Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 121/122 (1943)

Heft: 23

Inhaltsverzeichnis

Band 122 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 23
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Les vibrations transversales des cordes pesantes verticales

(Suite de la page 254)

Par HENRY FAVRE, Dr. ès sc. techn., professeur à l'E. P. F., Zurich

4. Etude de quelques vibrations simples

1°) Supposons tout d'abord que l'on déplace horizontalement pendant un temps très court l'extrémité inférieure A de la corde représentée à la figure 1, en revenant à la position initiale. On engendre ainsi une petite onde élémentaire $y = (1 - \alpha x) F$ qui monte le long de la corde en subissant la déformation décrite au paragraphe précédent.

Au moment où cette onde arrive à l'extrémité supérieure B (supposée fixe), il se crée une onde descendante $(1 - \alpha x) f$ qui neutralise la première, car en B on doit avoir $y = 0$ quel que soit t. En d'autres termes on aura d'après (9)

$$\left(1 - \alpha \frac{h}{2}\right)(F + f) = 0$$

c'est à dire, puisque $1 - \alpha \frac{h}{2}$ est différent de zéro, $f = - F$.

L'onde incidente montante $(1 - \alpha x) F$ s'est transformée en une onde descendante $(1 - \alpha x) f$ égale mais de signe contraire. Il y a réflexion totale avec changement de signe (fig. 4). La nouvelle onde $(1 - \alpha x) f$ descendra le long de la corde en se transformant comme nous l'avons indiqué et arrivera en A. Si ce point est fixe à ce moment, l'onde descendante se transformera en une onde montante absolument identique à $(1 - \alpha x) F$, qui remontera le long de la corde et le jeu des réflexions se poursuivra indéfiniment.

Calculons le temps τ que met cette onde élémentaire pour parcourir la corde de A en B et retour. Nous avons, en utilisant la formule (10):

$$\tau = \int_0^{\tau} d t = 2 \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{d x}{c(1 + 2 \alpha x)} \cong \frac{2}{c} \int_{-h/2}^{+h/2} (1 - 2 \alpha x)\, d x = \frac{2 h}{c}$$

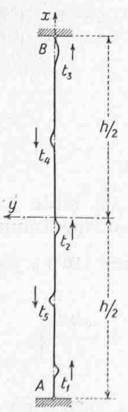

Fig. 4

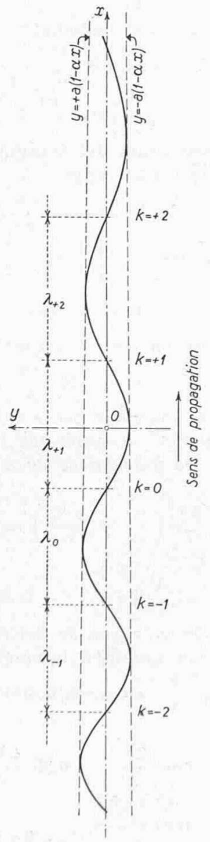

Fig. 5. Onde progressive (12)

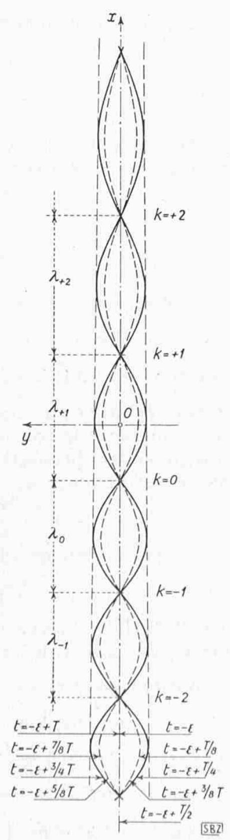

Fig. 6. Onde stationnaire (16)

$$\boxed{\tau = \frac{2 h}{c} = 2 h \sqrt{\frac{\mu}{S_0}}} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Ce temps est donc le même que si la corde était tendue par une force constante, égale à la traction au milieu 0 de la corde pesante verticale considérée.

De (11) on tire

$$S_0 = \frac{4 h^2 \mu}{\tau^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11')$$

Si l'on connaît h et μ on peut, en mesurant le temps τ, calculer par cette formule la traction S_0 *au milieu* d'une corde tendue verticale. De là, il est facile de calculer S_A et S_B par les formules (2).

2°) Considérons le mouvement défini en choisissant

$$f \equiv 0 \text{ et } F = a \sin \frac{2 \pi}{T} \left[t - \frac{1}{c} (1 - \alpha x) x + \beta \right]$$

où a, T et β désignent des constantes.

L'élongation sera, d'après (9):

$$y_1 = a (1 - \alpha x) \sin \frac{2 \pi}{T} \left[t - \frac{1}{c} (1 - \alpha x) x + \beta \right] \quad (12)$$

En un point x, la corde est animée d'une vibration transversale harmonique de période T et d'amplitude $a(1 - \alpha x)$. *Au temps* t, la corde est formée d'une série de demi-ondulations inégales, alternativement positives et négatives, comprises entre des points d'élongation nulle, dont les abscisses x sont données par l'équation

$$\frac{2 \pi}{T} \left[t - \frac{1}{c} (1 - \alpha x) x + \beta \right] = - k \pi$$

où k désigne un entier négatif, nul ou positif. Pour résoudre cette équation, le plus simple est de procéder par approximations successives. Puisque αx est petit par rapport à 1, posons d'abord $\alpha = 0$. L'équation devient linéaire et a pour racine $x = c\left(t + \beta + \frac{T}{2} k\right)$ (première approximation). Remplaçons ensuite le terme αx par $\alpha c\left(t + \beta + \frac{T}{2} k\right)$. On obtient encore une équation linéaire dont la racine est la valeur de seconde approximation suivante:

$$x_k = c\left(t + \beta + \frac{T}{2} k\right)\left[1 + \alpha c\left(t + \beta + \frac{T}{2} k\right)\right] \quad (13)$$

$$(k = \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$$

On voit que x_k croît avec k. Les points d'élongation nulle sont rangés comme l'indique la figure 5.

Calculons la distance de deux de ces points consécutifs. L'abscisse du point $k - 1$ est

$$x_{k-1} = c\left[t + \beta + \frac{T}{2}(k - 1)\right] \cdot \left\{1 + \alpha c\left[t + \beta + \frac{T}{2}(k - 1)\right]\right\} \quad (13')$$

Soustrayons (13') de (13):

$$\lambda_k = x_k - x_{k-1} = \frac{c T}{2} + \alpha c^2 T \left[t + \beta + \frac{T}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (14)$$

On voit que la distance λ_k de deux points nuls consécutifs — la demi-longueur d'onde — croît avec k. La suite des valeurs $\ldots \lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda_{k+1} \ldots$ forme une progression arithmétique de raison $\frac{\alpha c^2 T^2}{2}$.

D'autre part, la courbe étant comprise entre les deux droites $y = \pm a(1 - \alpha x)$, la valeur absolue des maxima et des minima successifs décroît de bas en haut (fig. 5). Il serait facile de calculer la position et la grandeur de ces extréma.

Lorsque le temps croît, l'onde (12) se propage en montant le long de la corde (onde progressive). Elle se déforme comme nous l'avons exposé au paragraphe 3. Les demi-ondulations s'allongent et s'aplatissent à mesure qu'elles s'élèvent. Il est intéressant de remarquer que *la corde reprend périodiquement la même position*. En effet, soit t une époque déterminée. Au temps $t + T$ le second membre de (12) sera identique à la valeur qu'il