1941. — Das Institut für Geophysik der E. T. H. in Zürich. — Ein Baugrundarchiv der Stadt Zürich. — Ein Zürcher Wohnbau der Kriegszeit. Strassenbrücke Eigerplatz-Thunplatz in Bern. — Die Schweiz. Teerindustrie 1932 bis 1942. — Richtige und unrichtige Holzpflasterböden. — Eine Wärmepumpe für die Amthäuser I bis V der Stadt Zürich. — Mit-

teilungen: Tonhalle und Kongresshaus Zürich. Die deutsche «Kriegslokomotive». Herstellung der Spannbetonrohre. Umbau des Albulawerkes der Stadt Zürich. Ein neuer amerikanischer Dieselmotor. — Nekrologe: Max Bosshard. — Wettbewerbe: Erweiterungsbau des Zürcher Kunsthauses. — Ortsgestaltung der Gemeinde Rüschlikon. — Literatur: E. T. H.-Tagung für Landesplanung. IX-Tafeln feuchter Luft. Motorkraftstoffe.

Band 122

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung

Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestaffelt

Nr. 3

Ueber ein Luftfahrtproblem (Kurs im Wind)

Von TULLIO LEVI-CIVITA, weiland Professor an der Universität Rom<sup>1)</sup>

Das von Zermelo<sup>2)</sup> für die ebene Bewegung gestellte und durch originelle, sehr scharfsinnige Analyse gelöste Problem ist das folgende:

Gegeben ist ein Windfeld, d. h. in einem gegebenen Bereich die Windgeschwindigkeit  $w(P, t)$  in Funktion des Ortes  $P$  und der Zeit  $t$ . Ein Luftfahrzeug ist mit einem Motor ausgerüstet, der ihm ständig eine Geschwindigkeit von bekanntem und konstantem Betrag  $V$  in Bezug auf die umgebende Luft zu erteilen vermag. Die Richtung dieser Geschwindigkeit lässt sich willkürlich einstellen. Es wird verlangt, dies so zu tun, dass die Flugdauer zwischen zwei bezeichneten Punkten des Feldes minimal wird. Mit andern Worten wird der Fahrplan und mit ihm die Brachistochrone zwischen den beiden Stationen gesucht.

Levi-Civita<sup>3)</sup> hat gezeigt, dass diese Frage auch im räumlichen (3- oder auch  $n$ -dimensionalen) Fall auf ein Variationsproblem von klassischem Typus, das sogenannte Problem von Mayer, zurückgeführt werden kann. Durch weitere Umformungen, bei denen hier nicht verweilt werden soll, gelangt man schliesslich dazu, das Problem in ein durch Symmetrie und Uebersichtlichkeit bemerkenswertes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu übersetzen. Dieses wollen wir hier, nach präziser Definition der auftretenden Symbole, angeben.

In einem generellen Moment  $t$  seien  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Koordinaten des Flugzeugs  $P$  bezüglich eines Systems fester Axen  $0, x_1, x_2, x_3$ ; dann sind  $dx_i/dt = \dot{x}_i$  die Komponenten der momentanen Geschwindigkeit von  $P$ : gemeint ist die absolute, d. h. auf die genannten Axen bezogene Geschwindigkeit. Von den Daten des Problems ist der Vektor  $w(P, t)$ , die Windgeschwindigkeit, schon aufgeführt. Bezeichnen wir ihre drei Komponenten mit  $w_i$ , die offenbar als bekannte Funktionen des Ortes, d. h. von  $x_1, x_2, x_3$  und der Zeit  $t$  zu betrachten sind. Wo wir das hervorheben wollen, schreiben wir  $w_i(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Führen wir schliesslich mittels der drei Richtungscosinusse  $\alpha_i$  die Richtung der Relativgeschwindigkeit (von gegebenem Betrag  $V$ ) ein, die der Motor dem Flugzeug  $P$  bezüglich der Luft erteilt:  $\mathfrak{B}$  sei der diese Geschwindigkeit darstellende Vektor. Die  $\alpha_i$  sind, wie die Koordinaten  $x_i$  von  $P$ , a priori unbekannte Funktionen von  $t$ , die aus den Bedingungen für ein Minimum zu bestimmen sind. Als Richtungscosinusse erfüllen sie die trigonometrische Identität

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Ferner sind sie mit den  $x_i$  durch die skalaren Gleichungen verbunden, die das Prinzip der Relativbewegung ausdrücken: Absolutgeschwindigkeit  $v$  = Relativgeschwindigkeit  $\mathfrak{B}$  + Mitführungsgeschwindigkeit  $w$ , d. h.:

$$\dot{x}_i = V \alpha_i + w_i \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (I)$$

Zur Vervollständigung der Definition der sechs unbekannt Funktionen  $x_i$  und  $\alpha_i$  der Zeit sind den kinematischen Beziehungen (I) die charakteristischen Gleichungen des Problems hinzuzufügen, die die Bedingung minimaler Zeit ausdrücken.

Hier deren endgültige Form unter der Annahme, dass (im ganzen Feld und während der ganzen betrachteten Zeit) die Ungleichung  $w^2 < V^2$  bestehe, d. h. dass der Wind nie mit einer die Selbständigkeit der Maschine geradezu vernichtenden Stärke wehe:

$$\dot{\alpha}_i = - \frac{\partial W}{\partial x_i} + A \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (II)$$

Hierin bedeuten

$$W = \sum_{j=1}^3 \alpha_j w_j(x_1, x_2, x_3, t) \dots \dots \dots (2)$$

und

$$A = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \alpha_j \alpha_k \dots \dots \dots (3)$$

<sup>1)</sup> Uebersetzt aus «Aerotecnica», vol. XII (1932), S. 725 bis 727.

<sup>2)</sup> E. Zermelo: Ueber das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung. «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik». Bd. 11 (1931), S. 114.

<sup>3)</sup> T. Levi-Civita: Ueber Zermelo's Luftfahrtproblem. «ZAMM», Bd. 11, S. 314.

$W$  ist offenbar als die Komponente der Windgeschwindigkeit  $w$  in der Kursrichtung ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) zu deuten.  $A$  ist eine quadratische Form in den  $\alpha_i$  mit Koeffizienten, die im allgemeinen Funktionen des Ortes und der Zeit sind und von der Natur des Windes abhängen.

Das Differentialsystem (I), (II) definiert die sechs Funktionen  $x_i, \alpha_i$  eindeutig, wenn ihre Anfangswerte gegeben sind. Es ist in der Tat (wie es sein muss) mit der trigonometrischen Identität (1) verträglich, da es, wie man nachrechnen kann, das quadratische Integral zulässt:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = \text{const.}$$

Sind die  $\alpha_i$  am Anfang als Richtungscosinusse deutbar, so ist die rechtsstehende Konstante 1, und Gl. (1) bleibt in jedem Augenblick gültig.

Ein interessanter Sonderfall, in dem das System (I), (II) sich leicht integrieren lässt, ergibt sich bei der Annahme, dass der Wind nur mit der Zeit variiere, also in jedem Zeitpunkt in dem ganzen betrachteten Raumbereich einformig sei. Dann hängen die Komponenten  $w_i$  allein von  $t$  (nicht auch von  $x_1, x_2, x_3$ ) ab; alle  $\partial w_j / \partial x_k$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) verschwinden, damit auch  $A$  und die einzelnen  $\partial W / \partial x_i$ . Die Gl. (II) reduzieren sich auf  $\dot{\alpha}_i = 0$ , d. h.  $\alpha_i = \text{const.}$  Das bedeutet, dass während des ganzen Fluges die Kursrichtung, d. h. jene der Flugzeugaxe, bezüglich fester Körper konstant bleibt.

Da also die  $\alpha_i$  konstant und die  $w_i$  einzig von  $t$  abhängen, lassen sich die Gl. (I) durch einfache Quadraturen integrieren und liefern, wenn man mit  $x^0_i$  die Koordinaten der Ausgangsstation  $P_0$  und mit  $t = 0$  den anfänglichen Augenblick bezeichnet:

$$x_i - x^0_i = \alpha_i V t + \int_0^t w_i(t) dt \dots \dots \dots (4)$$

Dies müssen in einem generellen Zeitpunkt  $t$  die Koordinaten des Luftfahrzeugs  $P$  längs einer Brachistochrone sein.

Wenn  $x^1_i$  die Koordinaten der Endstation  $P_1$  sind und  $\tau$  die unbekannte (minimale) Reisezeit von  $P_0$  nach  $P_1$ , ist aus den Gl. (4) insbesondere zu entnehmen:

$$x^1_i - x^0_i - \int_0^\tau w_i(t) dt = \alpha_i V \tau \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (5)$$

Durch Quadrieren, Summieren und Berücksichtigung von Gl. (1) erhält man unter Elimination der  $\alpha_i$  eine Gleichung in der einzigen Unbekannten  $\tau$  als Lösung dieses Sonderfalls. Die Gl. (5) liefert sodann die Kurskonstanten  $\alpha_i$  explizit.

Zum allgemeinen Problem zurückkehrend, bemerken wir, dass die Differentialgleichungen (I), (II) unter der Annahme hergeleitet worden sind, dass die Windgeschwindigkeit  $w(P, t)$  stetig und ableitbar ist. Bemerkenswert ist auch der Fall plötzlicher Unstetigkeiten von  $w(P, t)$  im Raum oder in der Zeit: dies besonders im Hinblick auf mögliche Schematisierungen, etwas grob vereinfachend, jedoch von unzweifelhaftem praktischem Interesse. Die erste Möglichkeit, nämlich der Fall mehrerer Luftschichten mit konstanter Windgeschwindigkeit im Innern jeder Schicht und plötzlichen Geschwindigkeitssprüngen beim Uebergang von einer zur andern, hat R. v. Mises<sup>4)</sup> untersucht. Die Brachistochronen sind offenbar innerhalb jeder Schicht gerade; beim Durchgang durch eine Unstetigkeitsfläche gelten Gesetze ähnlich denen der Brechung. Im selben Aufsatz hat sich v. Mises auch vorgenommen, wenigstens in den einfachsten Fällen die Hauptergebnisse der variationstheoretischen Analyse elementar zu rechtfertigen, unter Angabe einer graphischen, an nähernden Konstruktion der Brachistochronen.

Wir schliessen diesen kurzen Bericht mit dem Hinweis, dass A. de Mira Fernandes<sup>5)</sup> kürzlich für ein allgemeineres Problem die Differentialgleichungen aufgestellt hat. Die Verallgemeinerung besteht darin, die Eigengeschwindigkeit  $V$  als bekannte Funktion von  $x_1, x_2, x_3, t$  anzunehmen, statt als eine einfache, für die Maschine charakteristische Konstante.

<sup>4)</sup> R. v. Mises: Zum Navigationsproblem der Luftfahrt. «ZAMM», Bd. 11, S. 373.

<sup>5)</sup> A. de Mira Fernandes: Sul problema brachisticocono di Zermelo. «Rend. Lincei», Vol. XV (1932), S. 47.