

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 125/126 (1945)  
**Heft:** 17

**Artikel:** Zur Festpunktberechnung durchlaufender Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment  
**Autor:** Lardy, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83741>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Festpunktberechnung durchlaufender Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment

Von Ing. Dr. PIERRE LARDY, Zürich

Der kontinuierliche Balken mit *veränderlichem* Trägheitsmoment spielt, besonders im Eisenbeton, eine wichtige Rolle. Es soll im Folgenden eine Methode entwickelt werden, die für beliebig veränderliche Trägheitsmomente gilt und erlaubt, unter Umgehung der üblichen «Reduktion» der Momentenfläche  $M$  auf  $M/J$  allgemeine Beziehungen für die Auflagerdrehwinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , die Hilfslinienabstände  $x_1, x_2, x_3$  und die Festpunktabstände  $a$  und  $b$ , sowie für gewisse Belastungsfälle geschlossene, einfache Ausdrücke anzugeben, deren numerische Auswertung einen geringeren Arbeitsaufwand erfordert. Sie dürfte geeignet sein, die Abhängigkeit der betreffenden Grössen von der Art der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes auf anschauliche Weise abzuklären, indem die Berechnungen auf die Bestimmung der einfachsten, geometrisch-statischen Grössen (Flächeninhalt, Schwerpunktabstand und Trägheitsmoment) der  $1/J$ -Fläche (inverses Balkenträgheitsmoment) zurückgeführt und so auf eine einheitliche Grundlage gestellt werden. Ein Vorzug liegt auch darin, dass die Symmetrie-Eigenschaften des veränderlichen Trägheitsmomentes voll ausgenutzt werden können, während sie bei der Reduktion wegen der Unsymmetrie des Momentenverlaufes für  $M_1 = 1$  und  $M_2 = 1$  verloren gehen.

Nach einer kurzen Erläuterung über eine angenäherte Berechnung von Trägheitsmomenten und eine graphische Konstruktion, die gleichzeitig den Flächeninhalt, den Schwerpunktabstand und das Trägheitsmoment liefert, folgt die Berechnung der Auflagerdrehwinkel nach der eingangs erwähnten Methode im allgemeinen Fall unsymmetrischer, sowie für die beiden wichtigen Sonderfälle symmetrischer und einseitiger Voüten. Anschliessend werden die Ausdrücke für die Hilfslinien- und die Festpunktabstände abgeleitet und einige wichtige Anwendungen behandelt, die u. a. die Auflagerdrehwinkel infolge gleichmässig verteilter Belastung, den Balken mit unendlich vielen, gleichen Öffnungen (einschliesslich Stützenmoment und maximales Feldmoment), sowie den Einspannungsgrad betreffen. Am Schluss wird der Zusammenhang der behandelten Methode mit der Näherungsmethode der starren Voüten hergestellt und der Sonderfall der gesetzmässig gegebenen Veränderlichkeit nach dem Potenzgesetz in die Berechnung einbezogen.

## 1. Angenäherte Berechnung von Trägheitsmomenten

### a) Berechnung aus dem Schwerpunktabstand

Die einleitend erwähnte Näherungsberechnung von axialen Trägheitsmomenten bezieht sich hier nur auf «trapezförmige» Flächen, wie sie in Abb. 1 dargestellt sind. Sie erlaubt, aus der alleinigen Kenntnis des Schwerpunktabstandes  $\eta_s$  das Trägheitsmoment  $J$  bzgl. der  $x$ -Axe aus der Beziehung

$$J \approx J' = \frac{B}{3} (2\eta_s)^3 \dots \dots \dots (1)$$

zu bestimmen. Die Berechnung von Trägheitsmomenten wird damit auf die Bestimmung einer einzigen Schwerpunktskoordinate reduziert, was eine Vereinfachung bedeutet.

Gl. (1) gilt in voller Strenge für Rechtecke, insbesondere auch für unendlich kleine rechteckige Flächenelemente  $\eta dx$  mit dem Trägheitsmoment  $\frac{dx}{3} \eta^3$ , woraus  $J = \int \frac{\eta^3}{3} dx$  folgt. Gl. (1)

besagt nichts anderes, als dass diese, für das Rechteck charakteristische Eigenschaft, mit praktisch genügender Genauigkeit auch für ganz andere Flächen Anwendung findet. Die Begründung erfolgt in der Weise, dass der praktische Gültigkeitsbereich der Gl. (1), sowie der damit verbundene Genauigkeitsgrad untersucht werden.

Ausgehend vom Trapez  $OP_1P_2P_3$  der Abb. 2 wird durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  eine Schar von Potenzkurven gelegt nach der Gleichung:

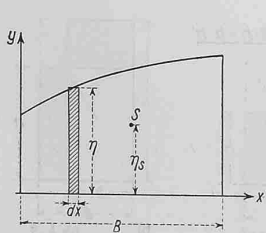


Abb. 1

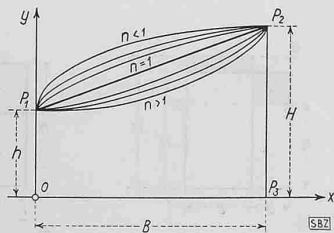


Abb. 2

$$\eta = h + \frac{H-h}{B^n} x^n \dots \dots \dots (2)$$

wo  $n$  der Parameter der Kurvenschar ist.  $n = 1$  ergibt die Gerade  $P_1P_2$ ,  $n > 1$  die Kurven unterhalb (*konkav* nach oben),  $n < 1$  diejenigen oberhalb (*konvex* nach oben) der Geraden  $P_1P_2$ . Die Integrale über das Intervall 0 bis  $B$  sind leicht auszuwerten und ergeben, wenn zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{h}{H} \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \dots \dots \dots (3)$$

gesetzt wird:

$$\eta_s = \frac{1}{2} \frac{\int \eta^2 dx}{\int \eta dx} = \frac{H}{2} \frac{[2n^2\lambda^2 + 2n\lambda + n + 1]}{(2n + 1)(1 + n\lambda)} \dots \dots \dots (4)$$

$$J = \int \eta^3 \frac{dx}{3} = \frac{BH^3}{3} \frac{(n + 1)(2n + 1) + 3n\lambda[2n^2\lambda^2 + 2n\lambda + n + 1]}{(n + 1)(2n + 1)(3n + 1)} \dots \dots \dots (5)$$

Daraus folgt das angenäherte Trägheitsmoment  $J'$  nach Gl. (1) zu:

$$J' = \frac{B}{3} (2\eta_s)^3 = \frac{BH^3}{3} \frac{[2n^2\lambda^2 + 2n\lambda + n + 1]^3}{(2n + 1)^3(1 + n\lambda)^3} \dots \dots \dots (6)$$

Zur Fehlerabschätzung dient das Verhältnis

$$v = \frac{J'}{J} \dots \dots \dots (7)$$

damit wird der Fehler  $\Delta$  in  $\%$ :

$$\Delta \text{‰} = 100(v - 1) \dots \dots \dots (8)$$

Abb. 3 vermittelt einen Ueberblick über die Abhängigkeit des Fehlers  $\Delta$  von  $n$  und  $\lambda$ . Mit zunehmendem  $\lambda = \frac{h}{H}$  nimmt  $\Delta$

rasch ab und ist für  $\lambda > 0,5$  im Absolutwert bereits von der Grössenordnung 1  $\%$  und darunter, und zwar für alle Werte von  $n$ . Die nach oben konvexen Kurven ( $n < 1$ ) zeigen auch für kleinere  $\lambda$  eine bessere Annäherung an den wahren Wert  $J$  als die nach oben konkaven ( $n > 1$ ). Falls notwendig kann, bei kleinen  $\lambda$ , durch eine passende Unterteilung der Fläche immer erreicht werden, dass der Gesamtfehler beliebig klein ausfällt, indem  $J'$  für die Teilflächen bestimmt wird.

Die Wahl von Potenzkurven bedeutet keine Einschränkung; jede Kurve durch  $P_1$  und  $P_2$  kann durch Potenzkurven angenähert werden, wobei die entsprechenden Werte für  $\eta_s$  und  $J$  als Integrale i. A. eine bessere Approximation aufweisen als diejenige unter den ursprünglichen Kurven selbst.

### b) Graphische Konstruktion

Die Schwerpunktskoordinate  $\eta_s$  kann nach bekannten Methoden analytisch oder graphisch bestimmt werden. In allen Fällen, wo wegen der Flachheit der Kurve gegen die Bezugsaxe das

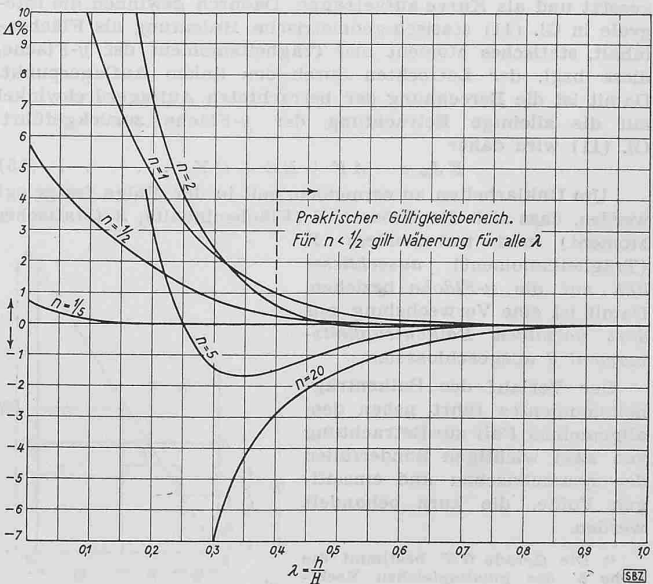


Abb. 3

Seilpolygon eine gedrängte Gestalt annimmt, kann zur Erhöhung der Genauigkeit eine graphische Konstruktion angewendet werden, die keine Parallelverschiebung erfordert und hier kurz erwähnt sei. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Unterteilung der Fläche in Lamellen gleicher Breite (Abbildung 4). Die Teilflächen werden durch Trapeze mit der Basis  $b$ , den mittleren Höhen  $h_1, h_2, \dots$  und den Flächen  $F_1 = b h_1, F_2 = b h_2, \dots$  approximiert. Die Schwerpunkte  $S_i$  können nach Abb. 4b bestimmt werden. Aus der Definition der Schwerpunkt-Ordinate

$$\eta_s = \frac{F_1 \eta_1 + F_2 \eta_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots}$$

folgt die Konstruktion nach Abb. 5a, wo das statische Moment  $\Sigma F_i \eta_i$  durch eine treppenförmige Fläche dargestellt ist, die durch sukzessive Anwendung der Hilfskonstruktion nach Abbildung 5b<sup>1)</sup> in ein inhaltsgleiches Rechteck  $O A A' O'$  verwandelt wird. Der Schnittpunkt  $T$  der Geraden  $OP$  ( $O'P = \Sigma h_i$ ) und der Rechteckseite  $A A'$  liefert  $\eta_s = A T$ .

2. Lamellen ungleicher Breite. Man reduziert sämtliche Lamellen auf die selbe Breite  $b$ , bestimmt nach Abb. 6 die Höhen  $h'$  der inhaltsgleichen Rechtecke und verfährt wie unter 1. Diese Konstruktion liefert gleichzeitig den Flächeninhalt, das statische Moment und nach Abschnitt a) das Trägheitsmoment, ein Umstand, der in der Folge die Auswertung der Formeln besonders vereinfacht.

**2. Berechnung der Auflagerdrehwinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ .**

a) Darstellung der Integrale aus der Kurve  $y = J_m/J$ .

Die Berechnung der Festpunkte eines durchlaufenden Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment  $J$  benützt die bekannten Integralausdrücke für die Auflagerdrehwinkel  $\alpha_1, \alpha_2 = \beta_1$  und  $\beta_2$ . Die in der Einleitung erwähnte Methode entspringt aus einer speziellen, direkt auf die  $1/J$ -Fläche hinzielenden Interpretation des allgemeinen Integrals für einen Auflagerdrehwinkel infolge  $M_1 = 1$  und  $M_2 = 1$  nach der Arbeitsgleichung:

$$\alpha = \int \frac{M M' dx}{E J} \dots \dots \dots (9)$$

Es ist zweckmässig, Gl. (9) mit einem passenden Festwert  $J_m$  (meistens  $J_m =$  kleinstes Balkenträgheitsmoment) zu multiplizieren, woraus

$$E J_m \alpha = \int \frac{J_m}{J} M M' dx \dots \dots \dots (9')$$

folgt.  $M$  und  $M'$  sind hier lineare Funktionen, ihr Produkt ist eine quadratische Funktion

$$M M' = A + B x + C x^2 \dots \dots \dots (10)$$

Gl. (10) in (9') eingesetzt ergibt:

$$E J_m \alpha = \int \frac{J_m}{J} (A + B x + C x^2) dx = A \int \frac{J_m}{J} dx + B \int \frac{J_m}{J} x dx + C \int \frac{J_m}{J} x^2 dx \dots \dots \dots (11)$$

Zur Abkürzung sei

$$y = \frac{J_m}{J} \text{ (dimensionslos) } \dots \dots \dots (12)$$

gesetzt und als Kurve aufgetragen. Dadurch gewinnen die Integrale in Gl. (11) statisch-geometrische Bedeutung als Flächeninhalt, statisches Moment und Trägheitsmoment der  $y$ -Fläche, diese bzgl. der Lotrechten durch den linken Auflagerpunkt. Damit ist die Berechnung der betrachteten Auflagerdrehwinkel auf die alleinige Betrachtung der  $y$ -Fläche zurückgeführt. Gl. (11) wird daher

$$E J_m \alpha = A F + B S + C Y \dots \dots \dots (13)$$

Um Unklarheiten zu vermeiden, soll in der Folge festgelegt werden, dass sich die Grössen  $F$  (Flächeninhalt),  $S$  (statisches Moment) und insbesondere  $Y$  (Trägheitsmoment) ausschliesslich auf die  $y$ -Fläche beziehen. Damit ist eine Verwechslung mit dem variablen Balkenträgheitsmoment  $J$  ausgeschlossen.

Der Verlauf des Balkenträgheitsmomentes führt neben dem allgemeinen Fall zur Betrachtung von zwei wichtigen Sonderfällen der symmetrischen und einseitigen Voüten, die kurz behandelt werden.

<sup>1)</sup> Die Gerade  $GG'$  bestimmt die Höhe  $h'$  des inhaltsgleichen Rechteckes:  $h' (b + B) = b h + B H =$  Fläche der beiden ursprünglichen Rechtecke.

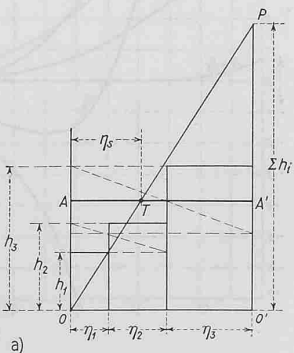


Abb. 5

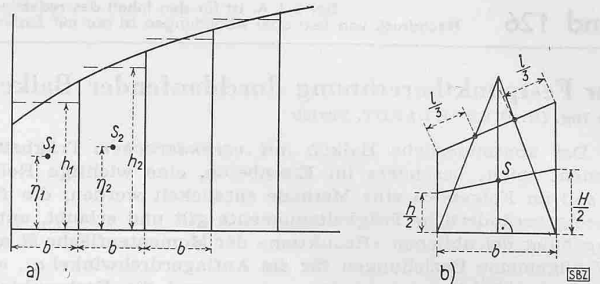


Abb. 4

b) Allgemeiner Fall

Es empfiehlt sich eine Koordinatentransformation von  $x$ , bzw.  $x'$  auf  $z$ , dessen Bezugsaxe durch den Schwerpunkt  $P$  der  $y$ -Fläche geht (Abb. 8), mit den Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 - z \\ x' &= l - x = l_2 + z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Die Auflagerdrehwinkel  $\alpha_i, \beta_i$  berechnen sich nach bekannten Integralformeln, wobei das Integrationsintervall für  $z$  von  $-l_2$  bis  $+l_1$  reicht. Man erhält mit  $y = \frac{J_m}{J}$ :

$$\alpha_1 = \int_0^l \frac{x'^2 dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_{-l_2}^{+l_1} (l_2 + z)^2 y dz$$

wegen der Lage der Koordinatenaxe für  $z$  durch den Schwerpunkt  $P$  der  $y$ -Fläche ist das Integral

$$\int y z dz = 0$$

und es folgt:

$$\alpha_1 = \frac{l_2^2 F + Y}{l^2 E J_m} \dots \dots \dots (15)$$

Analog erhält man:

$$\alpha_2 = \beta_1 = \int_0^l \frac{x x' dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_{-l_2}^{l_1} (l_1 - z) (l_2 + z) y dz$$

und hieraus

$$\alpha_2 = \beta_1 = \frac{l_1 l_2 F - Y}{l^2 E J_m} \dots \dots \dots (16)$$

Endlich ist:

$$\beta_2 = \int_0^l \frac{x^2 dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_{-l_2}^{l_1} (l_1 - z)^2 y dz$$

woraus:

$$\beta_2 = \frac{l_1^2 F + Y}{l^2 E J_m} \dots \dots \dots (17)$$

In den Gl. (15) bis (17) ist  $F$  der Flächeninhalt und  $Y$  das Trägheitsmoment der  $y$ -Fläche, dieses auf die Schwerpunktaxe durch  $P$  bezogen. Für  $J =$  konst. =  $J_m$  folgen die bekannten Ausdrücke  $\alpha_1 = \beta_2 = \frac{l}{3 E J_m}, \alpha_2 = \beta_1 = \frac{l}{6 E J_m}$ . Ferner ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{l_2 F}{l E J_m} \\ \beta_1 + \beta_2 &= \frac{l_1 F}{l E J_m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Die Bestimmung des Schwerpunktes  $P$  sowie der Grössen  $F$  und  $Y$  folgt aus Abschnitt 1.

c) Symmetrische Voüten

Dieser wichtige und häufige Sonderfall bedingt

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

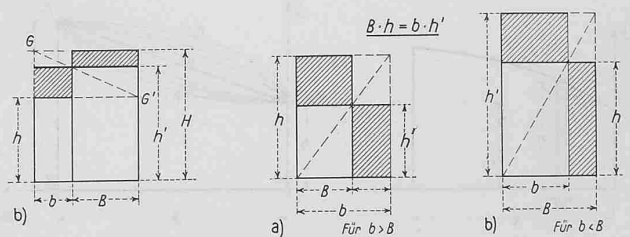


Abb. 6

wobei aus den Gl. (15) bis (18) folgende einfachen Ausdrücke entstehen:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{l^2 F + Y}{l^2 E J_m} \dots (19)$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \frac{l^2 F - Y}{l^2 E J_m}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \frac{F}{2 E J_m}$$

Die Bestimmung von  $F$  und  $Y$  nach Abschnitt 1 ist hier besonders einfach.

d) Einseitige Voüte

Bei einer einzigen Voüte ist es oft einfacher, die Integrale für die Auflagerdrehwinkel ohne Koordinatentransformation direkt auf die Variablen  $x$  und  $x'$  zu beziehen. Das Trägheitsmoment  $Y$  gilt dann je nachdem für die linke oder rechte Auflagerlotrechte und sei mit  $Y_l$  bzw. mit  $Y_r$  bezeichnet. Analoges gilt für das statische Moment  $S$  der  $y$ -Fläche mit den Bezeichnungen  $S_l = l_1 F$  und  $S_r = l_2 F$ . Man erhält somit:

$$\alpha_1 = \int_0^l \frac{x'^2 dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_0^l x'^2 y dx'$$

d. h.:

$$\alpha_1 = \frac{Y_r}{l^2 E J_m} \dots (20)$$

Weiter folgt:

$$\alpha_2 = \beta_1 = \int_0^l \frac{x x' dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_0^l x (l-x) y dx = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_0^l x' (l-x') y dx'$$

und hieraus die beiden Ausdrücke:

$$\alpha_2 = \beta_1 = \frac{l S_l - Y_l}{l^2 E J_m} = \frac{l S_r - Y_r}{l^2 E J_m} \dots (21)$$

Weiter wird:

$$\beta_2 = \int_0^l \frac{x^2 dx}{l^2 E J} = \frac{1}{l^2 E J_m} \int_0^l x^2 y dx$$

und daher:

$$\beta_2 = \frac{Y_l}{l^2 E J_m} \dots (22)$$

Für die Winkelsummen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{S_r}{l E J_m} \\ \beta_1 + \beta_2 &= \frac{S_l}{l E J_m} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

3. Berechnung der Hilfslinien- und Festpunktabstände

a) Allgemeiner Fall

Aus der Baustatik ist bekannt, wenn man zur Bestimmung der Festpunkte  $a$  und  $b$  die Hilfslinienabstände  $x_1, x_2$  und  $x_3$  heranzieht.  $x_1$  und  $x_2$  sind nichts anderes als die Festpunkte  $b$  und  $a$  im Falle der vollständigen Einspannung (gleich den Drittellinien, wenn  $J = \text{konst.}$ ) und sind, wenn auf die selbe Öffnung bezogen (Abb. 9), definiert durch:

$$x_1 = \frac{\beta_1 l}{\beta_1 + \beta_2} \quad x_2 = \frac{\alpha_2 l}{\alpha_1 + \alpha_2} \dots (24)$$

Die «verschränkte Drittellinie» im Abstände  $x_3$  folgt aus:

$$x_3 = \frac{x_2' R_2' - x_1 R_1}{R_1 + R_2'} \dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \beta_1 + \beta_2 \\ R_2' &= \alpha_1' + \alpha_2' \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

Damit sind die Festpunkte  $a'$  und  $b'$  aus denjenigen der angrenzenden Felder bestimmt und können graphisch nach der bekannten Konstruktion oder analytisch gefunden werden. Für  $a'$  in der Öffnung  $l'$  ist z. B.:

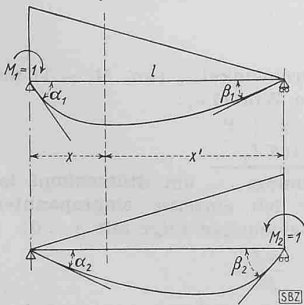


Abb. 7

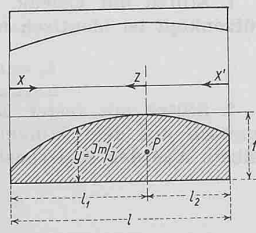


Abb. 8

$$a' = \frac{x_2' (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2' + \frac{x_1 (x_2 - x_2')}{l - a}} \dots (27)$$

Werden die aus dem vorigen Abschnitt für die Drehwinkel ermittelten Werte eingesetzt, so folgen die allgemeinen Ausdrücke für  $x_1$  und  $x_2$ . Zur Abkürzung wird

$$\sqrt{\frac{Y}{F}} = j \dots (28)$$

gesetzt.  $j$  ist der Trägheitsradius der  $y$ -Fläche;  $j \leq \frac{l}{\sqrt{12}}$ ; das Gleichheitszeichen gilt nur für konstantes Trägheitsmoment. Damit ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1 l_2 F - Y}{l_1 F} = l_2 - \frac{j^2}{l_1} \\ x_2 &= \frac{l_1 l_2 F - Y}{l_2 F} = l_1 - \frac{j^2}{l_2} \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

Für die analytische Berechnung der Festpunkte in der Öffnung  $l'$  können direkt in den Formeln

$$a' = \frac{\alpha_2' l'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \epsilon_1} \quad b' = \frac{\beta_1' l'}{\beta_1' + \beta_2' + \epsilon_2}$$

die Werte der Auflagerdrehwinkel eingesetzt werden. Dabei ist

$$\epsilon_1 = \beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1 \quad \epsilon_2 = \alpha_1 - \frac{b}{l-b} \alpha_2$$

mit den auf die benachbarten Öffnungen bezogenen Winkelgrößen. Nach Einsetzen der Werte aus (15) bis (17) folgt für den allgemeinen Fall:

$$\epsilon_1 = \frac{Y + l_1 (l_1 - a) F}{l (l - a) E J_m} \quad \epsilon_2 = \frac{Y + l_2 (l_2 - b) F}{l (l - b) E J_m} \dots (30)$$

Damit ist die Berechnung der Festpunkte  $a$  und  $b$  für jeden Verlauf der Balkenträgheitsmomente auf einfachem Wege gesichert.  $x_1, x_2$  und  $a, b$  sind grösser als bei konstantem Trägheitsmoment. Somit rücken die Festpunkte gegen die Feldmitte.

b) Symmetrische Voüten

Hier wird  $l_1 = l_2 = l/2$  und:

$$x_1 = x_2 = \frac{l^2 F - Y}{2 F} = \frac{l}{2} - 2 \frac{j^2}{l} \dots (31)$$

Für  $J = \text{konst.}$  wird  $x_1 = x_2 = \frac{l}{3}$

c) Einseitige Voüte

Aus den entsprechenden Ausdrücken (20) bis (23) folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l S_l - Y_l}{S_l} = l - \frac{Y_l}{S_l} \\ x_2 &= \frac{l S_r - Y_r}{S_r} = l - \frac{Y_r}{S_r} \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

Ferner vermitteln Gl. (20) bis (22) die Werte:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{Y_l - a S_l}{l (l - a) E J_m} \\ \epsilon_2 &= \frac{Y_r - b S_r}{l (l - b) E J_m} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

4. Anwendungen und Sonderfälle

a) Auflagerdrehwinkel für  $p = \text{konst.}$  und  $P$  in Balkenmitte

Obschon die entwickelte Berechnungsart vor allem für die Festpunktbestimmung geeignet ist, können bei symmetrischen Voüten im Falle gleichmässig verteilter Belastung  $p$ , sowie bei einer Einzellast  $P$  in Balkenmitte, einfache Ausdrücke für die Auflagerdrehwinkel  $\alpha_0 = \beta_0$  angegeben werden, woraus die Festpunktmomente

$$M_i = -\frac{a}{l} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \quad M_k = -\frac{b}{l} \frac{\beta_0}{\beta_1}$$

und die Schlusslinie bestimmt werden. Die Betrachtung der verschiedenen Belastungsfälle soll auf diese beiden wichtigen Sonderfälle beschränkt bleiben.

Aus Symmetriegründen ist  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_0 + \beta_0 = 2\alpha_0$ ; der Belastungszustand ist  $M' = 1$  und das Moment  $M$ , auf die Koordinatenachse durch Balkenmitte gelegt ( $z = 0$ ), wird

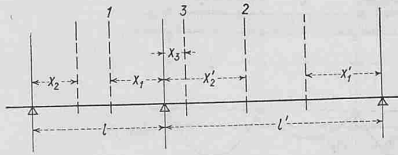


Abb. 9

$$M = \frac{p}{2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right)$$



Es folgt:

$$2\alpha_0 = 2 \int_0^{l/2} \frac{p}{2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \frac{dz}{EJ}$$

und

$$\alpha_0 = \frac{p}{2EJ_m} \int_0^{l/2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) y dz$$

also:

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{p}{4EJ_m} \left( \frac{l^2}{4} F - Y \right) \dots (34)$$

Ein Vergleich mit der 2. Formel (19) führt zu:

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{pl^2}{4} \alpha_2 \dots (35)$$

und für die Festpunktmomente zu den bekannten Ausdrücken:

$$M_i = -\frac{pal}{4}, M_k = -\frac{pbl}{4} \dots (36)$$

Die Einfachheit dieser Ausdrücke ist damit für symmetrische Vouten allgemein bewiesen und führt zu der selben einfachen graphischen Konstruktion der Schlusslinie wie bei  $J = \text{konst.}$ , wo Gl. (34) in

$$\alpha_0 = \frac{pl^3}{24EJ_m}$$

übergeht.

Analog folgt für eine Einzellast  $P$  in Balkenmitte:

$$\alpha_0 = \frac{P}{2EJ_m} \int_0^{l/2} xy dz$$

und hieraus

$$\alpha_0 = \frac{PS_l'}{4EJ_m} \dots (37)$$

wo  $S_l'$  das statische Moment der halben  $y$ -Fläche bzgl. der linken Auflagerlotrechten bedeutet. Für  $J = J_m = \text{konst.}$  geht Gl. (37) über in den bekannten Ausdruck

$$\alpha_0 = \frac{Pl^2}{16EJ_m}$$

b) Balken mit unendlich vielen, gleichen Oeffnungen

Bei freidrehbaren Stützen folgt aus Symmetriegründen

$$x_1 = x_2', R_1 = R_2', x_3 = 0, a = b = a_\infty$$

Gl. (27) vereinfacht sich zu

$$a_\infty = \frac{x_1}{2 - \frac{x_1}{l - a_\infty}}$$

woraus

$$a_\infty = \frac{l - \sqrt{l^2 - 2lx_1}}{2}$$

folgt. Wird  $x_1$  aus Gl. (31) eingesetzt, so folgt:

$$a_\infty = \frac{l}{2} - j \dots (38)$$

Für  $J = \text{konst.}$  folgt der bekannte Wert

$$a_\infty \cong 0,211 l$$

Wird der Balken nach Abb. 10 belastet, so ist aus Symmetriegründen die Schlusslinie in jeder Oeffnung horizontal. Das Stützenmoment  $M_1$  kann nach der Dreimomentengleichung berechnet werden:

$$\beta_0 + \alpha_0' + M_1 \beta_1 + M_2 (\beta_2 + \alpha_1') + M_2' \alpha_2' = 0 \dots (39)$$

Aus Symmetriegründen ist  $M_2 = M_2' = M_1, \alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2, \alpha_0' = \alpha_0$ ; ferner wird nach Gl. (34)

$$\beta_0 = \frac{g}{4EJ_m} \left( \frac{l^2}{4} F - Y \right) \quad \alpha_0' = \frac{(g+p)}{4EJ_m} \left( \frac{l^2}{4} F - Y \right) \dots (40)$$

Es folgt für das Stützenmoment  $M_1$ :

$$M_1 = -\frac{(2g+p)}{4} \left( \frac{l^2}{4} - j^2 \right) \dots (41)$$

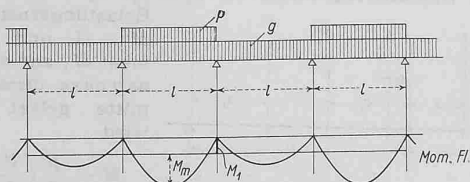


Abb. 10

Das maximale Feldmoment  $M_m$  ist

$$M_m = \frac{(g+p)}{8} l^2 + M_1 = \frac{pl^2}{16} + \frac{(p+2g)}{4} j^2 \dots (42)$$

Bei konstantem  $J$  wird:

$$M_1 = -\frac{gl^2}{12} - \frac{pl^2}{24} \quad M_m = \frac{gl^2}{24} + \frac{pl^2}{12}$$

Besonderes Interesse hinsichtlich der Anwendung verdient der Balken mit unendlich vielen, gleichen Oeffnungen auf elastisch-drehbaren Stützen. Der Winkel  $\epsilon_1$  in der Festpunktformel wird aus der allgemeinen Beziehung

$$\frac{1}{\epsilon_1} = \frac{1}{\epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_s}$$

( $\epsilon_s =$  Winkel am Stützenkopf inf.  $M_s = 1$ ) gewonnen (Verallgemeinerung für obere und untere Stützenreihe leicht möglich). In Analogie mit Obigem kann der Festpunktabstand  $a_\infty$  aus den entwickelten Formeln für symmetrische Vouten bestimmt werden. Aus der Bedingung  $a' = a = a_\infty$  folgt zunächst:

$$a_\infty = \frac{l}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(2\epsilon_s + \alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(2\epsilon_s + \alpha_1 + \alpha_2)}} \right]$$

und hieraus mit der Abkürzung

$$z = \frac{4EJ_m \epsilon_s}{F} \dots (43)$$

nach einigen Umformungen:

$$a_\infty = \frac{l}{2} - \frac{j}{l} \sqrt{\frac{4j^2 + z l^2}{1 + z}} \dots (44)$$

Ist  $\epsilon_s = z = \infty$  (frei-drehbare Stützen), so folgt unmittelbar

Gl. (38) mit  $a_\infty = \frac{l}{2} - j$ . Für  $J = J_m = \text{konst.}$  ergibt sich aus

Gl. (44) mit  $F' = l$  und  $Y = \frac{l^3}{12}$ :

$$a_\infty = \frac{l}{2} - \frac{l}{6} \sqrt{\frac{1 + 3z}{1 + z}} \dots (45)$$

Für  $\epsilon_s = z = 0$  (vollständige Einspannung) ist  $a_\infty = \frac{l}{2} - \frac{2}{l} j^2$  (Gl. 31).

Bei Annahme der selben Belastung wie in Abb. 10 können das Stützenmoment  $M_2$  und das maximale Feldmoment  $M_m$  in der mit  $(g+p)$  belasteten Oeffnung, ferner das Moment  $M_s$  am Stützenkopf bestimmt werden. Aus den Elastizitätsbedingungen, sowie aus den Symmetrie-Eigenschaften folgt nach einigen Zwischenrechnungen:

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{4} - j^2 \right) \left( g + \frac{p}{2} \frac{2+z}{1+z} \right) \\ M_m &= \frac{gj^2}{2} + \frac{p}{4} \frac{2j^2 + \left( \frac{l^2}{4} + j^2 \right) z}{1+z} \\ M_s &= \pm \frac{p}{2} \frac{\frac{l^2}{4} - j^2}{1+z} \end{aligned} \dots (46)$$

Für  $J = \text{konst.}$  gehen die Gl. (46) über in die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{gl^2}{12} - \frac{pl^2}{24} \frac{2+z}{1+z} \\ M_m &= \frac{gl^2}{24} + \frac{pl^2}{24} \frac{1+2z}{1+z} \\ M_s &= \pm \frac{pl^2}{12} \frac{1}{1+z} \end{aligned}$$

Die Gl. (46) können leicht auf den Fall zweiseitiger Stützen erweitert und in geeigneter Weise zur Berechnung von Stockwerkrahmen und Pilzdecken herangezogen werden, da der Festpunktabstand bei elastisch-drehbarer Auflagerung sehr rasch gegen den Wert  $a_\infty$  konvergiert.

c) Einspannungsgrad<sup>2)</sup>

1. Stütze mit Gelenk. Der Drehwinkel  $\epsilon_s$  (inf.  $M_1 = 1$ ) am Stützenkopf ist identisch mit dem Winkel  $\alpha_1$ :

$$\epsilon_s = \alpha_1 = \frac{l_2^2 F + Y}{l^2 E J_m}$$

2. Stütze mit fester Einspannung.  $\epsilon_s$  am Stützenkopf ist identisch mit dem Winkel  $\alpha$  für den einseitig eingespannten Balken. Aus den Superpositionsgleichungen folgt mit  $\beta = 0$ :

$$\epsilon_s = \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2}$$

<sup>2)</sup> Vgl. Prof. Dr. M. Ritter: Autographie der Vorlesung über Baustatik II.

Nach Einsetzen der Werte aus den Gl. (15) bis (17) wird

$$\epsilon_s = \frac{Y}{(l_1^2 + j^2) E J_m} \dots (47)$$

Für  $J = \text{konst.} = J_m$  liefert (47):  $\epsilon_s = \frac{l}{4 E J_m}$

3. Stütze ohne Querkraft. Dieser Fall tritt bei freiem Stützkopf mit  $M_1 = 1$  auf. Hier wird, weil  $M = M' = 1$ :

$$\epsilon_s = \int \frac{dx}{E J} = \frac{F}{E J_m} \dots (48)$$

d) Ein- und zweiseitig fest eingespannter Balken

Bei einem rechts vollständig eingespannten und links freidrehbar gelagerten Balken ist  $a = 0$ ;  $b = \frac{\beta_1 l}{\beta_1 + \beta_2}$ ; für symmetrische Voüten folgt  $b = \frac{l}{2} - \frac{2 j^2}{l}$  nach Gl. (31) und für gleichmässig verteilte Belastung

$$M_i = 0 \quad M_k = -\frac{p l^2}{8} + \frac{p}{2} j^2 \dots (49)$$

Wegen  $M_2 = M_k \frac{l}{l-b}$  ist

$$M_2 = -\frac{\beta_0}{\beta_2} = -\frac{p l^2}{4} \frac{\frac{l^2}{4} - j^2}{\frac{l^2}{4} + j^2} \dots (50)$$

Für  $J = \text{konst.}$  folgt der bekannte Wert  $M_2 = -\frac{p l^2}{8}$

Beim beidseitig vollständig eingespannten Balken sind die Festpunktabstände  $a$  und  $b$  anhand der Gl. (29) zu ermitteln:

$$a = l_1 - \frac{j^2}{l_2}$$
$$b = l_2 - \frac{j^2}{l_1}$$

Für symmetrische Voüten und gleichmässig verteilte Belastung  $p$  folgen die Einspannmomente  $M_1$  und  $M_2$  unmittelbar zu:

$$M_1 = M_2 = -\frac{p l^2}{8} + \frac{p}{2} j^2 \dots (51)$$

Das maximale Feldmoment  $M_m$  ist

$$M_m = \frac{p l^2}{8} + M_2 = \frac{p}{2} j^2 \dots (52)$$

Für  $J = \text{konst.}$  folgt  $M_m = \frac{p l^2}{24}$

Der günstige Einfluss der Voüten als Funktion des variablen Balkenträgheitsmomentes auf das maximale Feldmoment  $M_m$  kommt hier deutlich zum Ausdruck. Bedeutet  $\Delta$  in % die Reduktion von  $M_m$  gegenüber dem Feldmoment  $M_m^0$  bei konstantem Trägheitsmoment, so folgt, wenn

$$j^2 = (1 - \epsilon) \frac{l^2}{12}$$

gesetzt wird:

$$\Delta^{\circ/\circ} = \frac{(M_m^0 - M_m)}{M_m^0} 100 = 100 \left( 1 - \frac{\frac{p}{2} j^2}{\frac{p l^2}{24}} \right) = 100 \epsilon$$

z. B. ist für  $\epsilon = 0,1$  der Wert  $\Delta = 10 \%$ , d. h. die Reduktion von  $M_m$  ist gleich derjenigen von  $j^2$  auf  $\frac{l^2}{12}$ . Die Erhöhung  $\Delta^{\circ/\circ}$  des Einspannmomentes ergibt dagegen nur

$$\Delta^{\circ/\circ} = 50 \epsilon$$

Bei  $\epsilon = 0,1$  ist  $\Delta^{\circ/\circ} = 5 \%$ ; der Gewinn am Feldmoment ist also doppelt so gross wie der Verlust am Einspannmoment.

e) Die Festpunkte des eingespannten Bogens

Die vorliegenden Betrachtungen können auf die Festpunktbestimmung eines eingespannten Bogens angewendet werden.

Die  $y = \frac{J_m}{J}$ -Fläche wird hier ersetzt durch die  $y' = \frac{J_s}{J \cos \varphi}$ -Fläche ( $J_s =$  Bogenträgheitsmoment im Scheitel). Dann ergibt sich aus der Definition der Festpunktabstände, der Gl. (29) entsprechend:

$$a = l_1 - \frac{j^2}{l_2}$$
$$b = l_2 - \frac{j^2}{l_1}$$

<sup>3)</sup> Vergl. Prof. Dr. M. Ritter: Autographie der Vorlesung über Massivbau.

wo  $j^2 = \frac{Y'}{F'}$  das Quadrat des Trägheitsradius der  $y'$ -Fläche bedeutet. Für einen symmetrischen Bogen wird

$$a = b = \frac{l}{2} - \frac{2 j^2}{l}$$

Für  $J \cos \varphi = J_s$  folgt  $j^2 = \frac{l^2}{12}$  und  $a = b = \frac{l}{3}$

Beim Parabelbogen mit dem Pfeil  $f$ , der Spannweite  $l$  und der Gleichung 2. Grades

$$w = \frac{4 f}{l^2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right)$$

wo  $w$  die Ordinate der Bogenaxe bzgl. der Kämpferwaagrechten bedeutet, kann für den Abstand  $t$  des elastischen Schwerpunktes ein einfacher Ausdruck gewonnen werden. Es ist

$$t = \frac{\int w \frac{ds}{E J}}{\int \frac{ds}{E J}} = \frac{\int f \left( 1 - \frac{4 z^2}{l^2} \right) y' dz}{\int y' dz}$$

und hieraus folgt

$$t = f \left( 1 - \frac{4 j^2}{l^2} \right) \dots (53)$$

Für  $J \cos \varphi = J_s$  wird, wie bekannt,  $t = \frac{2}{3} f$

### 5. Zusammenhang mit der Näherungsmethode der starren Voüten; Potenzgesetz

a) Allgemeines

Die Näherungsmethode der starren Voüten<sup>3)</sup> führt zu einfachen Ausdrücken und eignet sich besonders für schnelle, überschlägige Berechnungen, wo das veränderliche Trägheitsmoment in grossen Zügen berücksichtigt werden soll. Man denkt sich die bestehenden Voüten ersetzt durch zwei starre Voüten der Länge  $c$  und  $c'$  an den Balkenenden und setzt dort  $J = \infty$ , im übrigen  $J = J_m = \text{konstant}$ .  $c$  und  $c'$  werden geschätzt. Die Integration ergibt für die Auflagerdrehwinkel, Hilfslinienabstände usw. einfache Ausdrücke. Das Integrationsintervall reicht von  $c$  bis  $l - c'$  für  $J_m$  konstant. Der Näherungscharakter der Methode liegt erstens darin, dass die Strecken  $c$  und  $c'$  nur geschätzt werden; zweitens werden für jede der zu berechnenden Grössen die selben beiden Strecken  $c$  und  $c'$  benützt, während in Wirklichkeit für jede der Grössen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, x_1, \dots$ , usw. das ihr zugehörige Paar von Strecken  $c$  und  $c'$  eingeführt werden müsste. Trotzdem kann diese Berechnungsart in vielen Fällen zu einem grössenordnungsmässig genügenden Ergebnis führen, sobald  $c$  und  $c'$  einigermassen passend, d. h. wie wir sehen werden, nicht zu gross gewählt werden. Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf den symmetrischen Fall mit  $c = c'$ ; zur Abkürzung wird

$$\frac{c}{l} = \lambda$$

gesetzt. Die Integration von  $c$  bis  $l - c$  ergibt die bekannten Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \beta_2 &= \frac{l}{3 E J_m} [(1 - \lambda)^3 - \lambda^3] \\ \alpha_2 = \beta_1 &= \frac{l}{6 E J_m} (1 - 6 \lambda^2 + 4 \lambda^3) \\ R_1 = \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{l}{2 E J_m} (1 - 2 \lambda) \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

woraus der Hilfslinienabstand

$$x_1 = \frac{\beta_1 l}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{l}{3} (1 + 2 \lambda - 2 \lambda^2) \dots (55)$$

folgt. Ist  $\lambda$  gegeben, so kann die Berechnung von  $R_1$  und  $x_1$  auch auf graphischem Wege erfolgen.

b) Vergleich mit der exakten Methode

Werden die Ausdrücke (54) und (55) mit den entsprechenden aus den Abschnitten 2 und 3 verglichen, so ergibt jede Gleichung einen verschiedenen Wert für  $\lambda$ ; diejenigen aus den Gleichungen für  $R_1$  und  $x_1$  seien mit  $\lambda_R$  und  $\lambda_x$  bezeichnet. Es folgt unmittelbar

$$\lambda_R = \frac{1}{2} - \frac{F}{2 l}$$
$$\lambda_x = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{j}{l}} \dots (56)$$

Die Gl. (56) zeigen den Zusammenhang mit der exakten Methode; die Einführung der beiden Werte  $\lambda_R$  und  $\lambda_x$  nach (56) in die Berechnung der Festpunkte würde zum richtigen Ergebnis führen, wäre aber sinnlos, da ja schon die Werte  $F$  und  $j$  zum Ziele führen. Die Berechnung mit  $\lambda$  ist deshalb nur dann be-

reichtig, wenn sie rascher als die exakte Berechnung (hier die Bestimmung von  $F$  und  $j$ ) zu einem brauchbaren Ergebnis verhilft. Deshalb beschränkt man sich auf einen einzigen Wert von  $\lambda$ . Eine Fehlerabschätzung für

$$x_3 = \frac{R_1 x_1 - R_2 x_2}{R_1 + R_2}$$

zeigt, dass man besser fährt, wenn man sich bei der Wahl von  $\lambda$  möglichst dem Wert  $\lambda_x$  und nicht demjenigen  $\lambda_R$  nähert, da dann der Fehler in der Bestimmung der Festpunkte kleiner ausfällt. Da  $\lambda_x$  als Funktion des Trägheitsradius kleiner ist als  $\lambda_R$ , wird man bestrebt sein,  $\lambda$  in angemessen niedrigen Grenzen zu wählen, damit die Festpunkte nicht zu günstig ausfallen. Auf dieser Grundlage können für  $\lambda$  aus dem Verlauf des Trägheitsmomentes  $J$  Näherungsformeln und Konstruktionen abgeleitet werden, worauf hier jedoch verzichtet wird.

c) Potenzgesetz<sup>4)</sup>

Im allgemeinen können für  $F$  und  $Y$  bzw.  $j$  keine analytischen Ausdrücke angegeben werden. Schon bei einfachen Voutenformen, z. B. bei geraden Vouten, werden die Formeln dermassen unhandlich, dass sie für die numerische Auswertung nicht mehr in Betracht kommen. Dies kommt besonders im Eisenbeton zum Ausdruck, wo ein Balken meistens als Plattenbalken auftritt.

<sup>4)</sup> Vergl. Prof. Dr. M. Ritter: «Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment», SBZ Bd. 53, S. 231\*, 244\* (1909).

Dagegen gelingt es in vielen Fällen, durch Einführung eines den praktischen Verhältnissen möglichst entsprechenden, analytisch einfachen Gesetzes für die Veränderlichkeit von  $J$  Ausdrücke abzuleiten, die für die numerische Auswertung geeignet sind. Ein solches ist, z. B. für symmetrische Vouten, das Potenzgesetz:

$$y = \frac{J_m}{J} = 1 - (1 - n) \frac{z^r}{(l/2)^r} \dots \dots (57)$$

wobei  $n = \frac{J_m}{J_A}$  ( $J_A$  = Trägheitsmoment am Auflager,  $J_m$  in Balkenmitte) und  $r$  eine gerade, ganze Zahl ist. Daraus folgt unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_{-l/2}^{+l/2} y dz = \frac{r+n}{r+1} l \\ Y &= \int_{-l/2}^{+l/2} y z^2 dz = \frac{r+3n}{r+3} \frac{l^3}{12} \end{aligned} \right\} \dots \dots (58)$$

und damit

$$j^3 = \frac{Y}{F} = \frac{(r+1)(r+3n)}{(r+3)(r+n)} \frac{l^2}{12}$$

Hieraus lassen sich durch Einsetzen alle bekannten Ausdrücke für die Auflagerdrehwinkel, die Hilfslinienabstände usw. entwickeln. Wichtig ist hier die Festsetzung von  $r$ , weil davon die Güte der Approximation abhängt.

## Ueber die Berechnung des Wärmebedarfes von Räumen

Von A. P. WEBER, Ing. bei A. Eigenmann, Ingenieur-Bureau, Zürich

### 1. Einleitung

Mit dem Fortschritt des Bauwesens und den erhöhten Ansprüchen, die heute an die Raumheizung gestellt werden, hat sich die Berechnung einer Raumheizanlage zu einer eigentlichen Ingenieuraufgabe entwickelt. Während man in den Anfängen der Heiztechnik den Wärmebedarf in der Regel nur nach dem Volumen der zu heizenden Räume bestimmt hatte, sind die massgebenden Heizfirmen längst dazu übergegangen, die Berechnung nach der Lehre von der Wärmeübertragung und den Forschungsergebnissen der Baustoffphysik durchzuführen. Leider ist aber die falsche Ansicht noch weit verbreitet, die Grösse der Heizkörper und der Kessel könnten lediglich nach dem Raumvolumen festgelegt werden. Dies führt zu Enttäuschungen im Betrieb, denen man durch Ueberdimensionieren der Heizkörper und der Kesselanlagen zu begegnen sucht. Man erhält so hohe Anlagekosten, eine schlechte Anpassung der Wärmezuteilung an die einzelnen Räume und hohe Betriebskosten. Nur die genaue Berechnung ermöglicht, solche Nachteile zu vermeiden. Sie erfordert allerdings viel Zeit. Um sie abzukürzen und dadurch besser konkurrieren zu können, wurde sie vielerorts stark schematisiert, gelegentlich so stark, dass sie in einfachen Fällen ungeschulten Routiniers überlassen werden kann. Im Folgenden wird versucht, die fachtechnisch richtige Behandlung kurz zusammenfassend darzustellen.

### 2. Theoretische Grundlagen

Im Verlauf der weiteren Ausführungen werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

- $\alpha_i$  = innere Wärmeübergangszahl kcal/m<sup>2</sup>, h, °
- $\alpha_a$  = äussere Wärmeübergangszahl kcal/m<sup>2</sup>, h, °
- $\lambda$  = Wärmeleitzahl kcal/m, h, °
- $\gamma$  = spezifisches Gewicht kg/m<sup>3</sup>
- $\delta$  = Wandstärke m
- $c$  = spezifische Wärme kcal/kg
- $k$  = Wärmedurchgangszahl kcal/m<sup>2</sup>, h, °
- $Q$  = Wärmemenge kcal/h
- $F$  = für den Wärmedurchgang massgebende Fläche m<sup>2</sup>
- $t_i$  = Innentemperatur des Raumes °C
- $t_a$  = Aussentemperatur des Raumes °C
- $\vartheta$  = Wandoberflächentemperatur °C

Die geschichtliche Entwicklung der wissenschaftlichen Wärmebedarfsberechnung kann bis zu *Isaac Newton* zurück verfolgt werden. In seiner Abhandlung über die Temperaturen, die er im Jahre 1701 in einer Mitteilung an die Royal Society veröffentlichte, stellte er die folgende Beziehung auf:

$$Q = \alpha F (t_i - \vartheta_1) \dots \dots (1)$$

Diese Gleichung stellt bekanntlich die Wärmeabgabe einer Oberfläche von der Temperatur  $\vartheta_1$  an die Umgebung dar, und wird als Newtonsches Abkühlungsgesetz bezeichnet. Für die planparallele Platte kann somit sinngemäss gesetzt werden:

$$Q = \alpha_i F (t_i - \vartheta_1) \dots \dots (1a)$$

$$\text{und analog für die äussere Seite} \quad Q = \alpha_a F (\vartheta_2 - t_a) \dots \dots (2)$$

Im Jahre 1822 gab der französische Physiker *J. B. Fourier* seine «Théorie analytique de la chaleur» heraus, worin das grundlegende Gesetz für die Wärmeleitung enthalten war [1]<sup>1)</sup>. Man bezeichnet es heute allgemein als das Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung; es lautet:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} F (\vartheta_1 - \vartheta_2) \dots \dots (3)$$

oder in der Differentialform:

$$Q = -\lambda F \frac{d\vartheta}{dx} \dots \dots (3a)$$

Durch Eliminieren der Wandtemperaturen  $\vartheta$  und Addieren der Gleichungen 1 bis 3 erhält man:

$$Q = \frac{F (t_i - t_a)}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \dots \dots (4)$$

Diese Gleichung wurde 1860 vom französischen Physiker *Péclet* in seinem Werk «Traité de la chaleur» [2] erstmals veröffentlicht und wird noch heute nach ihm benannt.

Schliesslich hat *Franz Grashof*, Professor für Maschinenbau an der Technischen Hochschule in Karlsruhe und Mitbegründer des VDI, im Jahre 1875 in seinem Lehrbuch «Theoretische Maschinenlehre» [3] die Formel (4) in jene Fassung gebracht, die wir heute als die Grundgleichung der Wärmebedarfsberechnung ansehen und verwenden, nämlich:

$$Q = k F (t_i - t_a) \dots \dots (5)$$

wobei für die Wärmedurchgangszahl  $k$  bekanntlich zu setzen ist:

$$1/k = 1/\alpha_i + \delta/\lambda + 1/\alpha_a \dots \dots (6)$$

### 3. Grundlegende Gesichtspunkte zur Berechnung der Wärmeverluste

Die praktische Anwendung der oben erwähnten Formeln bei der Wärmebedarfsrechnung hat in der Folge der Altmeister der Heizungstechnik, *Hermann Rietschel* 1893 in seinem klassischen «Leitfaden» [4] ausführlich und unter Berücksichtigung des Windinflusses, der Himmelsrichtung und der Betriebsunterbrüche behandelt. Bis in die neuere Zeit hinein waren die Rietschelschen Rechenmethoden für die gesamte Heizungstechnik massgebend.

Die grosse Vielgestaltigkeit der Bauelemente, die verschiedenen Heizsysteme und die erhöhten Ansprüche machten in den letzten Jahren bei Wärmebedarfsberechnungen zahlreiche Verfeinerungen und Erweiterungen erforderlich. Diese Ergänzungen sind weitgehend in den deutschen «Regeln für die Berechnung des Wärmebedarfs von Gebäuden» [5] niedergelegt (DIN 4701), deren neueste Fassung im Jahre 1944 herausgegeben worden war. Die Schweizer «Regeln» [6] sind in Anlehnung an die alten deutschen aufgestellt worden (1926); sie sind heute, trotz einer wertvollen Ergänzung vom Jahre 1941, revisionsbedürftig. Wie aus diesem kurzen geschichtlichen Ueberblick hervorgeht, waren es hervorragende Pioniere der Wissenschaft und Technik, die die Grundlagen der Wärmebedarfsberechnung geschaffen haben.

<sup>1)</sup> Die Zahlen in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.