

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 65 (1947)  
**Heft:** 47

**Artikel:** Les rendements isentropiques et polytropiques des compresseurs et turbines à gaz parfaits  
**Autor:** Houberechts, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55987>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Les rendements isentropiques et polytropiques des compresseurs et turbines à gaz parfaits

Par ANDRE HOUBERECHTS, Ing. civil électr. et méc., Prof. à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain

DK 621.51.018

Dans l'étude des compresseurs rotatifs et des turbines, on introduit pour tenir compte facilement des différentes pertes internes de ces machines la notion de *rendement interne*. Mais celui-ci peut être présenté de deux façons différentes, à savoir comme *rendement isentropique interne* ou comme *rendement polytropique interne*. Ces deux caractéristiques sont d'un emploi courant, quoique la première semble jusqu'à présent avoir eu la préférence. Afin de lever toute confusion entre les deux notions, nous avons trouvé opportun d'en préciser la signification, de les comparer et de montrer quelles relations existent entre elles. Pour plus de clarté nous considérerons d'abord le cas des compresseurs puis celui des turbines. Nous exposerons ensuite quelques applications dans lesquelles les rendements, suivant les deux conceptions, apparaîtront de façon concrète.

## I. Le cas des compresseurs

### 1. Le travail moteur des compresseurs

Considérons un compresseur rotatif, du type centrifuge ou du type axial, sans refroidissement interne, ou bien un étage de compression appartenant à un compresseur avec refroidissement entre étages. Soit 1 ( $p_1, v_1, T_1$ ) l'état du fluide à l'entrée de cette machine ou de cet étage, et 2 ( $p_2, v_2, T_2$ ) l'état du même fluide à la sortie. On sait que pour cette machine, du type opératrice, le travail moteur  $L_m$  à appliquer au rotor peut être calculé par l'une ou l'autre des deux formules (1) ou (2), écrites pour 1 kg de fluide:

$$(1) \quad AL_m = -q + A \Delta h + A \Delta k + \Delta i$$

$$(2) \quad L_m = - \int_1^2 v dp + \Delta h + \Delta k + L_f$$

Le symbole  $q$  y désigne l'action calorifique du milieu extérieur sur le fluide pendant son passage de 1 à 2;  $h, k,$  et  $i$  sont respectivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'enthalpie du fluide et  $v$  son volume spécifique;  $1/A = 427$  mkg/kcal est l'équivalent mécanique de la calorie; enfin,  $L_f$  désigne, par kg, les travaux de frottement internes au fluide et ceux au contact du fluide avec les éléments de la machine. Pour les compresseurs les tubulures d'entrée et de sortie sont toujours sensiblement à même hauteur, et leurs sections dimensionnées de telle sorte que la vitesse du fluide à l'entrée est approximativement la même qu'à la sortie. On peut donc admettre que l'on ait:

$$\Delta h = 0 \quad \text{et} \quad \Delta k = 0$$

Pour les gaz parfaits on peut écrire d'autre part:

$$\Delta i = \int_1^2 c_p dT = c_p (T_2 - T_1)$$

$c_p$  étant la chaleur spécifique du fluide sous pression constante et  $T$  sa température absolue. Enfin, la valeur de  $q$ , en principe négative, est toujours négligeable.

Si la compression s'était effectuée sans travaux de frottement, elle aurait été isentropique, on aurait pu la représenter dans les diagrammes ( $p, v$ ), fig. 1, et ( $T, s$ ), fig. 2, par la ligne (1, 2') et l'équation de la transformation aurait été:

$$pv^\kappa = c$$

avec  $\kappa = c_p/c_v$ . Les formules (1) et (2) donneraient alors:

$$(3) \quad A(L_m)_s = i_2' - i_1 = c_p (T_2' - T_1)$$

$$(4) \quad (L_m)_s = \int_1^{2'} v dp = p_1 v_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]$$

Ce travail serait représenté dans le diagramme ( $p, v$ ) par la surface comprise entre la ligne (1, 2'), l'axe des  $p$  et les horizontales des points 1 et 2' (isobares  $p_1$  et  $p_2$ ). Dans le diagramme ( $T, s$ ), l'équivalent calorifique du travail  $(L_m)_s$  serait représenté par la surface délimitée par l'isobare  $p_2$ , l'axe des entropies  $s$ , et les verticales des points 2' et 3, ce dernier point étant situé sur l'isobare  $p_2$  et sur l'isotherme du point 1.

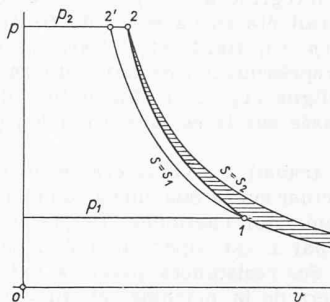


Fig. 1

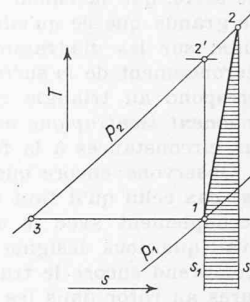


Fig. 2

En réalité la transformation n'est pas isentropique. Elle s'effectue avec frottement ( $L_f > 0$ ) ce qui implique, bien que l'on ait  $q = 0$ , un accroissement de l'entropie  $s$ . De plus, la température  $T_2$  obtenue en fin de compression est supérieure à ce qu'elle aurait été si la transformation avait été isentropique. Dans les diagrammes ( $p, v$ ) et ( $T, s$ ) la compression réelle sera donc représentée par la ligne (1, 2). D'une façon générale on peut admettre qu'elle s'effectue de façon *polytropique* conformément à l'équation:

$$pv^m = c$$

avec  $m > \kappa$ . D'après la définition même de l'entropie  $s$  on voit immédiatement que l'on a:

$$AL_f = \int_1^2 T ds$$

et que l'équivalent calorifique de ces travaux de frottement est représenté par la surface hachurée horizontalement du diagramme ( $T, s$ ), fig. 2, comprise entre la ligne (1, 2), l'axe des  $s$  et les verticales des points 1 et 2. La surface équivalente du diagramme ( $p, v$ ), fig. 1, et représentative de  $L_f$  est celle, hachurée horizontalement aussi, et délimitée par la ligne de transformation (1, 2) et les lignes isentropiques  $s_1$  et  $s_2$  des points 1 et 2. Pour la compression (1, 2) réelle, le travail moteur  $L_m$  s'obtient maintenant par les formules (1) et (2):

$$(5) \quad AL_m = i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$(6) \quad L_m = \int_1^2 v dp + L_f = p_1 v_1 \frac{m}{m - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m - 1}{m}} - 1 \right] + L_f$$

Dans le diagramme ( $p, v$ ), fig. 1, le travail  $L_m$  est représenté par la surface comprise entre la ligne (1, 2), l'axe des  $p$  et les horizontales des points 1 et 2 (isobares  $p_1$  et  $p_2$ ) augmentée de la surface hachurée horizontalement et représentative de  $L_f$ . Dans le diagramme ( $T, s$ ), l'équivalent calorifique  $AL_m$  du travail moteur est représenté par la surface délimitée par l'isobare  $p_2$ , la ligne de transformation (1, 2), l'axe des entropies  $s$  et les verticales des points 1 et 3, ce dernier point ayant été défini déjà ci-dessus, augmentée de la surface hachurée horizontalement et représentative de  $AL_f$ .

### 2. Les rendements isentropiques

Les considérations qui précèdent montrent que pour un compresseur non refroidi ( $q = 0$ ) ou pour un étage de compression appartenant à un compresseur avec refroidissement entre étages, le travail moteur devient le plus petit lorsque l'on a  $L_f = 0$ . La compression est alors isentropique et le travail moteur se réduit à  $(L_m)_s$ . De là est venue l'idée d'introduire dans l'étude des compresseurs la notion de *rendement isentropique interne*  $\eta_{s, i}$ , définie par:

$$\eta_{s, i} = \frac{(L_m)_s}{L_m}$$

et pour laquelle on peut encore écrire les expressions:

$$(7) \quad \eta_{s, i} = \frac{A \int_1^{2'} v dp}{i_2 - i_1} = \frac{i_2' - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1}$$

Comme on l'aura remarqué par la comparaison des expressions (4) et (6), les frottements ont, sur le travail moteur un double effet. D'abord, le travail  $L_f$  qu'ils impliquent constitue une partie du travail moteur  $L_m$ . Mais, de plus, à cause des frottements la transformation s'est modifiée de telle sorte, que la valeur de l'intégrale de  $v dp$  est devenue plus grande que ce qu'elle aurait été en l'absence de frottements: sur les diagrammes ( $p, v$ ), fig. 1, et ( $T, s$ ), fig. 2, l'accroissement de la surface représentative de cette intégrale correspond au triangle curviligne (1, 2', 2). La notion de *rendement isentropique* est basée sur la considération de ces deux circonstances à la fois.

Observons encore que le travail  $L_m$  considéré jusqu'ici n'est pas celui qu'il faut effectuer sur la machine à son point d'accouplement avec le système qui l'actionne. Ce dernier travail que nous désignerons par  $L$  est supérieur à  $L_m$ , car il comprend encore le travail des résistances passives extérieures au rotor dans les paliers de la machine, et au contact du rotor et du fluide extérieur, et celui dû à l'entraînement éventuel d'autres organes, une pompe à huile par exemple. Pour cette raison on écrit encore:

$$L_m = \eta L$$

la caractéristique  $\eta$  étant le *rendement mécanique* de la machine. La comparaison de  $L$  à  $(L_m)_s$  conduit ainsi aux relations:

$$\frac{(L_m)_s}{L} = \frac{(L_m)_s}{L_m} \frac{L_m}{L} = \eta_{s,i} \eta = \eta_{s,t}$$

$\eta_{s,t}$  recevant le nom de *rendement isentropique total*.

Signalons enfin que l'on désigne parfois aussi les rendements  $\eta_{s,i}$  et  $\eta_{s,t}$  par les mots «rendements adiabatiques». Cette dénomination est toutefois impropre et devrait être abandonnée. Le travail  $(L_m)_s$  auquel est comparé le travail réel  $L_m$  est en effet celui de la transformation isentropique (1, 2') pour laquelle on a, à la fois  $q = 0$  et  $L_f = 0$ , alors que le qualificatif «adiabatique» implique seulement que l'on ait  $q = 0$ ; la compression réelle (1, 2) pourrait même être dite adiabatique, puisque l'on a admis pour celle-ci que l'on ait  $q = 0$ .

### 3. Les rendements polytropiques

L'équation (6) a montré que les travaux de frottement  $L_f$  constituent une partie du travail moteur  $L_m$ . Cette constatation peut conduire à l'idée de considérer  $L_m$  comme le travail moteur «brut», et  $L_m - L_f$  comme travail moteur «net», et donner lieu à une conception du rendement interne semblable à celle à laquelle on a recours d'habitude en dynamique des machines, et défini par la relation:

$$\eta_{p,i} = \frac{L_m - L_f}{L_m}$$

Le rendement ainsi obtenu a reçu le nom de *rendement polytropique interne* ou *rendement hydraulique interne*, ce dernier terme étant dû à la similitude de la notion actuelle avec celle du rendement introduit généralement dans l'étude des pompes. La valeur de ce rendement peut encore se calculer par les expressions:

$$(8) \quad \eta_{p,i} = \frac{\int_1^2 v dp}{\int_1^2 v dp + L_f} = \frac{A \int_1^2 v dp}{i_2 - i_1} = \frac{A \int_1^2 v dp}{c_p (T_2 - T_1)}$$

On peut déduire de là:

$$\eta_{p,i} c_p (T_2 - T_1) = A \int_1^2 v dp$$

ou, sous forme différentielle:

$$\eta_{p,i} c_p dT = A v dp$$

Comme on a encore pour les gaz parfaits:

$$p v = RT \quad \text{et} \quad AR = c_p - c_v$$

$R$  étant la constante du gaz considéré (848 divisé par son poids moléculaire  $\mu$  en kg/kmôle) et  $c_v$  sa chaleur spécifique sous volume constant, on a encore:

$$\eta_{p,i} \frac{dT}{T} = \frac{AR}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{dp}{p}$$

En intégrant entre les limites 1 et 2 on trouve pour la transformation polytropique (1, 2)

$$(9) \quad \eta_{p,i} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

d'où:

$$(10) \quad \eta_{p,i} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

Si l'on appliquait la relation (9) à la transformation isentropique (1, 2') pour laquelle on a  $L_f = 0$  et donc  $\eta_{p,i} = 1$ , on obtiendrait:

$$(11) \quad \ln \frac{T_2'}{T_1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

En comparant ensuite (9) et (11) on obtient une nouvelle expression de  $\eta_{p,i}$ :

$$(12) \quad \eta_{p,i} = \frac{\ln \frac{T_2'}{T_1}}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

Les relations (9) et (12) montrent encore que l'on a:

$$(13) \quad \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\eta_{p,i} \frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{et} \quad \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\eta_{p,i}} = \frac{T_2'}{T_1}$$

Mais comme on a aussi pour une transformation polytropique

$$p v^m = c$$

et donc:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

il vient encore par comparaison avec (13):

$$\frac{m}{m-1} = \eta_{p,i} \frac{\kappa}{\kappa - 1}$$

et finalement:

$$(14) \quad \eta_{p,i} = \frac{m}{m-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

Le rendement polytropique interne peut donc être calculé par l'une ou l'autre des expressions (8), (10), (12) ou (14). Rappelons que la caractéristique  $m$  pour la transformation polytropique (1, 2) peut être calculée en fonction de l'état initial 1 du gaz et de son état final par la formule:

$$(15) \quad m = \frac{\lg p_2 - \lg p_1}{\lg v_1 - \lg v_2}$$

et que pour les compresseurs considérés sa valeur est toujours supérieure à  $\kappa$ . La définition de  $\eta_{p,i}$  et les expressions (8) montrent que la notion de *rendement polytropique interne* est basée sur la comparaison du travail  $L_m$  réel avec celui qu'il aurait fallu pour réaliser sans frottements la compression (1, 2) polytropique, celle-ci étant dans cette dernière éventualité supposée obtenue par une action calorifique  $q$  adéquate. Cette considération justifie la qualification «polytropique» qui a été donnée à ce rendement.

Comme ci-dessus, on peut encore faire remarquer que le travail  $L_m$  est inférieur à celui qu'il faut effectuer sur l'accouplement de la machine. Ce dernier travail  $L$  sera donné par:

$$L_m = \eta L$$

$\eta$  étant le rendement mécanique du compresseur. La comparaison de  $L$  à  $L_m - L_f$  conduit donc encore aux relations:

$$\frac{L_m - L_f}{L} = \frac{L_m - L_f}{L_m} \frac{L_m}{L} = \eta_{p,i} \eta = \eta_{p,t}$$

$\eta_{p,t}$  recevant le nom de *rendement polytropique total*.

### 4. La comparaison des rendements isentropique et polytropique

Les définitions même de  $\eta_{s,i}$  et de  $\eta_{p,i}$  ont montré que ces deux rendements constituent des concepts différents. La comparaison des expressions (7) et (8):

$$\eta_{s,i} = \frac{A \int_1^2 v dp}{i_2 - i_1} \quad \text{et} \quad \eta_{p,i} = \frac{A \int_1^2 v dp}{i_2 - i_1}$$

met d'ailleurs clairement en évidence que pour des compresseurs on a toujours :

$$\eta_{p,i} > \eta_{s,i}$$

Mais afin de mieux faire apparaître le caractère propre de chaque concept, considérons un compresseur dont les différents étages sont dessinés et exécutés avec un même degré de perfection. On peut admettre dans ce cas que, pour toute partie de la compression, les travaux de frottement représentent une même fraction du travail moteur. Si nous exprimons ce fait pour un élément infinitésimal de la compression nous obtenons, compte tenu des circonstances décrites sous 1 :

$$A dL_f = A \rho dL_m = \rho di$$

$\rho$  étant la fraction dont question ci-dessus. Mais comme l'équation thermodynamique générale :

$$d(q + AL_f) = di - Av dp$$

devient pour la compression considérée, qui implique que l'on ait  $q = 0$  et  $dq = 0$  :

$$A dL_f = di - Av dp$$

on a encore

$$\rho di = di - Av dp$$

ou :

$$\rho c_p dT = c_p dT - Av dp$$

En désignant par  $c$  le terme  $\rho c_p$ , et en multipliant par  $R$  il vient :

$$(c - c_p) R dT + A R v dp = 0$$

Comme on a pour les gaz parfaits  $AR = c_p - c_v$  et  $pv = RT$  d'où  $R dT = p dv + v dp$ , on obtient par substitution :

$$(c - c_p) p dv + (c - c_p) v dp + (c_p - c_v) v dp = 0$$

ou

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

L'intervalle de température parcouru par le gaz pendant sa compression étant suffisamment faible pour qu'on puisse admettre que  $c_p$  et  $c_v$  et donc aussi  $c$  soient constants, on obtient en posant

$$m = \frac{c - c_v}{c - c_p}$$

$$m \ln v + \ln p = c \quad \text{ou} \quad p v^m = c$$

ce qui montre que l'invariance de  $\rho$  entraîne celle de  $m$ . D'après l'équation (14) on peut dès lors conclure que pour le compresseur envisagé le rendement polytropique  $\eta_{p,i}$  reste le même pour toute partie de la compression, qu'il a la même valeur pour la compression toute entière et qu'en particulier il ne dépend pas du rapport de compression  $p_2/p_1$ . Le rendement polytropique interne constitue donc en réalité une caractéristique invariante de la perfection d'exécution de la machine.

Remarquons d'autre part que l'expression (7) de  $\eta_{s,i}$  peut prendre successivement les formes :

$$(16) \quad \eta_{s,i} = \frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{T_2'}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1}{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1$$

la dernière transformation étant obtenue par l'introduction des relations (13) ou (14). Ce calcul montre que pour la même compression réalisée dans la même machine considérée ci-dessus, le rendement isentropique interne  $\eta_{s,i}$  diminue avec le rapport de compression  $p_2/p_1$ . Ceci signifie que la valeur de  $\eta_{s,i}$  pour le premier étage de compression considéré isolément est meilleure que celle relative à la partie de la machine comprenant les deux premiers étages, valeur qui elle-même est supérieure à celle réalisée dans la partie de la machine comprenant les trois premiers étages, et ainsi de suite. Le rendement isentropique interne dépend encore de la perfec-

tion mécanique de la machine mais il n'est pas invariant et ne permet pas comme tel la comparaison, au point de vue envisagé d'une machine avec une autre ayant un autre rapport de compression. Cependant, pour la machine considérée, le rendement isentropique interne caractérise au point de vue thermodynamique le plus complètement la perfection de la compression parce qu'elle tient compte à la fois des travaux de frottement et de la modification de la transformation inhérente aux mêmes frottements. L'effet de

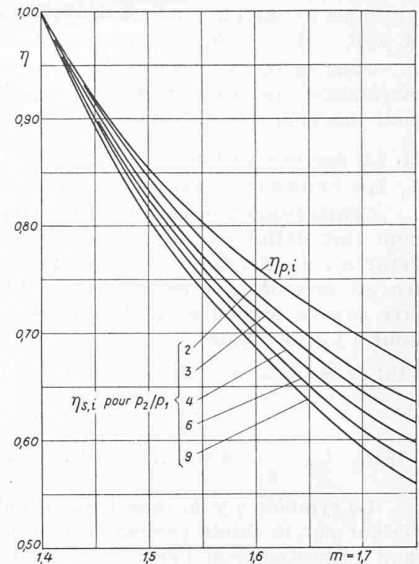


Fig. 3

cette modification sur le travail est en fait dû à la température plus élevée à laquelle conduit, à cause des frottements, la compression polytropique entre deux pressions données comparée à la compression effectuée de façon isentropique entre les mêmes pressions, la température initiale étant la même dans l'un et dans l'autre cas; et l'on sait que tout travail de compression quelle que soit la façon dont celle-ci s'effectue est directement proportionnel à la température du fluide évoluant. Eu égard à cette augmentation de température, on peut introduire pour la caractériser lors d'une compression donnée, un facteur  $r_c$  tenant compte du réchauffage, défini par la relation :

$$\eta_{s,i} = r_c \eta_{p,i}$$

En remplaçant dans cette relation de définition  $\eta_{s,i}$  et  $\eta_{p,i}$  par les valeurs (16) et (14) on trouve :

$$(17) \quad r_c = \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1}{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1} = r_c \frac{m}{m - 1} \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1}{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1} = r_c \frac{m}{m - 1} \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha - 1}{m}} - 1}{\frac{\alpha - 1}{\alpha} - 1}$$

5. Les valeurs de  $\eta_{s,i}$  et  $\eta_{p,i}$  pour différentes compressions polytropiques

En prenant comme paramètres la caractéristique  $m$  on peut calculer d'après l'équation (14) les valeurs correspondantes de  $\eta_{p,i}$ . Pour chaque valeur de  $m$  on peut ensuite calculer d'après l'équation (16) de valeur de  $\eta_{s,i}$  obtenue pour différents rapports de compression. Les résultats des calculs

Tableau 1. Rendements polytropiques internes  $\eta_{p,i}$  et isentropique internes  $\eta_{s,i}$  en fonction de  $m$  pour différents rapports de compression (pour compresseurs)

m	$\eta_{p,i}$	$\eta_{s,i}$ pour $p_2/p_1 =$				
		2	3	4	6	9
1,40	1	1	1	1	1	1
1,45	0,920	0,915	0,910	0,902	0,899	0,894
1,50	0,857	0,845	0,832	0,825	0,818	0,805
1,55	0,805	0,788	0,774	0,765	0,752	0,740
1,60	0,762	0,737	0,723	0,710	0,700	0,688
1,65	0,725	0,696	0,682	0,666	0,650	0,635
1,70	0,695	0,662	0,645	0,628	0,608	0,590
1,75	0,666	0,635	0,615	0,598	0,578	0,559



que nous avons effectués à la règle pour  $m = 1,4 \dots 1,75$  et  $p_2/p_1 = 1 \dots 9$ , sont inscrits dans le tableau 1.

Dans la fig. 3 la courbe supérieure donne en fonction de  $m$  (abscisse) les valeurs de  $\eta_{p,i}$  et les autres celles de  $\eta_{s,i}$  pour des rapports de compression 2, 3, 4, 6, et 9.

**II. Le cas des turbines**

**1. Le travail moteur des turbines**

Considérons une turbine dans laquelle un gaz se détend d'un état défini par les caractéristiques  $p_1, v_1, T_1$ , jusqu'à l'état  $p_2, v_2, T_2$ . On sait que pour cette machine motrice, le travail moteur  $L_m$  effectué par le fluide sur le rotor peut être calculé par l'une ou l'autre des deux formules, écrites pour 1 kg de fluide :

$$(18) \quad A L_m = q - A \Delta h - A \Delta k - \Delta i$$

ou

$$(19) \quad L_m = \int_2^1 v dp - \Delta h - \Delta k - L_f$$

Le symbole  $q$  y désigne l'action calorifique du milieu extérieur sur le fluide pendant son passage de 1 à 2;  $h, k$  et  $i$  sont respectivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'enthalpie du fluide et  $v$  son volume spécifique; enfin  $L_f$  désigne, par kg, les travaux de frottement internes au fluide et ceux au contact du fluide avec les éléments de la turbine. Pour les turbines, comme pour les compresseurs, les tubulures d'entrée et de sortie sont toujours presque à même hauteur, et leurs sections dimensionnées de telle sorte que la vitesse du fluide à l'entrée est approximativement la même qu'à la sortie. On peut donc admettre que l'on ait :

$$\Delta h = 0 \quad \text{et} \quad \Delta k = 0$$

Pour les gaz parfaits on a d'autre part :

$$\Delta i = c_p (T_2 - T_1)$$

$c_p$  étant la chaleur spécifique du fluide sous pression constante et  $T$  sa température absolue. Enfin la valeur de  $q$ , en principe négative, est toujours négligeable.

Si la détente s'était effectuée sans travaux de frottement, elle aurait été isentropique, on aurait pu la représenter dans le diagramme  $(p, v)$ , fig. 4, et  $(T, s)$ , fig. 5, par la ligne (1, 2') et l'équation de la transformation aurait été :

$$p v^\kappa = c$$

avec  $\kappa = c_p/c_v$ . Les formules (18) et (19) donneraient alors :

$$(20) \quad A (L_m)_s = i_1 - i_2 = c_p (T_1 - T_2')$$

$$(21) \quad (L_m)_s = \int_2^1 v dp = p_1 v_1 \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]$$

Ce travail serait représenté dans le diagramme  $(p, v)$  par la surface comprise entre la ligne (1, 2'), l'axe des  $p$  et les horizontales des points 1 et 2' (isobares  $p_1$  et  $p_2$ ). Dans le diagramme  $(T, s)$ , l'équivalent calorifique du travail  $(L_m)_s$  serait représenté par la surface délimitée par l'isobare  $p_1$ , l'axe des entropies  $s$  et les verticales des points 1 et 3, ce dernier point étant situé sur l'isobare  $p_1$  et sur l'isotherme du point 2'.

En réalité la détente n'est pas isentropique. Elle s'effectue avec frottement ( $L_f > 0$ ) ce qui implique, bien que l'on ait  $q = 0$ , un accroissement de l'entropie  $s$ . De plus, la température  $T$  obtenue en fin de détente est supérieure à ce qu'elle aurait été si la transformation avait été isentropique. Dans les diagrammes  $(p, v)$  fig. 4, et  $(T, s)$ , fig. 5, la compression réelle sera donc représentée par la ligne (1, 2). D'une façon générale on peut admettre qu'elle s'effectue de façon polytropicque conformément à l'équation :

$$p v^m = c$$

avec  $m < \kappa$ . D'après la définition même de l'entropie  $s$  on voit immédiatement que l'on a :

$$A L_f = \int_1^2 T ds$$

et que l'équivalent calorifique de ces travaux de frottement est représentée par la surface hachurée horizontalement du diagramme  $(T, s)$  comprise entre la ligne (1, 2), l'axe des  $s$  et les verticales des points 1 et 2. La surface équivalente du

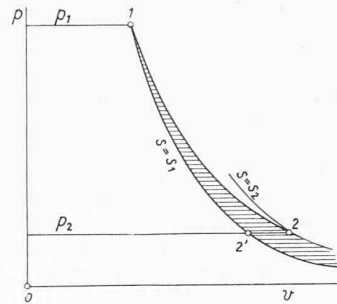


Fig. 4

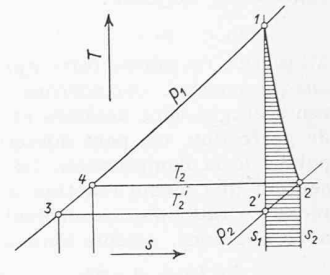


Fig. 5

diagramme  $(p, v)$  et représentative de  $L_f$  est celle hachurée horizontalement aussi et délimitée par la ligne de transformation (1, 2) et les lignes isentropiques  $s_1$  et  $s_2$  des points 1 et 2. Pour la détente (1, 2) réelle le travail moteur  $L_m$  s'obtient maintenant par les formules :

$$(22) \quad A L_m = i_1 - i_2 = c_p (T_1 - T_2)$$

et

$$(23) \quad L_m = \int_2^1 v dp - L_f = p_1 v_1 \frac{m}{m-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right] - L_f$$

Dans le diagramme  $(p, v)$ , fig. 4, le travail  $L_m$  est représenté par la surface comprise entre la ligne (1, 2), l'axe des  $p$  et les horizontales des points 1 et 2 (isobares  $p_1$  et  $p_2$ ) diminuée de la surface hachurée horizontalement et représentative de  $L_f$ . Dans le diagramme  $(T, s)$ , fig. 5, l'équivalent calorifique du travail moteur  $L_m$  est représenté par la surface délimitée par l'isobare  $p_1$ , la ligne de transformation (1, 2), l'axe des entropies  $s$  et les verticales des points 1 et 4, ce dernier point étant situé sur l'isobare  $p_1$  et sur l'isotherme du point 2, diminuée de la surface hachurée horizontalement et représentative de  $A L_f$ . Mais la combinaison de ces deux surfaces permet de conclure finalement que  $A L_m$  est représenté par l'aire comprise entre l'isobare  $p_1$ , l'axe des entropies  $s$  et les verticales des points 4 et 1 (isentropiques  $s_4$  et  $s_1$ ).

**2. Les rendements isentropiques**

Les considérations qui précèdent montrent que pour une turbine le travail moteur devient le plus grand lorsque l'on a  $L_f = 0$ . La détente est alors isentropique et le travail moteur égal à  $(L_m)_s$ . De là est venue l'idée d'introduire dans l'étude des turbines la notion de rendement isentropique interne  $\eta_{s,i}$  définie par :

$$\eta_{s,i} = \frac{L_m}{(L_m)_s}$$

et pour laquelle on peut encore écrire les expressions :

$$(24) \quad \eta_{s,i} = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_2'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2'}$$

Comme on l'aura remarqué par la comparaison des expressions (21) et (23), les frottements ont sur le travail moteur un double effet. D'abord, le travail  $L_f$  qu'ils impliquent figure avec le signe négatif dans l'équation du travail moteur  $L_m$ . Mais de plus, à cause des frottements, la transformation s'est modifiée de telle sorte que la valeur de l'intégrale de  $v dp$  est devenue plus grande que ce qu'elle aurait été en l'absence de frottements : sur les diagrammes  $(p, v)$ , fig. 4, et  $(T, s)$ , fig. 5, l'accroissement de la surface représentative de cette intégrale correspond au triangle curviligne (1, 2', 2). La notion de rendement isentropique est basée sur la considération de ces deux circonstances à la fois.

Observons encore que le travail  $L_m$  considéré jusqu'ici n'est pas celui qui est effectué par la machine elle-même à son point de connexion avec le système qu'elle actionne. Ce dernier travail, dit travail utile ou travail effectif, que nous désignerons par  $L$  sera inférieur à  $L_m$  qui comprend en plus le travail des résistances passives dans les paliers de la machine et celui dû à l'entraînement éventuel d'autres organes, une pompe à huile par exemple. Pour cette raison on écrit encore :

$$L = \eta L_m$$

la caractéristique  $\eta$  étant le rendement mécanique de la machine. La comparaison de  $L$  à  $(L_m)_s$  conduit ainsi aux relations:

$$\frac{L}{(L_m)_s} = \frac{L}{L_m} \frac{L_m}{(L_m)_s} = \eta \eta_{s,i} = \eta_{s,t}$$

$\eta_{s,t}$  recevant le nom de rendement isentropique total.

3. Les rendements polytropiques

L'équation (23) a montré que les travaux de frottement  $L_f$  figurent négativement dans l'expression de  $L_m$ . Cette constatation peut conduire à l'idée de considérer  $L_m$  comme le travail moteur «net» et  $L_m + L_f$  comme travail moteur «brut», et donner lieu à une conception du rendement interne semblable à celle à laquelle on a recours d'habitude en dynamique des machines et définie par la relation:

$$\eta_{p,i} = \frac{L_m}{L_m + L_f}$$

Le rendement interne ainsi obtenu a reçu le nom de rendement polytropique ou rendement hydraulique interne. Sa valeur peut se calculer par les expressions:

$$(25) \quad \eta_{p,i} = \frac{\int_2^1 v dp - L_f}{\int_2^1 v dp} = \frac{i_1 - i_2}{A \int_2^1 v dp} = \frac{c_p (T_1 - T_2)}{A \int_2^1 v dp}$$

On peut déduire de là:

$$\eta_{p,i} A \int_2^1 v dp = c_p (T_1 - T_2)$$

ou, sous forme différentielle:

$$\eta_{p,i} A v dp = c_p dT$$

Par l'introduction des propriétés des gaz parfaits:  $p v = RT$  et  $AR = c_p - c_v$ , on obtient:

$$\frac{1}{\eta_{p,i}} \frac{dT}{T} = \frac{AR}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{dp}{p}$$

En intégrant entre les limites 1 et 2 on trouve pour la détente polytropique (1, 2):

$$(26) \quad \frac{1}{\eta_{p,i}} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$(27) \quad \eta_{p,i} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\ln \frac{T_2}{T_1}}{\ln \frac{p_2}{p_1}}$$

Si l'on appliquait la relation (26) à la transformation isentropique (1, 2') pour laquelle on a  $L_f = 0$  et donc  $\eta_{p,i} = 1$  on obtiendrait:

$$(28) \quad \ln \frac{T_2'}{T_1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

En comparant ensuite (26) et (28) on obtient une nouvelle expression de  $\eta_{p,i}$ :

$$(29) \quad \eta_{p,i} = \frac{\ln \frac{T_2}{T_1}}{\ln \frac{T_2'}{T_1}}$$

Les relations (26) et (29) montrent encore que l'on a:

$$(30) \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\eta_{p,i} \frac{\alpha}{\alpha-1}}} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\eta_{p,i}} = \frac{T_2}{T_1}$$

Mais comme on a pour la détente polytropique

$$p v^m = c$$

et donc:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$$

il vient encore par comparaison avec (30)

$$\frac{m}{m-1} = \frac{1}{\eta_{p,i}} \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

et finalement:

$$(31) \quad \eta_{p,i} = \frac{m-1}{m} \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Le rendement polytropique interne peut donc être calculé par l'une ou l'autre des expressions (25), (27), (29) ou (31). Rappelons que la caractéristique  $m$  pour la transformation (1, 2) peut être calculée en fonction de l'état initial 1 du gaz et de son état final par la formule (15) citée ci-dessus, et que pour les turbines sa valeur est toujours inférieure à  $\alpha$ .

La définition de  $\eta_{p,i}$  et les expressions (25) montrent que la notion de rendement polytropique interne est basée sur la comparaison du travail  $L_m$  réel avec celui que l'on aurait obtenu en effectuant sans frottements la détente (1, 2) polytropique, celle-ci étant dans cette dernière éventualité supposée réalisée par une action calorifique  $q$  adéquate. Cette considération justifie le qualificatif «polytropique» qui a été donné à ce rendement.

Comme ci-dessus on peut encore faire remarquer que le travail  $L_m$  est supérieur à celui disponible à l'accouplement de la machine. Ce dernier travail  $L$  sera donné par:

$$L = \eta L_m$$

$\eta$  étant le rendement mécanique de la turbine. La comparaison de  $L$  à  $L_m + L_f$  conduit donc encore aux relations:

$$\frac{L}{L_m + L_f} = \frac{L}{L_m} \frac{L_m}{L_m + L_f} = \eta \eta_{p,i} = \eta_{p,t}$$

$\eta_{p,t}$  recevant le nom de rendement polytropique total.

4. La comparaison des rendements isentropique et polytropique

Les définitions même de  $\eta_{s,i}$  et de  $\eta_{p,i}$  ont montré que ces deux rendements constituent des concepts différents. La comparaison des expressions (24) et (25):

$$\eta_{s,i} = \frac{i_1 - i_2}{A \int_2^1 v dp} \quad \text{et} \quad \eta_{p,i} = \frac{i_1 - i_2}{A \int_2^1 v dp}$$

met d'ailleurs clairement en évidence que pour des turbines on a toujours

$$\eta_{s,i} > \eta_{p,i}$$

Mais afin de mieux faire apparaître le caractère propre de chaque concept, considérons une turbine dont les différents étages sont dessinés et exécutés avec un même degré de perfection. On peut admettre dans ce cas que pour toute partie de la détente les travaux de frottement représentent une même fraction du travail moteur. En raisonnant dès lors comme nous l'avons fait ci-dessus pour la compression, on peut montrer que la condition envisagée implique que la détente soit effectivement polytropique, c'est-à-dire qu'il existe pour elle une caractéristique  $m$  constante bien déterminée. D'après l'équation (31) on peut dès lors conclure que pour la turbine considérée le rendement polytropique  $\eta_{p,i}$  reste le même pour toute partie de la détente, qu'il a la même valeur pour la détente toute entière et qu'en particulier il ne dépend pas du rapport des pressions  $p_2/p_1$ . Le rendement polytropique interne constitue donc une caractéristique invariante de la perfection mécanique de la machine.

Remarquons d'autre part que l'expression (24) de  $\eta_{s,i}$  peut prendre successivement les formes:

$$(32) \quad \eta_{s,i} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2'} = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{1 - \frac{T_2'}{T_1}} = \frac{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \frac{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

La dernière transformation étant obtenue par l'introduction des relations (30) ou (31). Ce calcul montre que pour la même détente réalisée dans la machine considérée ci-dessus, le rendement isentropique interne  $\eta_{s,i}$  augmente lorsque le rapport des pressions  $p_2/p_1$  diminue. Ceci signifie que la valeur de  $\eta_{s,i}$  pour le premier étage de détente considéré isolément est moins bonne que celle relative à la partie de la machine comprenant les deux premiers étages, valeur qui elle-même est inférieure à celle réalisée dans la partie de la machine comprenant les trois premiers étages, et ainsi de suite

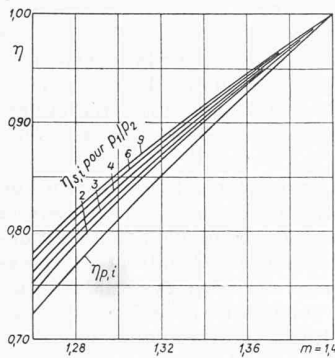


Fig. 6

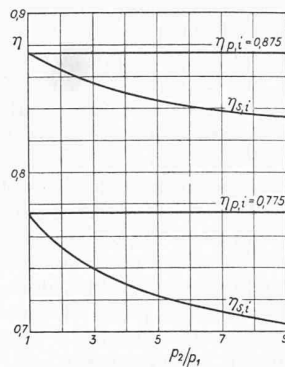


Fig. 7

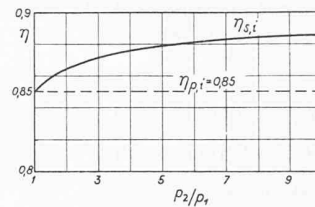


Fig. 8

Le rendement isentropique interne dépend encore de la perfection mécanique de la machine mais *il n'est pas invariant* et ne permet pas comme tel la comparaison au point de vue envisagé, d'une machine avec une autre fonctionnant avec un autre rapport des pressions. Cependant, pour la machine considérée, le rendement isentropique interne caractérise au point de vue thermodynamique le plus complètement la perfection de la détente parce qu'elle tient compte à la fois des travaux de frottement et de la modification de la transformation inhérente aux mêmes frottements. L'effet de cette modification sur le travail est en fait dû à la température plus élevée à laquelle conduit, à cause des frottements, la détente polytropique entre deux pressions données comparée à la détente effectuée de façon isentropique entre les mêmes pressions, la température initiale étant la même dans l'un et dans l'autre cas; et l'on sait que tout travail de détente quelle que soit la façon dont celle-ci s'effectue est directement proportionnel à la température initiale du fluide évoluant. Eu égard à cette augmentation de température, on peut introduire, pour la caractériser lors d'une détente donnée, un *facteur r<sub>d</sub>* tenant compte du réchauffage, défini par la relation:

$$\eta_{s,i} = r_d \eta_{p,i}$$

En remplaçant dans cette relation de définition  $\eta_{s,i}$  et  $\eta_{p,i}$  par les valeurs (32) et (31) on trouve:

$$\frac{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = r_d \frac{m-1}{m} \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$(33) \quad r_d = \frac{\alpha-1}{m-1} \frac{m}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

5. Les valeurs de  $\eta_{s,i}$  et  $\eta_{p,i}$  pour différentes détentes polytropiques

En prenant comme paramètre la caractéristique  $m$  on peut calculer d'après l'équation (31) les valeurs correspondantes de  $\eta_{p,i}$ . Pour chaque valeur de  $m$  on peut ensuite calculer d'après l'équation (32) la valeur de  $\eta_{s,i}$  obtenue pour

Tableau 2. Rendements polytropiques  $\eta_{p,i}$  et isentropiques  $\eta_{s,i}$ , en fonction de  $m$  pour différents rapports de pressions (pour turbines)

m	$\eta_{p,i}$	$\eta_{s,i}$ pour $p_2/p_1 =$				
		2	3	4	6	9
1,40	1	1	1	1	1	1
1,38	0,962	0,970	0,9705	0,971	0,9715	0,972
1,36	0,926	0,931	0,935	0,940	0,944	0,948
1,34	0,889	0,896	0,903	0,910	0,915	0,920
1,32	0,850	0,865	0,872	0,876	0,880	0,885
1,30	0,810	0,826	0,834	0,840	0,848	0,854
1,28	0,766	0,785	0,795	0,803	0,811	0,819
1,26	0,721	0,740	0,752	0,761	0,772	0,780

différents rapports des pressions. Les résultats des calculs que nous avons effectués pour  $m = 1,4 \dots 1,26$  et  $p_2/p_1 = 1 \dots 9$ , sont inscrits dans le tableau 2. Dans la fig. 6, la courbe inférieure donne, en fonction de  $m$  (abscisse) les valeurs de  $\eta_{p,i}$  et les autres celles de  $\eta_{s,i}$  pour des rapports de pressions 2, 3, 4, 6, et 9.

III. Conclusions

De l'exposé qui précède on peut conclure que ce n'est pas la valeur du rendement isentropique interne d'une machine qui peut donner une idée de sa perfection d'exécution, mais bien le rendement polytropique interne. Pour un même rendement polytropique, deux machines, compresseur ou turbine, fonctionnant avec des rapports de pressions différents ont des rendements isentropiques différents. On peut admettre que les compresseurs centrifuges ordinaires ont un rendement polytropique interne moyen de  $\eta_{p,i} = 0,775$  et que pour les compresseurs axiaux modernes cette valeur devient  $\eta_{p,i} = 0,871$ . Pour ces compresseurs le rendement isentropique interne varie alors suivant les courbes de la figure 7. La courbe supérieure est relative au compresseur axial, la courbe inférieure au compresseur centrifuge ordinaires. Signalons relativement aux valeurs indiquées à titre d'exemple, qu'il existe des compresseurs centrifuges de construction spéciale pour lesquels le rendement est du même ordre de grandeur que celui des meilleurs compresseurs axiaux. Pour les turbines à gaz parfait on peut admettre que le rendement polytropique interne est  $\eta_{p,i} = 0,85$ . Dans ce cas le rendement isentropique interne varie suivant la courbe de la figure 8. En comparant les courbes des figures 7 et 8, on constate que le rendement isentropique interne d'un compresseur diminue avec le rapport de pression  $p_2/p_1$  tandis que celui d'une turbine augmente lorsque le rapport  $p_2/p_1$  augmente.

Cette dernière remarque explique un fait que l'on observe généralement dans les turbines à combustion. Considérons en effet une telle machine fonctionnant avec un rapport des pressions de 5. Le compresseur, supposé du type axial sans refroidissement, a par exemple un rendement isentropique de 0,845, tandis que pour la turbine le même rendement vaut 0,903. En effet, si l'on recherche par interpolation dans les tables ou dans les diagrammes des figures 3 et 6 le rendement polytropique des deux machines, on retrouve la même valeur 0,875. Enfin, signalons encore dans le même ordre d'idées, qu'une même amélioration du rendement polytropique des deux machines (turbine ou compresseur) donne pour la turbine un accroissement de rendement isentropique moindre que pour le compresseur. Si  $\eta_{p,i}$  augmente par exemple de 0,875 jusqu'à 0,885, on constate par les figures 3 et 6 que, pour le compresseur  $\eta_{s,i}$  croît de 0,845 à 0,860, tandis que pour la turbine il n'augmente que de 0,903 à 0,908. On peut conclure que pour une turbine à combustion, la perfection de construction et d'exécution de la turbine et du compresseur présentent en réalité le même intérêt.

Zur Bezeichnung der Achsfolge von Lokomotiven und Triebwagen

DK 003.62.625.282

Von ERNST ISLER, Zürich

1. Entwicklung der Achsfolgebezeichnungen

Die Achsfolge der Eisenbahn-Triebfahrzeuge wurde ursprünglich durch Symbole gekennzeichnet, die nicht nur in den einzelnen Ländern wechselten, sondern sich sogar bei den verschiedenen Bahnverwaltungen des selben Landes voneinander unterschieden. In England pflegte man sie durch Angabe der Radzahlen darzustellen. So weist z. B. eine 4-6-2-Lokomotive vorne vier Laufräder, also zwei Laufachsen (Drehgestell), in der Mitte sechs Triebräder = drei Triebachsen und hinten nochmals zwei Laufräder = eine Laufachse auf. In der Schweiz und in Deutschland drückte man bei der Achsfolgebezeichnung lediglich das Verhältnis der Triebachszahl zur Gesamtachszahl aus; man sprach also beispielsweise von 3/5- oder 4/6-gekuppelten Lokomotiven usw. Diese Bruchzahlen sind heute noch in den schweizerischen Lokomotivgattungszeichen enthalten (z. B. Re 4/4, Ae 4/6, Be 6/8). In