

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 123/124 (1944)
Heft: 17

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Verallgemeinerung in der Mathematik. — Triebwerke für Zweitaktmotoren mit Gleichstromspülung. — Wettbewerb für eine Schlachthofanlage in Olten. — Zum Bau der Wallensee-Talstrasse. — Mitteilungen: Die Vorarbeiten der Wasserversorgung der Stadt Bern für ein Grundwasserwerk im Aaretal. Leistung und Wirtschaftlichkeit der Oefen.

Eidgen. Techn. Hochschule. Die Schweiz. Vereinigung für Landesplanung. Persönliches. — Wettbewerbe: Erweiterung des städtischen Rathauses Aarau. Ländliche Familien- und Knechtwohnungen im Kanton Genf. Turn- und Sportplatzanlage des Technikums Winterthur. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 124

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 17

Die Verallgemeinerung in der Mathematik

Von P.-D. Dr. F. BÄBLER, E. T. H.¹⁾, Zürich

Unter dem Wort Verallgemeinerung sollen hier gewisse Erscheinungen zusammengefasst werden, die die Entwicklung der Mathematik teils ununterbrochen begleiten, teils gleichzeitig als treibende und leitende Kräfte fundamentalen Anteil an Entstehung und Wachstum grosser Epochen haben. Der äussere Habitus dieser Erscheinungen ist flüchtig betrachtet bisweilen recht verschieden. Bei genauem Zusehen tritt jedoch unmittelbar ein charakteristischer gemeinsamer Kern hervor, durch den sie in ihrem Wesen bestimmt sind. Dieser gemeinsame Kern ist nichts anderes als die Sehnsucht nach dem Universellen und Endgültigen im Geistigen. Mein Ziel bei diesem Vortrag ist es, der Entwicklung der Mathematik folgend, die erwähnten Erscheinungen und ihre Wirkungen aufzuspüren und sie durch Beispiele sinnfällig zu machen.

Die speziellste Form, die dieser Trieb nach dem Universellen annehmen kann, stellt sich als Verallgemeinerung eines mathematischen Theorems dar. Irgendeine Beziehung mathematischer Natur ist unter gewissen, vielleicht sehr einengenden Voraussetzungen sichergestellt worden. Zufällig verwendete, ungeeignete Beweismethoden oder die untergeordnete Bedeutung der Beziehung im vorliegenden Zusammenhang oder noch andere Ursachen mögen diese Einschränkungen veranlassen haben. Irgendein Späterer aber erkennt hier vielleicht einen vielversprechenden Ansatzpunkt im Zusammenhang mit eigenen Untersuchungen und dringt darum auf andern Wegen tiefer in das Gewebe der Beziehungen ein, oder er bemerkt einen weitgehenden Parallelismus mit Theoremen anderer Natur und wird auf diese Weise zu Einsichten von viel grösserer Allgemeinheit geführt, oder auch er merkt ganz einfach, dass die Voraussetzungen teilweise überflüssig sind und dehnt den Gültigkeitsbereich aus, unbekümmert darum, ob damit für den Moment etwas Wünschenswertes getan sei oder nicht.

Obschon diese Erscheinungen bereits einem ziemlich vorgerückten Stadium der Wissenschaft angehören, wird man das genaue Analogon doch bereits bei den ersten Betätigungen des menschlichen Geistes wirksam finden, denen man die Bezeichnung mathematisch geben könnte. Von jeher und bis auf den heutigen Tag stellt z. B. die Entdeckung und Fundierung zahlreicher geometrischer Beziehungen einen Verallgemeinerungsprozess der eben beschriebenen Art dar. Am Anfang steht das Aperçu, oder das Ergebnis bewusster Betrachtung, meist noch mit speziellen und zufälligen Erscheinungen verknüpft. Und daran schliesst sich die mathematische Tätigkeit par excellence, das Sichten, Scheiden und Ausschliessen, der Uebergang vom Individuellen zum Typischen, zur Klasse, die Formulierung und der Beweis des Theorems. Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenmassen, die den Bedingungen des pythagoräischen Satzes genügten, waren den Babyloniern und Ägyptern schon längst vor Pythagoras bekannt und von ihnen zu praktisch wichtigen Zwecken benützt worden. Aber sie waren weiter nichts als bestenfalls nützliche oder amüsante Kuriositäten. Die Zufälligkeiten dieser Spezialfälle als unwesentlich und das wahre allgemeine Sachverhältnis erkannt und erwiesen zu haben, ist die grosse Tat des Pythagoras.

Wenden wir uns weiterhin einem Gegenstand zu, den heute fast jedermann mit der grössten Selbstverständlichkeit handhabt, bedingt durch die beispiellose Vollendung, die er erreicht hat. Diese letzte ist so gross und, wie uns scheint, selbstverständlich, dass sie Gedanken und Fragen nach den Schwierigkeiten auf dem Weg der Entwicklung fast müssig erscheinen lässt. Ich meine das Reich der rationalen Zahlen. Die gewaltige verallgemeinernde Leistung, die im Begriff der ganzen Zahl und dem Prozess des Zählens sich bereits manifestiert, sei nur beiläufig erwähnt. Dagegen möchte ich umso nachdrücklicher auf diejenigen grossen Verallgemeinerungen hinweisen, durch die man in der Menge der natürlichen ganzen Zahlen diejenige Gliederung und Uebersicht schuf, die die erste und unerlässliche Voraussetzung für ihre geschmeidige Handhabung darstellt.

¹⁾ Antrittsvorlesung (gekürzt), gehalten am 17. Juni 1944

Das ist ihre konsequente Einteilung nach Potenzen irgendeiner Zahl, ihre systematische Anordnung in Dezimal-, Duodezimal- oder andern Systemen. Längst vorher hatte man gewisse Zahlen, die im Alltag von grosser Bedeutung waren, ausgezeichnet und besonders bezeichnet, auch wohl andere Zahlen zu ihnen in ordnende Beziehung gesetzt. Doch erst in der konsequenten Verallgemeinerung und Durchführung solcher Prinzipien lag die Leistung allergrösster Tragweite, auf die es ankommt! Aber so gross diese Leistung auch war, so genügte sie doch nicht, um der Handhabung der Zahlen diejenige Geschmeidigkeit zu verleihen, an die wir heute gewöhnt sind, ehe ein adäquater Ausdruck in Symbolen gefunden war. Wer sich einmal die Mühe nimmt, die Durchführung einer Division zweier grösserer Zahlen bei den alten Griechen zu verfolgen, wird überrascht sein über die Mühseligkeiten, denen sie sich dabei unterziehen mußten. Und das, obschon sie bereits ein allerdings sehr unvollkommenes Modell derjenigen Schöpfung besaßen, die hier den Ausschlag gab, unseres heutigen Stellenwertsymbolismus. Auch hier war eine bewusste und konsequente Verallgemeinerung schliesslich das Entscheidende.

Was für eine grosse Verallgemeinerung über die natürlichen Zahlen hinaus die Erfassung der Brüche und der negativen Grössen, wie wir heute sagen, als Zahlen darstellt, d. h. als Elemente, die durch den selben operativen Formalismus unter sich und mit den natürlichen Zahlen verknüpft werden können, braucht kaum betont zu werden. Ausdrücklich soll jedoch auf die folgenschwere, in gewissem Sinne epochemachende Verallgemeinerung hingewiesen werden, die in der Loslösung des rechnerischen Formalismus (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) von den in Ziffern ausgedrückten Zahlen und seine Verwendung zur Verknüpfung beliebiger Symbole darstellt, denen man nur noch die Bedingung auferlegt, dass sie diese Operationen gestatten, d. h. den Uebergang zu dem, was wir Algebra nennen. Die gleichzeitige Erweiterung, d. h. Verallgemeinerung des Symbolismus durch das Potenzieren und besonders dessen Inverses, das Radizieren, waren desgleichen von einschneidender Bedeutung, indem sie schliesslich zu einer ungeheuren Erweiterung des Reiches der Zahlen zwangen, die allerdings erst nach langer Zeit gegen den heftigsten Widerstand und die schärfsten Anfeindungen sich durchsetzte. Der stärkste Bundesgenosse der Neuerer bei der Eroberung dieses Reiches war selbst wieder der fundamentale Trieb nach dem Universellen, Allgemeingültigen, hier speziell hinsichtlich der Existenz der Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Und es zeigt sich gerade hier mit grösster Deutlichkeit der eigentliche Kern und die wahre Bedeutung jeder wirklich guten Verallgemeinerung. Sie wirft ein helles Licht auf das längst Bekannte; unter ihrer Kraft verknüpfen sich Dinge, die bis dahin getrennt erschienen, und verschmelzen zu einer organischen Einheit. Sie löst mächtige Impulse zu neuer Forschung aus und ist Quell neuer Entdeckungen.

Man könnte nun, die Entwicklung der Theorie der Zahlen verfolgend, weiterhin Glied an Glied schliessend, eine fast endlose Kette von Verallgemeinerungen teilweise von grösster Tragweite erkennen. Ich begnüge mich damit, einige wenige zu nennen: die Primzahl, die ganze algebraische Zahl, die hyperkomplexen Zahlen (als einfachste die Quaternionen), die transfiniten Zahlen, die Zahlkörper, die Ideale usw. Fast keine unter ihnen stellt sich als willkürliches Spiel des freien Geistes dar; viele dagegen haben für uns Heutige den Charakter des organisch Zwangläufigen, ja man könnte beinahe sagen, des Selbstverständlichen, welches letztes freilich eine ungeheure Täuschung ist. Bloss die erstaunliche Einfachheit und Zweckmässigkeit dieser Schöpfungen, die ihrerseits wieder die wahre Ursache ihrer grossen klärenden und eindringlichen Wirkung ist, kann uns über das grosse Mass an Gedankenarbeit, sicherem Instinkt und Genialität hinwegtäuschen, die bei ihrem Entstehen am Werke waren.

So verschiedenartig die bis jetzt betrachteten Verallgemeinerungen auch scheinen, haben sie doch alle einen charakteristischen gemeinsamen Zug, der in der materiellen Ausweitung von Begriffen, Begriffssystemen und von Beziehungen in ihnen besteht. Wir sind bei ihrer Betrachtung bis in die neueste Zeit