

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 72 (1954)  
**Heft:** 48

**Artikel:** Berechnung gekrümmter Blattfedern für elastische Kuppelungen  
**Autor:** Zwahlen, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61299>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Berechnung gekrümmter Blattfedern für elastische Kupplungen

DK 621.825.7: 539.413

Schluss von Seite 684

Von Dipl. Math. R. Zwahlen, Zürich

## II. Teil: Differentialgleichung, Anfangsbedingungen und Lösung

### 1. Modifikation der Gleichung (2 b)

Gl. (2 b) gibt die Möglichkeit, eine Differentialgleichung für den krummen Balken aufzustellen. Es ist

$$M = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y^2 dF}{r-y}$$

In Bild 6 stellt  $r$  den Krümmungsradius der Neutralaxe im belastungsfreien Fall und  $\rho$  den entsprechenden Krümmungsradius bei Belastung dar. Kleinen Winkeln  $\Delta d\varphi$  entsprechen relativ grosse Unterschiede  $|r - \rho|$ . Im schraffierten Dreieck, gebildet aus den Seiten  $|r - \rho|$ ,  $r$  und  $\rho$  findet man nach dem Sinussatz:

$$\frac{r - \rho}{\rho} = \frac{\sin \Delta d\varphi}{\sin d\varphi}$$

Weil die Winkel  $\Delta d\varphi$  und  $d\varphi$  sehr klein sind, folgt

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{r}{\rho} - 1$$

und nach Gl. (2)

$$M = E \left( \frac{r}{\rho} - 1 \right) \int \frac{y^2 dF}{r-y}$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E r \int \frac{y^2 dF}{r-y}}$$

Wenn die unter 3 des I. Teils genannten Voraussetzungen erfüllt sind, macht man von Gl. (9) Gebrauch und erhält

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E r \frac{J}{r}} = \frac{M}{E J}$$

Gl. (10) gilt überall da, wo die Feder frei ist, also nicht am Kupplungs-Segment anliegt. Es ist zu beachten, dass in Gl. (10)  $M$  und  $J$  nicht konstant sind. Daher ist auch  $\rho$  veränderlich. Als unabhängige Variable wählen wir die Bogenlänge  $s$ .  $M$ ,  $J$  und  $\rho$  sind also Funktionen der unabhängigen Variablen  $s$ . Der Punkt  $s = 0$  wird willkürlich in jenes Ende der Feder gelegt, welches mit dem Kupplungs-Segment verbunden ist.  $J(s)$  lässt sich für jeden Wert von  $s$  unmittelbar berechnen. Die Konstruktion, welche gestattet, die gestellte Aufgabe zu lösen, stützt sich auf Gl. (10). Zur vollständigen Behandlung des Problems gehört jedoch die Aufstellung der Differentialgleichung, welche die Deformation beherrscht. In diesem Zusammenhang wollen wir auch abklären, wie das Moment  $M$  von der Bogenlänge  $s$  abhängt. Wenn es gelingt,  $M(s)$  durch  $\rho(s)$  ohne Gl. (10) auszudrücken sowie in dieser  $M(s)$  zu eliminieren, so ist die Gleichung der elastischen Linie des krummen Balkens durch natürliche Koordinaten  $\rho$  und  $s$  gefunden. Viele Probleme der technischen Mechanik und der Physik lassen sich bekanntlich mit natürlichen Koordinaten besser als mit anderen behandeln.

Für  $r \rightarrow \infty$  erhält man die «klassische» Gleichungsform der elastischen Linie. Bei kleinen Deformationen darf man für die Krümmung  $1/\rho$  mit guter Näherung die zweite Ableitung  $d^2y/dx^2$  einsetzen, wenn  $x$  und  $y$  irgendwelche rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der elastischen Linie bedeuten, die wir später einführen.

### 2. Differentialgleichung

Auf den Federbolzen wirkt tangential zum Kreis, auf dem sich der Bolzen um die Kurbelwelle dreht, eine Kraft  $P$ . Ihre Grösse ist bekannt und jeweils aus dem zu übertragenden Kupplungsmoment zu berechnen. Durch  $P$  wird die Feder zusammengedrückt. Mit ihrem untern Teil liegt sie am Kupplungs-Segment an. Zur Führung des andern Federendes auf

einem Kreis genügt die Kraft  $P$  allein nicht. Es ist vielmehr noch eine Radialkraft  $V$  notwendig. Da  $V$  nicht bekannt ist, ist auch die Resultierende  $R$  aus  $P$  und  $V$  unbekannt. Die Wirkungsgerade von  $R$  nennen wir  $w$ , Bild 7.  $w$  schneidet die Neutralaxe der Feder in zwei Punkten.

Wenn das eine Federende am Kupplungs-Segment zum Anliegen kommt, das andere dagegen mit dem Bolzen verbunden ist, so muss das Moment die Krümmung der Feder einerseits vergrössern und an andern Stellen verkleinern.  $M$  muss daher einmal positiv und einmal negativ sein, was nur möglich ist, wenn  $w$  die Neutralaxe der Feder schneidet. Man erkennt, dass jener Teil der Feder, der mit  $w$  zusammen ungefähr ein Kreissegment bildet, seine Krümmung vergrössern muss, während der restliche freie Teil sie verkleinert. Bei Zugbeanspruchung der Feder ist dies gerade umgekehrt. Man entnimmt hieraus, wie die Gleichung für die Krümmung anzusetzen ist: Die Federkrümmung muss in Nähe der Einspannung durch das Moment  $M$  verringert werden. Mit  $x(s)$  bezeichnen wir den Abstand eines Punktes  $Q$  der Neutralaxe der Feder von der Wirkungsgeraden  $w$ . Für das Moment  $M(s)$  gilt folglich

$$M(s) = -R x(s)$$

Für den Abstand  $x(s)$  ist damit ein Vorzeichen festgelegt. Aus Gl. (10) folgt damit

$$(11) \quad \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} = \frac{M(s)}{E J(s)} = - \frac{R x(s)}{E J(s)}$$

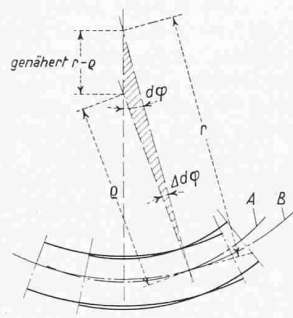
Die Krümmung der Feder  $1/\rho(s)$  wird kleiner als  $1/r$  für die Umgebung des Punktes, in welchem sich die Feder vom Kupplungs-Segment abhebt. Die Krümmung  $1/\rho(s)$  kann bei hinreichend grossem Moment  $[-R x(s)]$  das Vorzeichen wechseln, wenn man der Feder die nötige Deformationsfreiheit gibt.

Für  $x(s) = 0$  wird  $1/\rho(s) = 1/r$ , d. h.  $\rho(s) = r$  ist hier grösser als im eben betrachteten Punkt. Im Federteil zwischen den beiden Schnittpunkten, der Geraden  $w$  mit der Neutralaxe der Feder, in denen  $x(s) = 0$  ist, wird die Krümmung grösser als  $1/r$ , weil  $x(s)$  hier negativ wird.

Wie bereits erwähnt, sind  $R$  und  $V$  noch unbekannt. Die Bestimmung dieser Werte gehört zur Lösung der Aufgabe, welche im folgenden Abschnitt 4 beschrieben wird. Vorläufig rechnen wir damit wie mit bekannten Grössen. Um die Differentialgleichung der elastischen Linie ableiten zu können, schreiben wir Gl. (10) in der Form

$$-x(s) = \frac{E J(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right)$$

Bild 7 zeigt die Wirkungsgerade  $w$ , die elastische Linie der Feder, ihre Einspannung am Kupplungs-Segment mit der Tangente  $t$  und dem Krümmungsradius  $\rho(s)$ , der mit der Anfangslage  $s = s_0$  den Winkel  $\varphi$  einschliesst. Im Endpunkt  $Q$  von  $\rho(s)$  ist die Tangente an die elastische Linie gezogen, die mit  $t$  ebenfalls den Winkel  $\varphi$  einschliesst. Der Winkel zwischen dieser Tangente und dem Abstand  $x(s)$  [vom Punkte  $Q$  zu  $w$ ] beträgt  $\theta$ .  $\theta$  und  $\varphi$  sind natürlich von der Bogenlänge  $s$  auch abhängig. Einer Drehung von  $\rho(s)$  um den Winkel  $d\varphi$  entspricht auch eine Drehung der Tangente um



A Neutralaxe des belasteten Balkens  
B Neutralaxe des unbelasteten Balkens

Bild 6. Ermittlung des Krümmungszentrums

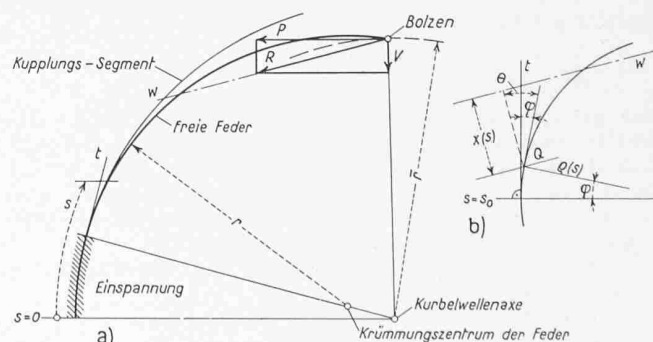


Bild 7. Anordnung der Kräfte und Bezeichnungen

$d\varphi$ . Auch der Winkel  $\theta$  ändert sich um  $d\varphi$ . Man macht sich leicht klar, dass

$$\frac{x(s + ds) - x(s)}{ds} = -\cos \theta(s)$$

folglich

$$\frac{d}{ds} \frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{dx(s)}{ds} = \cos \theta(s)$$

Somit

$$\begin{aligned} \arccos \frac{d}{ds} \frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) &= \theta(s) \\ \frac{d}{ds} \left[ \arccos \frac{d}{ds} \frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) \right] &= \frac{d\theta(s)}{ds} \end{aligned}$$

Aus  $d\theta = d\varphi$  geht hervor, dass  $d\theta/ds = d\varphi/ds$  ( $\theta$  und  $\varphi$  unterscheiden sich nur um eine Konstante). Ferner ist  $d\varphi/ds = 1/\rho(s)$ ; somit erhält man

$$\frac{d}{ds} \arccos \frac{d}{ds} \frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{\rho(s)}$$

oder nach Ausführung der Differentiation

$$(12) \quad -\frac{\left[ \frac{EJ'(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) \right]''}{\sqrt{1 - \left[ \frac{EJ'(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) \right]^2}} = \frac{1}{\rho(s)}$$

Damit gleichwertig ist die Form

$$(13) \quad \frac{d}{ds} \arcsin \frac{d}{ds} \frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{\rho(s)}$$

In Gl. (12) und (13) ist je  $\rho(s)$  die gesuchte Funktion. Die Lösung der Gl. (12) und (13) führt bei konstanter Biegefestigkeit auf elliptische Integrale. Die exakte Lösung bei nichtkonstanter Biegefestigkeit ist meistens nicht möglich. Die Differentialgleichungen sind nicht linear und von zweiter Ordnung. Durch die Angabe von  $EJ(s)$  bleibt als unbekannte Funktion in Gl. (13) nur  $\rho(s)$  zurück, die durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt wird.

**3. Anfangsbedingungen**

Unter den vorhandenen Bedingungen gilt Gl. (12) nicht, wo der Balken am Kupplungs-Segment anliegt, weil der Feder dort die Krümmung vorgeschrieben ist. Wenn das Moment für den Balken nach Gl. (10) eine kleinere Krümmung erfordern würde als die durch das Kupplungs-Segment vorgegebene, so wird einfach ein Teil des Momentes vom Kupplungs-Segment aufgenommen.

Mit dieser Feststellung lässt sich jener Punkt bestimmen, in dem sich die Feder von ihrer Anlage am Kupplungs-Segment trennt. Es sei  $R'$  der Radius des Kupplungs-Segmentes. So weit die Feder am Kupplungs-Segment anliegt, ist

$$R' = \rho(s)$$

In jenem Punkte jedoch, wo nach Gl. (10) *erstmal*s folgt

$$R' > \rho(s)$$

beginnt sich die Feder von ihrer Führung abzuheben. Wir bezeichnen diesen Punkt als Anlagepunkt. Gemäss Gl. (10) erhält man für die Bestimmung des Anlagepunktes die Gleichung

$$(14) \quad \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} = -\frac{Rx(s)}{EJ(s)}$$

Hieraus ist die Bogenlänge ( $s_0$ ) so zu bestimmen, dass die Beziehung erfüllt ist:

$$(15) \quad \frac{1}{R'} - \frac{1}{r} = -\frac{Rx(s_0)}{EJ(s_0)}$$

Das gelingt nur durch sukzessive Approximationen. Man schätzt einen Wert  $s_0$  und berechnet dazu einen Radius  $\rho(s)$ , schätzt einen zweiten Wert von  $s_0$ , berechnet hierzu  $\rho(s_0)$ . Durch lineare Interpolation folgt hieraus ein neuer Wert von  $s_0$ . Damit wiederholt man das Verfahren, bis der Wert von  $\rho$  mit  $R'$  genügend genau übereinstimmt<sup>2)</sup>.

Im Anlagepunkt gelten für die Feder folgende Stetigkeitsbedingungen:

- 1. Die elastische Linie der Feder ist überall stetig.

<sup>2)</sup> Den Abstand  $x(s)$  bestimmt man mit Vorteil und genügend genau graphisch.

- 2. Die Tangente dreht sich stetig. Die Kurve ist nicht geknickt.

Hieraus folgen die *Anfangsbedingungen*

$$x(s) \Big|_{s=s_0} = x_0 \quad \frac{dx}{ds} \Big|_{s=s_0} = x_0' = -\cos \theta_0$$

$x_0$  und  $x_0'$  sind geometrische Daten, die sich bei bekanntem Anlagepunkt zeichnerisch leicht bestimmen lassen. Damit sind die Differentialgleichungen (12) und (13) samt Anfangsbedingungen bekannt.

Bei der praktischen Lösung der Aufgabe wird man bemerken, dass im vorliegenden Falle die theoretische Lösung der experimentellen überlegen ist, da diese überraschend genau, billig und schnell zum Ziele führt. Sie lässt sich auch auf den Fall ausdehnen, wo Fliehkräfte an der Deformation der Feder mitwirken, während für eine experimentelle Untersuchung dieses erschwerten Problems teure Einrichtungen benötigt werden.

**4. Graphische und numerische Lösung der Differentialgleichung**

Man schätzt eine passend erscheinende Radialkraft  $V$ . Damit ist zunächst die Lage der Geraden  $w$  bekannt und die elastische Linie des deformierten Balkens lässt sich für diese Radialkraft konstruieren. Man findet am Schlusse der nachfolgend beschriebenen Konstruktion ein einfaches Kriterium dafür, ob  $V$  richtig geschätzt wurde.

Die elastische Linie des gekrümmten Balkens entsteht nun durch Zusammenfügen von Kreissektoren, Bild 8. Nehmen wir an, ein solcher Kreissektor 1 sei schon gefunden worden und man suche den Sektor 2. Wir beschreiben nachfolgend dessen Konstruktion.

Man schätzt den mutmasslichen Verlauf der elastischen Linie des Sektors 2, um zu passenden Annahmen für das Moment und die Biegefestigkeit zu gelangen. Die Schätzung erfolgt dadurch, dass man den Kreisbogen von Sektor 1 verlängert, denn es kann angenommen werden, dass die elastische Linie nicht stark von diesem Kreisbogen abweichen wird. Mit Hilfe eines Stechzirkels trägt man auf der geschätzten elastischen Linie die Bogenlänge  $s$  ein, damit man über die Verteilung der Biegefestigkeit orientiert ist.

Man wählt auf der geschätzten Verlängerung der elastischen Linie einen beliebigen Punkt  $A$ . Durch die Lage von  $A$  ist der Abstand  $\delta_2$  von der Wirkungsgeraden  $w$  bestimmt, also das in  $A$  wirksame Moment  $|R\delta_2|$ . Nach Gl. (10) findet man hieraus  $\rho_2$ , denn durch die Wahl von  $A$  ist auch  $EJ$  festgelegt. Da, wo die Sektoren 1 und 2 zusammenstossen, müssen beide Kreisbogen die selbe Tangente besitzen. Der Krümmungsmittelpunkt zum Sektor 2 liegt deshalb auf dem anstossenden Begrenzungsradius des Sektors 1, so, dass das neue Krümmungszentrum  $Z_2$  von jenem des Sektors 1 den Abstand  $|\rho_2 - \rho_1|$  erhält.

Mit der Kenntnis von  $Z_2$  und  $\rho_2$  kann man ein Stück der elastischen Linie mit dem Zirkel zeichnen.

Man bemerkt in den meisten Fällen, dass die Abweichung von der geschätzten elastischen Linie vernachlässigt werden darf. Wenn das nicht zutreffen sollte, so kann man das Verfahren mit der eben konstruierten elastischen Linie nochmals durchführen; die neuerliche Näherung wird bestimmt ausreichen.

Die restliche Begrenzung von Sektor 2 wird so gewählt, dass  $AZ_2$  Winkelhalbierende des Sektors 2 wird. In gleicher Weise wird Sektor 3 usw. konstruiert, bis die ganze elastische Linie — zur gewählten Kraft  $V$  — bekannt ist.

Die Konstruktion des auf den Anlagepunkt folgenden Sektors stellt keine Schwierigkeit dar, denn man kennt ja die Lage des Berührungsradius im Anlagepunkt aus den Anfangsbedingungen. Ebenso ist es nicht schwierig, auch bei anderer Lagerung als der

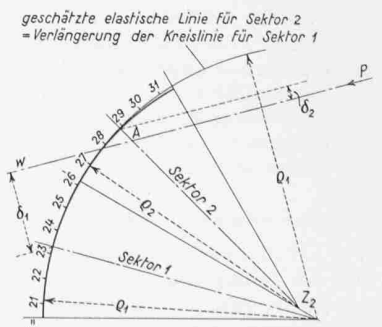


Bild 8. Konstruktion der elastischen Linie

in Bild 1 angedeuteten, die elastische Linie zu konstruieren. Die Konstruktion führt schliesslich dazu, dass man die Lage des Bolzens findet: Das oben angedeutete Kriterium besteht darin, dass der Bolzen den bekannten Abstand von der Kurbelwellenaxe erhalten muss. Wegen der beliebigen Wahl von  $V$  wird das beim ersten Versuch kaum zutreffen. Deshalb muss die Konstruktion mit einem andern Wert von  $V$  wiederholt werden. Indem man wiederum die Lage des Bolzens ermittelt, erhält man die Möglichkeit, durch Interpolation eine neue Kraft  $V$  zu finden, die dann meistens genügend genau sein wird. Damit aber ist die gestellte Aufgabe *graphisch* lösbar. Zur Ermittlung des Anlagepunktes dienen ausserdem die Ueberlegungen des Abschnittes 3.

Man könnte noch einwenden, dass die Genauigkeit der graphischen Konstruktion eng begrenzt sei. Dem muss entgegengehalten werden, dass die Genauigkeit für praktische Zwecke meistens ausreicht. Man hat indessen die Möglichkeit, mit Hilfe einer mühsameren numerischen Integration das Ergebnis der graphischen Integration zu verbessern. Das numerische Verfahren ist nicht schwieriger als das graphische, erfordert aber viel grösseren Arbeitsaufwand.

Gemäss der numerischen Integration nach Blaess muss man im Anfangspunkt  $x_0$  und  $x_0'$  kennen. Darüber, wie man  $x_0$  und  $x_0'$  findet, ist weiter oben ausführlich geschrieben worden. Nach der Differentialgleichung (12) oder (13) kennt man auch  $x_0''$ , denn es ist

$$x(s) = -\frac{EJ(s)}{R} \left( \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{r} \right)$$

Man erhält nach leichter Rechnung aus Gl. (12)

$$x'' = +\sqrt{1-x'^2} \left( -\frac{Rx}{EJ} + \frac{1}{r} \right)$$

Nun macht man Gebrauch von der Taylorschen Formel. Es ist

$$x(s+ds) = x(s) + \frac{ds}{1!} \frac{dx}{ds} + \frac{(ds)^2}{2!} \frac{d^2x}{ds^2} + \dots$$

und indem man den Taylorschen Satz auf  $x'(s)$  anwendet

$$x'(s+ds) = x'(s) + \frac{ds}{1!} \frac{d^2x}{ds^2}$$

Es empfiehlt sich  $ds = 1$  zu wählen, um die Berechnung von  $x(s+ds)$  bzw.  $x'(s+ds)$  zu vereinfachen. Man erhält so

$$x(s+1) = x(s) + \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$x'(s+1) = x'(s) + \frac{d^2x}{ds^2}$$

Welche Vorzeichen sind massgebend? Das Vorzeichen von  $x$  ist bereits festgelegt, denn gemäss Abschnitt 2 des II. Teils ist

$$M(s) = -R x(s)$$

$x$  ist positiv für Punkte in einer kleinen Umgebung des Anlagepunktes,  $x'$  ist dagegen negativ, weil  $x$  zunächst mit wachsendem  $s$  kleiner wird. Das Vorzeichen von  $x''$  ergibt sich aus der oben angeschriebenen Differentialgleichung:  $x''$  fällt positiv aus. Man tabelliert also  $x(s)$ ,  $x'(s)$  und  $x''(s)$ .

Wenn auch  $x(s)$  bekannt ist, so hat man noch immer keine praktisch brauchbare Parameterdarstellung der elastischen Linie. Man sucht deshalb nach einer senkrechten Koordinatenaxe  $y$  zur Geraden  $w$ . In bezug auf diese Axen erhält man für die elastische Linie die Gleichung

$$x = x(s) \quad y = y(s)$$

Einen Koordinatenanfangspunkt erhält man, indem man die  $y$ -Axe durch den Anlagepunkt der Feder wählt. Man überzeugt sich leicht, dass bei der getroffenen Wahl der Koordinatenachsen

$$-\cos \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx}$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x'^2} - 1} = \frac{1}{x'} \sqrt{1 - x'^2} = \frac{ds}{dx} \sqrt{1 - x'^2}$$

Hieraus folgt

$$dy = ds \sqrt{1 - x'^2}$$

$$y = \int_0^s ds \sqrt{1 - x'^2}$$

Man wird deshalb nicht nur  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  tabellieren, sondern auch  $\sqrt{1-x'^2}$ . Diesen Wert benötigt man ohnehin zur Berechnung von  $x''$ , so dass die Tabellierungsarbeit durch die Berechnung von  $y(s)$  nicht komplizierter wird. Es sei noch darauf hingewiesen, dass R. Sonntag (Ing. Arch. Bd. 13 (1943), S. 380—97 und Bd. 14 (1943), S. 53—74) das Problem des Kreisringes behandelt hat. Man bemerkt sofort, dass die vorliegende Konstruktion nicht an eine Kreisringform der Neutralaxe im unbelasteten Zustand gebunden ist.

### III. Teil: Elastische Kupplungsfeder Von G. Elger

#### Prüfung der Theorie des I. und II. Teils im Versuch

Bei Schiffsanlagen ist es aus Gründen der Raumersparnis (gedrängte Maschinenanlage) oft notwendig, sehr weiche elastische Kupplungen zu verwenden, damit die Abstimmung  $\omega/\omega_0$  für die erste Resonanzregende grösser als  $\sqrt{2}$  gehalten werden kann. Die zusätzliche Torsionsbeanspruchung der Kurbelwelle wird (vom Dämpfer abgesehen) auf diese Weise gesenkt und bleibt innerhalb zulässiger Grenzen.

In solchen Fällen genügen Gummi-Elemente den Anforderungen in bezug auf Weichheit und zu leistender Deformationsarbeit nicht, es sei denn, dass man solche Elemente in Serie schaltet. Dagegen lassen sich bei geschickter Anordnung und Formgebung von Stahlfedern die gewünschten Bedingungen besser und einfacher erreichen. Im vorliegenden Falle war für eine Schiffsanlage eine elastische Kupplung zu bauen, für die die Verwendung von Stahlfedern beschlossen war. Bei der für dieses Beispiel zugrunde gelegten Maschinenanlage sind die aus dem Tangentialdruckdiagramm und der mittleren Maschinenleistung berechneten Kupplungsmomente <sup>3)</sup>

$$M_{k \max} = 2700 \text{ mkg}$$

$$M_{k \min} = 600 \text{ mkg}$$

Negative Momente treten bei dieser Anlage nur beim Anfahren und Abstellen auf, so dass die Kupplungsfedern hauptsächlich in der Drehrichtung, und zwar auf Druck beansprucht werden.

Es war für eine gegebene Feder einer Anlage die Kennlinie zu ermitteln. Bei der Wahl von 6 Kupplungsfedern mit einem Kraftangriff am Federbolzen vom Radius  $r = 500$  mm ergibt sich die max. Belastung eines Federelementes zu

$$P = \frac{2700}{6 \cdot 0,5} = 900 \text{ kg}$$

Wendet man das hier entwickelte graphische Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung an, so erhält man, wie anschliessend gezeigt wird, auf sehr einfache Weise den genauen Verlauf der elastischen Linie. Hieraus ergibt sich für jede Kraft der gesuchte Federweg, der für die exakte Durchführung der Schwingungsberechnung des Wellensystems <sup>4)</sup> notwendig ist. Einzelheiten sowie die Federabmessungen sind aus Bild 9 zu ersehen.

Man geht so vor: Vom eingespannten Federende 0—0 beginnend, unterteilt man die beanspruchte Federlänge in beliebige, im vorliegenden Falle 3 cm lange Abschnitte und berechnet in diesen Punkten die Biegesteifigkeit  $EJ$  (Tabelle 1). Nun schätzt man die Vertikalkraft  $V$ , z. B. 190 kg, die das freie Federende bzw. den Angriffspunkt der Kraft  $P$  auf der vom Federbolzen beschriebenen Kreisbahn führt. Aus  $V$  und  $P$  ergibt sich  $R$  und ihre Wirkungslinie  $w$ .

Im folgenden bedeutet:

- $R'$  = Radius der Federwiderlage (cm)
- $\rho(s)$  = Krümmungsradius der elast. Linie bei Belastung (cm)
- $r$  = Krümmungsradius der elast. Linie unbelastet (cm)
- $R$  = Resultierende Kraft (kg)

<sup>3)</sup> Zur Berechnung drehelastischer Kupplungen «MTZ» 1941, Heft 1, Seite 3.

<sup>4)</sup> «Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine» von Hans Schrön und «Technische Dynamik» von Biezeno & R. Grammel.

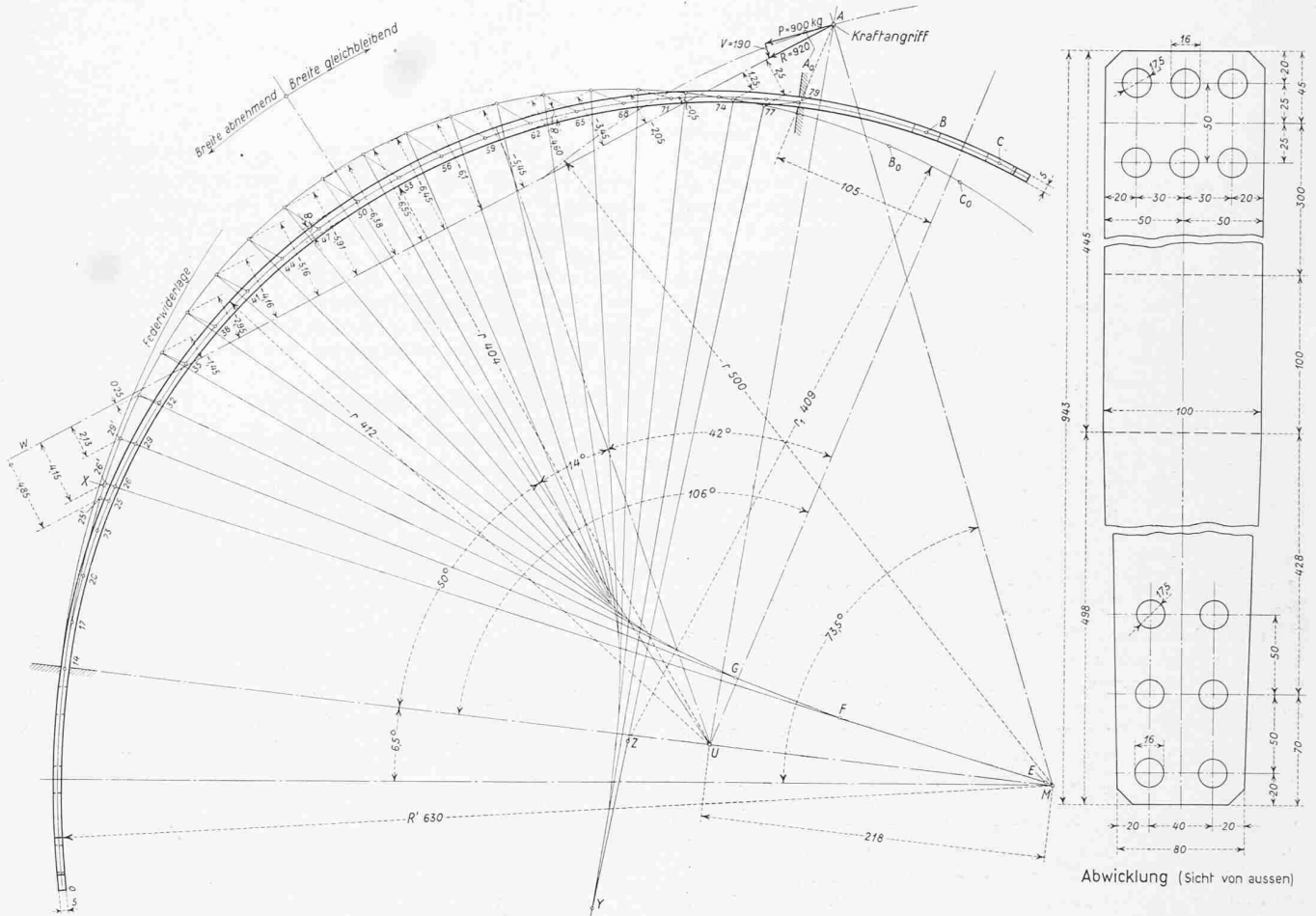


Bild 9. Untersuchte Feder im spannungslosen und im gespannten Zustand

- $x(s)$  = Abstand eines betrachteten Punktes zur Wirkungslinie  $w$  (cm)
- $E$  = Elastizitätsmodul (kg/cm<sup>2</sup>)
- $J(s)$  = Flächenträgheitsmoment (cm<sup>4</sup>)
- $s$  = Bogenlänge gemessen von 0—0 (cm).

Tabelle 1. Werte für den Krümmungsradius  $\rho$  bei einer Belastung  $P = 900$  kg,  $V = 190$  kg,  $R = 920$  kg,  $1/r = 0,02445$

$s$ (cm)	$EJ \cdot 10^6$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$X$ (cm)	$M/EJ$	$1/\rho_n$	$\rho_n$ (cm)
25	0,443	4,85	0,01008	0,01437	69,6
26	0,458	4,15	0,00834	0,01611	62,1
29	0,505	2,13	0,00387	0,02058	48,6
32	0,554	0,25	0,00042	0,02403	41,6
35	0,606	-1,45	0,00221	0,02666	37,5
38	0,662	-2,95	0,00411	0,02856	35,1
41	0,722	-4,16	0,00530	0,02975	33,6
44	0,785	-5,16	0,00605	0,03050	32,8
47	0,851	-5,91	0,00639	0,03084	32,5
50	0,916	-6,38	0,00642	0,03087	32,4
53	0,916	-6,55	0,00658	0,03103	32,2
56	0,916	-6,45	0,00647	0,03092	32,4
59	0,916	-6,10	0,00613	0,03058	32,7
62	0,855	-5,45	0,00586	0,03031	33,0
65	0,769	-4,60	0,00550	0,02995	33,4
68	0,691	-3,45	0,00459	0,02904	34,4
71	0,623	-2,05	0,00303	0,02748	36,4
74	0,554	-0,50	0,00083	0,02528	39,5
77	0,491	1,25	0,00235	0,02210	45,2
79	0,454	2,50	0,00506	0,01939	51,6

Anmerkung:  $s$  ist die Bogenlänge der elastischen Linie, gemessen vom eingespannten Federende 0—0. Von  $14 < s < 26$  liegt die Feder an der Widerlage an. An den beiden Federenden  $0 < s < 14$  und  $79 < s < 94,3$  ist die Feder eingespannt, daher  $EJ = \infty$ .

Es ist offensichtlich, dass für  $\rho(s) > R'$  (Bild 1) das betrachtete Federstück gegen die Widerlage gepresst wird. Dagegen hat sich die Feder für  $\rho(s) < R'$  schon von der Widerlage abgehoben.

Daher gilt für den Anlagepunkt:

$$(16) \quad \rho(s) = R'$$

Um diesen zu finden, zeichnet man den Verlauf der elastischen Linie mit der Krümmung der Federwiderlage, eine beliebige Strecke auf. Nun greift man sich einen Punkt derselben, z. B.  $s = 26$  cm, heraus und erhält durch gleiche Unterteilung den entsprechenden Punkt 26'. Der Abstand von 26' bis zur Wirkungslinie  $w$  misst man ab und erhält

$$x(s) = 4,15 \text{ cm}$$

Nach der Momenten-Gleichung der elastischen Linie

$$(17) \quad \frac{1}{\rho(s)} = \frac{1}{r} - \frac{Rx(s)}{EJ(s)}$$

kann man den Krümmungsradius  $\rho(s)$  berechnen und erhält (n. Tabelle 1)

$$\rho(26) = 62,1$$

Dieser Wert ist kleiner als  $R'$ , folglich hat sich die Feder schon von der Widerlage abgehoben. Führt man das selbe Verfahren für  $s = 25$  cm durch, so wird nach Gleichung (17), deren Auswertung in Tabelle 1 wiedergegeben ist:

$$\rho(25) = 69,6$$

Da  $\rho(25) > R'$ , liegt die Feder in diesem Punkte also noch an und der gesuchte Wert liegt zwischen diesen beiden Grössen. Durch Interpolation wird für den Anlagepunkt

$$S_A = 25,88$$

was für unsere Zwecke genügt.

Mit dem Krümmungsradius  $\rho(26)$  und dem Krümmungsmittelpunkt  $E$  auf  $\overline{MX}$  (Bild 9) zeichnet man mit genügender Genauigkeit ein Stück der elastischen Linie soweit auf, dass man Punkt 29' noch gut auftragen kann.

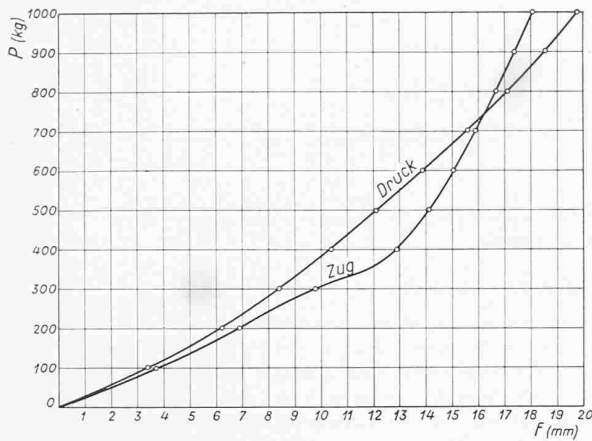


Bild 10. Federkennlinie

Wiederum misst man  $x$  (29) ab und berechnet den Radius  $\rho$  (29), der mit  $F$  auf  $E \cdot 26'$  zur weiteren Aufzeichnung der elastischen Linie dient, und so fort.

Die Enveloppe der Krümmungsradien, die sogenannte Evolute  $M, E, F, G, \dots$  hat ihren Scheitel dort, wo  $\rho$  ( $s$ ) ein Minimum ist, und die auftretenden Spannungen sind dort am grössten. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Stelle der max. Beanspruchung kein Festpunkt ist, sondern sich mit zunehmender Belastung, hervorgerufen durch die nichtlineare Änderung der Führungskraft  $V$  und durch Wandern des Anlagepunktes  $X$ , in Richtung des Kraftangriffspunktes  $A$  bewegt.

Zu beachten ist ferner, dass oberhalb von  $w$  die Momente  $R \cdot x$  ( $s$ ) negativ werden und dass die Krümmung an der oberen Einspannung für  $s = 79$  cm, einen Sprung macht. An dieser Stelle geht der Krümmungsradius sprunghaft auf  $r_1$  um die Strecke  $YZ$  zurück, die Einspannelemente sind daher gut abzurunden, um Spannungsspitzen zu vermeiden.

Hat man nun  $V$  zu klein oder zu gross geschätzt, so wird die Feder seitlich ausweichen und der um den Federweg verschobene Angriffspunkt von  $P$  wird oberhalb oder unterhalb der vom Federbolzen beschriebenen Kreisbahn liegen.

Das Aufzeichnen der elastischen Linie ist dann mit einer neuen Schätzung von  $V$  zu wiederholen und durch Interpolation die wirkliche Grösse von  $V$  zu ermitteln, die das Federende so führt, dass sich  $A_0$  auf der Kreisbahn bewegt.

Der Punkt  $A_0$  wird gefunden, indem man Dreieck  $ABC$  mit den entsprechenden Punkten  $B_0$  und  $C_0$  auf der elastischen Linie abträgt. Der gesuchte Federweg ist nach Bild 9

$$\bar{A} A_0 = 18,5 \text{ mm}$$

Mit diesem Verfahren der sukzessiven Approximation ist es möglich, nicht nur von Kreisbogenfedern, sondern auch von solchen mit beliebigen, komplizierten Formgebungen die elastische Linie zu konstruieren.

Um die Richtigkeit und Genauigkeit der graphischen Lösung zu untersuchen und die an der Innen- und Aussenseite der Feder auftretenden Spannungen zu messen, ist die Kupplungsfeder auf einer den Betriebsbedingungen entsprechenden Versuchseinrichtung einer genauen Prüfung unterzogen worden. Wie aus Bild 10 ersichtlich, ist auf der Prüfmaschine die Belastung von 100 zu 100 kg gesteigert und der jeweilige Federweg gemessen worden. Die Kennlinie ergibt auf Druck bei  $P = 900$  kg einen Federweg von  $= 18,6$  mm, was die sehr gute Genauigkeit der graphischen Lösung beweist. Beim Zugversuch weist die Kennlinie einen eigenartigen Knick auf, der jedoch, bedingt durch plötzliche Krümmungsänderung der Federwiderlage, auf unerwünschtes Abheben des unteren Federendes von der Anlage zurückzuführen ist.

Würde daher die Feder im Betrieb dauernden Zugbeanspruchungen ausgesetzt sein, so müsste man durch konstruktive Massnahmen ein sauberes Anliegen des Federblattes herbeiführen, zumindest aber die Spannungen an der Stelle des Abhebens genau ermitteln.

Besonders sei darauf hingewiesen, dass der progressive Verlauf der Federkennlinie wichtig ist. Die nichtlineare Kennlinie führt in Resonanznähe zur Verstimmung, wodurch die elastische Kupplung bedeutend verbessert wird. Tritt bei einer Erregenden höherer Ordnung, deren kritische Drehzahl also im Betriebsdrehzahlbereich liegt, Resonanz auf, so würden die Ausschläge, wenn man von der Dämpfung absieht, bei linearer

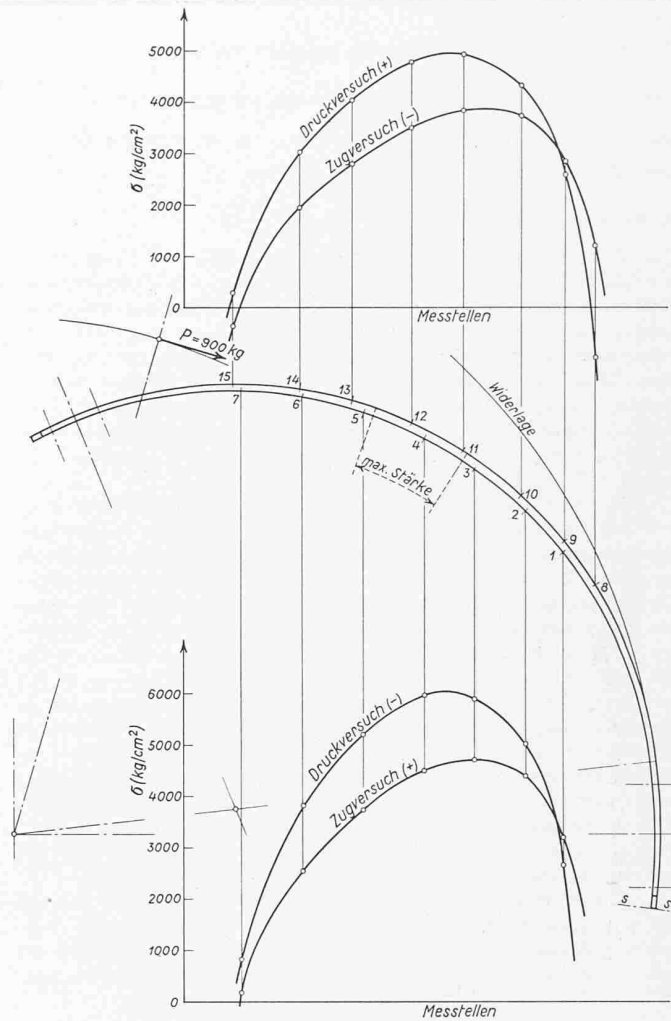


Bild 11. Spannungsverlauf der Kupplungsfeder. Masstab der Feder 1:7,5

Federkennlinie, unendlich gross werden. Bei der gekrümmten Federcharakteristik dagegen ist die Federsteifigkeit

$$C = \frac{P}{f}$$

bei jeder Belastung eine andere, was nichts anderes bedeutet, als dass sich die reduzierte Länge der elastischen Kupplung mit der Belastung ändert und somit auch die Eigenschwingungszahl des Systems, wodurch die Schwingung «ausser Tritt» fällt und die gefürchteten Resonanzausschläge in endlichen Grenzen bleiben.

Die Spannungen bei einer Belastung von  $P = 900$  kg wurden mit dem Tensometer und mit Dehnungstreifen (strain gauges) gemessen. Die Messergebnisse der beiden Verfahren stimmten gut überein, wobei die des Tensometers ein wenig tiefer lagen. In Bild 11 sind die Spannungen über den Messstellen der Dehnmesstreifen auf Zug und Druck, für FederInnen- und Aussenseite aufgetragen. Die Spannungen sind innen erheblich grösser als aussen und ihre Maximalwerte liegen im Bereich des grössten Federquerschnittes. Deutlich geht auch aus Bild 11 hervor, dass an den Stellen, wo die Wirkungslinie  $w$  die konstruierte elastische Linie der Feder schneidet (siehe Bild 9), die Spannungen  $= 0$  sind. Auf Grund des Spannungsverlaufes würde daher eine Schwächung des Federblattes vor den Einspannstellen und eine Verstärkung im meist beanspruchten Teil, bei gleichem Federweg, zu einem erheblichen Abbau der Spannungsspitzen führen und dem Idealfall der Feder gleicher Festigkeit näherkommen.

Der dynamischen Beanspruchung der Feder durch Fliehkräfte ist durch konstruktive Massnahmen Rechnung getragen worden, indem entsprechend gewählte Gegenmassen dem zusätzlichen Ausbiegen der Feder entgegenwirken. Da ausserdem die Drehzahl verhältnismässig klein ist, sind bei der Konstruktion der elastischen Linie die dynamischen Einflüsse vernachlässigt worden.

Adresse des Verfassers: Robert Zwahlen, Dipl. Math. ETH., Hofwiesenstr. 242, Zürich, und G. Elger, Oststr. 6, Winterthur.