

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 123/124 (1944)  
**Heft:** 1

## Inhaltsverzeichnis

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 31.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: 200 Jahre Euler'sche Knickformel. — Untersuchung einer nach Euler'schen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine. — Die Schulhausanlage Kornhausbrücke in Zürich. — Tendenzen der Automobilkonstruktion und Entwicklung des Strassenverkehrs. — Ein Vorschlag zur Verbesserung der Wasserverhältnisse in den Seen. — 50 Jahre Akademischer Maschinen-Ingenieur-Verein (AMIV) an der E. T. H. Zürich. — Mitteilungen: Kurortklimaforschung. Neue Flachserntemaschine. Normalisierung von Aluminiumleitern für Hochspannungsapparate und -Installationen. Massenfertigung durch Einzweckmaschinen. Schulhausanlage Kornhausbrücke Zürich. — Nekrologe: Maurice Imer. — Wettbewerbe: Ausbau des Kantospitals Winterthur. Schulhaus für Schwachbegabte und Kindergarten in Thun. Plastischer Schmuck am Fries des Pavillon Eynard, Genf. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Die in der Form mit Gleichung (2) übereinstimmt. Aus dem Vergleich der Gleichungen (2) und (4) ergibt sich nun die Grösse der angreifenden Last  $P$  zu

### 200 JAHRE EULER'SCHE KNICKFORMEL

Von Prof. Dr. F. STUSSI, E. T. H., Zürich



1. In einem Anhang «Ueber die elastischen Kurven» zu seinem grundlegenden Werk über Isoperimeterprobleme<sup>1)</sup> hat Leonhard Euler vor 200 Jahren erstmals die seinen Namen tragende Knickformel veröffentlicht. Im ungeheuren Lebenswerk Eulers bedeutet die Entdeckung der Knickformel nur eine kleine Episode; für die Entwicklung der Festigkeitslehre und der Baustatik aber ist sie von so grosser Bedeutung, dass sich heute ein

kurzer Rückblick auf ihre Entstehung rechtfertigt. Für Euler ergibt sich die Möglichkeit, die Form der elastischen Kurven mit seiner Methode der Maxima und Minima zu bestimmen durch eine Mitteilung von Daniel Bernoulli vom Jahre 1742, wonach bei der Biegung eines ursprünglich geraden Stabes von konstantem Querschnitt die «Potentialkraft» (vis potentialis)

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

ein Minimum sein müsse.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $x, y$  ist (mit unserer heutigen Schreibweise) die Länge des Kurvenelementes  $ds$  und der Krümmungsradius

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$R = - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Damit wird die «Potentialkraft», die zu einem Minimum werden soll

$$\int \frac{ds}{R^2} = \int \frac{y''^2 dx}{(1 + y'^2)^{5/2}} = \min \dots (1)$$

Nach der im Hauptwerk entwickelten Methodik wird nun daraus die Differentialgleichung der gesuchten elastischen Kurve bestimmt, die sich in der Form

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}} \dots (2)$$

ergibt.

Um die Übereinstimmung dieser Gleichung mit der schon früher von Jakob Bernoulli gefundenen Gleichung der elastischen Kurve nachzuweisen (und auch, um die Belastung und die Biegesteifigkeit des Stabes einzuführen) leitet Euler diese Differentialgleichung nun auch noch direkt ab (Abb. 1): im Punkt  $x, y$ , des gebogenen Stabes muss Gleichgewicht zwischen der «Elastizität  $E k^2 : R$ » (vis elastica) und dem Moment  $P (e + x)$  der an einem starren Hebel  $e$  wirkenden lotrechten Kraft  $P$  bestehen:

$$P (e + x) = \frac{E k^2}{R} = - \frac{E k^2 y'}{(1 + y'^2)^{3/2}} \dots (3)$$

$E k^2$  bedeutet die «absolute Elastizität» (elasticitas absoluta) oder, wie wir heute sagen, die Steifigkeit  $EJ$  des Stabes. Durch Integration und Auflösung nach  $dy$  findet Euler die Gleichung

$$dy = \frac{-P dx (\frac{1}{2} x^2 + ex + f)}{\sqrt{E^2 k^4 - P^2 (\frac{1}{2} x^2 + ex + f)^2}} \dots (4)$$

<sup>1)</sup> L. Euler: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae & Genevae, MDCCXLIV. Additamentum I: De curvis elasticis.

Das Eulerbildnis nach dem Stich von Mechel in der «Lobrede auf Herrn Leonhard Euler» von N. Fuss, Basel 1786.

während sich für den Hebelarm  $e$  und die Integrationskonstante  $f$  die Werte

$$e = \frac{\beta}{2\gamma} \quad \text{und} \quad f = - \frac{\alpha}{2\gamma}$$

ergeben.

Für  $e = 0$  (Last im Koordinatenursprung) und  $\gamma = 1$  und mit der Abkürzung  $c^2 = a^2 - \alpha$  findet Euler für die Kurve der Abb. 2 die vereinfachte Gleichung

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2) dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \dots (6)$$

Nach der Diskussion der sich aus Gleichung (6) ergebenden Eigenschaften der elastischen Kurven geht Euler dazu über, die verschiedenen möglichen Kurvenformen aufzuzählen. Als erste dieser Formen ergibt sich für  $a = \infty$  oder  $P = 0$  die vom Koordinatenursprung (oder Wendepunkt)  $A$  aus sich nach beiden Seiten in Richtung der  $y$ -Achse ins Unendliche erstreckende Gerade, für die  $x_{max} = c = 0$  ist; diese Gerade stellt den natürlichen Zustand des elastischen Stabes dar.

Zu dieser ersten Art von elastischen Kurven sollen nun aber auch jene Fälle gerechnet werden, bei denen die grösste Ausbiegung  $c = x_{max}$  und damit auch  $x$  gegen  $a$  vernachlässigbar klein angenommen werden kann; für diesen Fall geht Gleichung (6) über in

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \dots (7)$$

und ihre Lösung lautet

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c} \dots (8)$$

Dies ist die Gleichung für die (beidseitig ins Unendliche verlängerte) Trochoide, die wir heute Sinuskurve nennen. Für  $y = f$  wird  $\frac{x}{c} = 1$  und  $\arcsin \frac{x}{c} = \frac{\pi}{2}$ , woraus

$$f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2f\sqrt{2}}{\pi}$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (5) (mit  $\gamma = 1$ ) ein, so erhalten wir

$$P_{kr.} = \frac{2 E k^2}{a^2} = \frac{\pi^2 E k^2}{4 f^2} \dots (9)$$

d. h. diejenige Kraft, die erforderlich ist, um einen ursprünglich geraden (und beidseitig gelenkig gelagerten) Stab unendlich wenig auszubiegen; sie ist von endlicher Grösse.

Damit ist die Eulersche Knicklast gefunden. Euler selbst weist darauf hin, dass seine Formel dazu dienen könne, die Tragkraft von Säulen zu bestimmen. Er gibt anschliessend auch die Anleitung, die Steifigkeit  $E k^2 = EJ$  durch Durchbiegungsmessungen zu ermitteln.

Wohl hatte der Holländer Musschenbroek schon 15 Jahre vorher auf Grund von Versuchen festgestellt, dass bei sonst gleichen Grössen die Tragfähigkeit gedrückter Stäbe umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Länge sei, aber diese Angabe allein löst das Problem nicht. Erst Euler hat uns den vollständigen Zusammenhang zwischen kritischer Belastung  $P$ , Stablänge  $2f$  und Steifigkeit  $EJ = Ek^2$  gegeben.

2. An dieser ersten theoretischen Untersuchung eines Stabilitätsproblems ist für uns besonders bemerkenswert, dass sie auf dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit aufge-

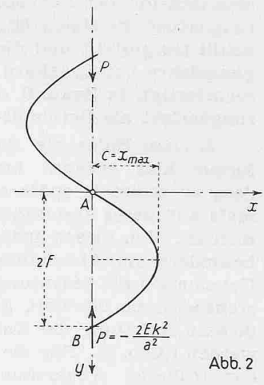


Abb. 2

Abb. 1