

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 74 (1956)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Ueber die Beanspruchung der Schubarmierung von Eisenbetonbalken  
**Autor:** Walther, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-62558>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber die Beanspruchung der Schubarmierung von Eisenbetonbalken

DK 624.012.4.001.5

Von Dipl. Ing. R. Walther, Bethlehem/Pa

Fortsetzung von S. 12

## C. Auswertung und Folgerungen

### 1. Allgemeines

Die Genauigkeit der Messungen kann am besten durch Vergleichen von Resultaten gleichartiger Mess-Stellen abgeschätzt werden. Die Uebereinstimmung der Belastungs-Dehnungsdiagramme von Strain-Gauges in ein und derselben Faser, also in entsprechenden Stäben der Balkenmitte war sehr gut. Gleiche, bezüglich der Balkenmitte symmetrische Messpunkte dagegen zeigten meistens während der Rissbildung Spannungsverschiebungen, da die Risse nicht ganz gleichzeitig und nicht genau spiegelbildlich auftraten. Vor der Rissbildung und im Gebiet der Bruchlast glichen sich solche Kurven jedoch wieder an. Derartige Abweichungen waren um so kleiner, je besser die Armierung haftete, da die Risse bei guter Haftung weniger zufällig verlaufen als bei schlechtem Verbund.

Dass die Hypothese von Navier-Bernoulli über das Ebenbleiben der Querschnitte für die Stahleinlagen nur sehr begrenzt gilt, zeigen Vergleiche der Stahldehnungen von Mess-Stellen, die in gleichen Vertikalschnitten, jedoch in verschiedenen Höhenlagen liegen (z. B. die Viertelspunkte der Längsarmierung bei den Balken Type B). Der Verlauf dieser Dehnungen weicht teilweise schon vor Erreichen der Nutzlast (~ 20 t) erheblich von der Geraden ab, und die Verbindungsgeraden zwischen einzelnen Messpunkten treffen den Vertikalschnitt oft weit oberhalb der neutralen Axe (Bild 10). Dies deutet schon auf die Bogenwirkung hin, denn bei einem

Bogen mit Zugbändern in verschiedenen Höhenlagen brauchen die Dehnungen über einen vertikalen Schnitt nicht linear zu verlaufen. Wie in anderem Zusammenhang schon festgestellt werden konnte, bleiben jedoch die Betonquerschnitte allein nahezu eben.

### 2. Die Wirkung von Bogen und Balken und ihr Einfluss auf die Schubbeanspruchung

Der jeweilige Grad der Bogenwirkung unserer verschiedenen Balken lässt sich am besten durch eine Betrachtung der Spannungsverteilung in den untern Längseisen übersehen (Bild 11). Es zeigt sich, dass selbst die ausgezeichnet haftenden Gewindestangen schon bei mässiger Belastung Zugspannungen über den Auflagern aufweisen, was auf eine bald einsetzende Bogenwirkung schliessen lässt. Dies mag zum guten Teil daher kommen, dass unsere Balken relativ hoch sind, was eine derartige Entwicklung begünstigt. Jedoch kann diese Wirkung auch bei schlanken Balken, wie sie Djabry für seine Haftversuche verwendet hat, eindeutig konstatiert werden (Bild 12). Ganz allgemein ist die Bogenwirkung von folgenden Faktoren abhängig:

- Verhältnis von Balkenhöhe zu Balkenlänge.
- Abstand der Lastangriffspunkte vom Auflager. (Ist diese Distanz klein, so wirken auch sehr schlanke Balken in Auflagernähe als Bogen.)
- Verbundeigenschaften von Stahl und Beton.
- Allgemeiner Verlauf der Armierung.

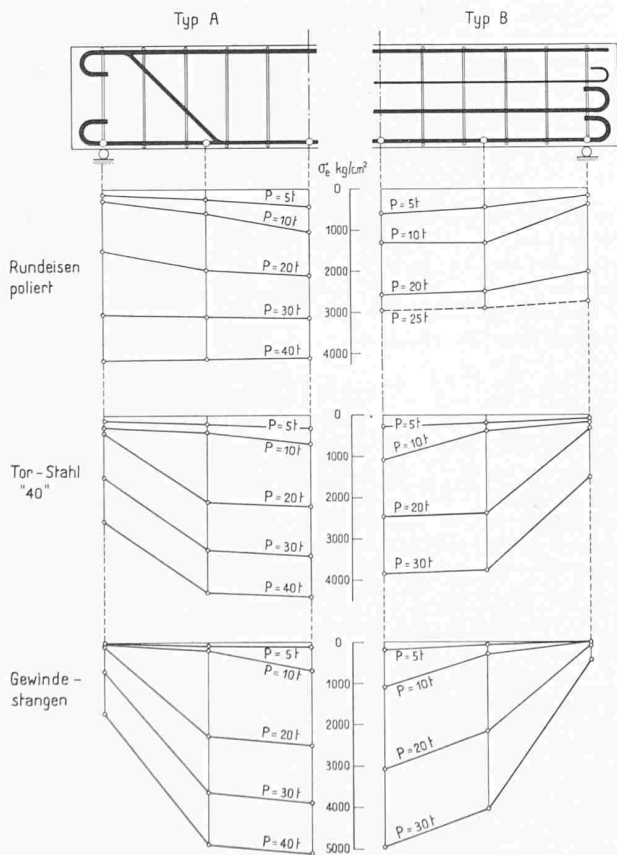


Bild 11. Verlauf der Stahlspannungen entlang den untern Längseisen. (Selbst bei guter Haftung verlaufen diese Spannungen nicht entsprechend der Momentenlinie; bei grösserer Belastung treten über den Auflagern bedeutende Zugspannungen auf; diese sind umso grösser, je schlechter die Verbundeigenschaften sind)

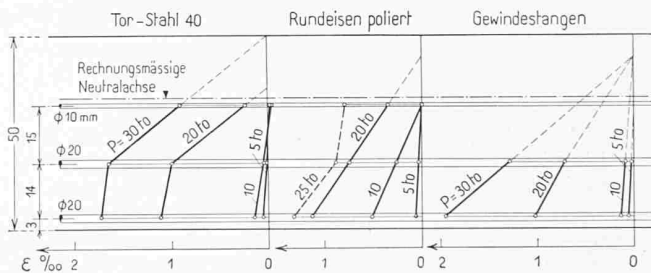


Bild 10. Verlauf der Stahldehnungen über die Querschnitte im Balkenviertel. (Abweichungen von der Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte)

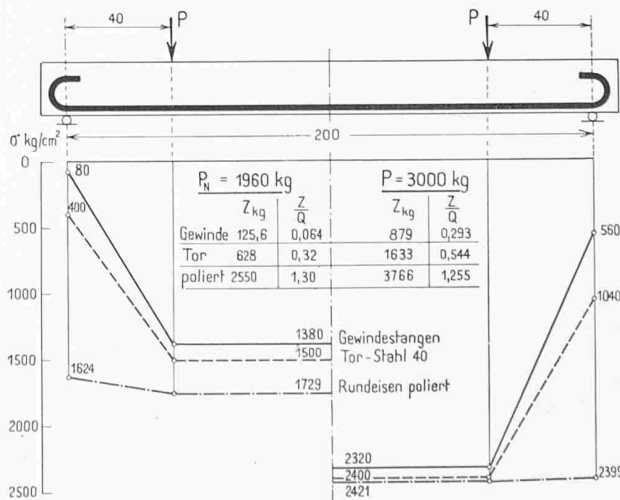


Bild 12. Verlauf der Stahlspannungen entlang den untern Längseisen bei schlanken Balken. (Abgeleitet aus Versuchen von Djabry; siehe EMPA-Bericht Nr. 184)

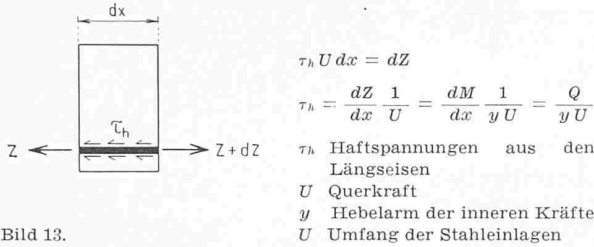


Bild 13.

Die Bogenwirkung und der Verlauf der Haftspannungen entlang der Längsarmierung stehen in einem engen Zusammenhang, der bis anhin meist übersehen wurde. Die Frage der rechnermässigen Erfassung dieser Haftspannungen hat die deutsche Fachwelt vor etwas mehr als zehn Jahren arg entzweit und zu heftigen Kontroversen zwischen Mörsch und Dischinger geführt. Da die angeführten Argumente auch für die Interpretation unserer Versuchsergebnisse von Interesse sind, sei nochmals kurz darauf eingegangen.

Allen diesen Theorien wird eine Gleichgewichtsbedingung an einem Balkenelement  $dx$ , das nur Längseisen enthält, zugrundegelegt (Bild 13).

Die Beziehung würde streng zutreffen, wenn die Armierung nicht gleiten könnte, was aber nie ganz der Fall ist. Bei schlechter Haftung gilt nämlich die Gleichung

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{y}$$

nicht mehr. Werden nun Längseisen zur vollständigen Schubsicherung unter  $45^\circ$  abgebogen, so werden die Haftspannungen nach der Fachwerktheorie von Mörsch um die Hälfte vermindert:

$$(1a) \quad \tau_h = \frac{1}{2} \frac{Q}{U y}$$

Dieses Resultat geht aus relativ einfachen Gleichgewichtsbedingungen hervor (Bild 14a). Dabei wurde aber mehr oder weniger willkürlich angenommen, die Zugkraft  $dZ'$  der Schrägeisen trete in ihrer, aus dem Schubdiagramm berechneten Grösse

$$dZ' = \frac{Q}{y} \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

auf und beeinflusse die Längszugkraft  $Z$ , die links am Schnitt angreift, nicht. Ebenso gut könnte man aber die Gleichgewichtsbedingungen nach Bild 14b formulieren und würde so finden, dass die Haftspannungen unabhängig von den Aufbiegungen seien. Dies entspricht auch den Resultaten unserer Versuche, wobei aber der wirkliche Wert der Haftung durch die Formel

$$\tau_h = \frac{Q}{y U}$$

nicht zutreffend erfasst wird.

Dischinger hat nun in mehreren Abhandlungen<sup>5)</sup> die Berechnung der Haftspannungen wesentlich verfeinert und auch die Neigung der Schrägeisen berücksichtigt. Er hat für den Fall vollkommener Schubsicherung durch Aufbiegungen unter  $45^\circ$  den Zusammenhang

$$\tau_h = 0,3 \frac{Q}{y U}$$

<sup>5)</sup> z. B. Schleicher: Taschenbuch für Bauingenieure, 1949, Abschnitt Massivbau, Seite 1370 ff.

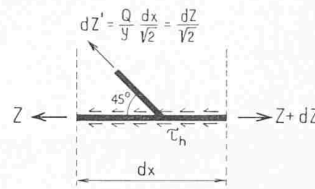
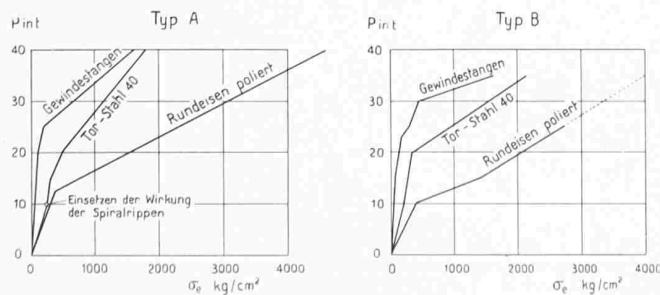


Bild 14a.

$$\tau_h = U dx = dZ - \frac{dZ'}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{dZ}{dx} y$$

$$\tau_h U dx = dZ - \frac{dZ}{2} = \frac{dZ}{2}$$

$$\tau_h = \frac{dZ}{2} \frac{1}{U dx} = \frac{1}{2} \frac{Q}{y U}$$

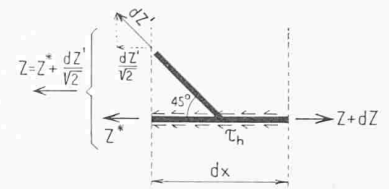


Bild 14b.

gefunden. Um zu diesem Resultate zu gelangen, mussten wiederum vereinfachende Annahmen über die Beanspruchung der Schrägeisen gemacht werden. In unserem Beispiel (vollkommene Schubsicherung unter  $45^\circ$ ) stimmt die Berechnung der Kräfte dieser Aufbiegungen mit den Werten aus dem sog. Schubdiagramm überein. Diese sind aber meistens viel zu gross, was für die Schubarmierung eine erhöhte Sicherheit bedeutet. Die Haftspannungen werden nun nach Dischingers Überlegungen durch diese schrägen Kräfte wesentlich reduziert; eine Überschätzung dieser Kräfte führt demnach zu bedeutenden Unterschätzungen der Haftspannungen.

Alle diese Herleitungen erscheinen jedoch nicht stichhaltig, wenn man bedenkt, dass die Bestimmung solcher Grössen infolge von Gleiterscheinungen und Rissbildung ein hochgradig statisch unbestimmtes Problem darstellt, dessen Verschiebungsgrössen auf theoretischem Wege kaum je zutreffend erfasst werden können. Jedenfalls haben unsere Versuche bestätigt (Bild 15), dass der Qualität der Haftung eine ungleich grössere Bedeutung zukommt als etwa der Anzahl oder der Neigung der Schrägeisen.

Deshalb hat ein zwar nur grober Ansatz, der aber die experimentell bekannten Verbundeigenschaften berücksichtigt, mehr Aussicht, der Wirklichkeit näher zu kommen. Dies sei im folgenden versucht:

Wir gehen aus von der Bedingung

$$(2) \quad \tau_h = \frac{dZ}{dx} \frac{1}{U}$$

Sie gilt für alle Haftprobleme, unabhängig davon, ob die Eisen gleiten oder nicht. Da ein Teil der gesamten Zugkraft sich bis in die Auflager fortpflanzt und daher nicht durch Haftspannungen abgebaut werden muss, können wir die wirkliche Grösse der Zugkraft in jedem Schnitt durch folgende Beziehung angeben (Bild 16).

$$(3) \quad Z^* = Z_0 + kZ$$

Die theoretische und die wirkliche Beanspruchung werden im Gebiete des grössten Momentes ungefähr übereinstimmen:

$$(3a) \quad Z^*_{max} = Z_{max} = Z_0 + kZ_{max}$$

Damit finden wir die Konstante  $k$  als ein Affinitätsverhältnis, das den theoretischen mit dem wirklichen Kräfteverlauf verknüpft:

$$(4) \quad k = \frac{Z_{max} - Z_0}{Z_{max}} = 1 - \frac{Z_0}{Z_{max}}$$

Bild 15 links. Zug-Spannungen in den Längsarmierungsstäben über den Auflagern in Abhängigkeit der Belastung für Trajektorien-Armierung und Orthogonal-Armierung bei verschiedener Haftung. Der Einfluss der Haftung fällt weit mehr ins Gewicht, als derjenige der Armierungsart

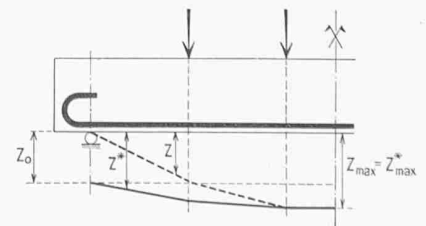


Bild 16. Theoretischer (gestrichelt) und wirklicher (ausgezogen) Verlauf der Zugkräfte in geraden Stahleinlagen

Gleichung (3) abgeleitet ergibt

$$\frac{dZ^*}{dx} = k \frac{dZ}{dx}$$

folglich ist

$$(5) \quad \tau_h = k \frac{Q}{Uy}$$

Die Haftspannungen sind demzufolge um so kleiner, je grösser die Bogenwirkung, d. h. je schlechter die Verbundeigenschaft ist. Die Anzahl der Aufbiegungen spielt nach diesen Ueberlegungen und in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen keine, oder nur eine untergeordnete Rolle. In Balkenmitte sind die Zugkräfte der einzelnen Armierungsstangen ungefähr gleich gross. Diese können durch Aufbiegungen abgefangen oder vermittelt gerade durchgehender Eisen teilweise bis in die Auflager geführt werden. Der Spannungsverlauf längs der einzelnen geraden Stangen wird dadurch nicht wesentlich beeinflusst.

Daher ist es auch fraglich, ob eine Begrenzung der rechnermässigen Haftspannungen, wie sie z. B. die deutschen Normen vorschreiben, zweckmässig ist, oder ob die gewünschte Sicherheit gegen Gleiten nicht besser durch eine Vorschrift für eine möglichst weitgehende Verminderung der Zugkräfte über den Auflagern gesucht werden sollte. Das Problem, die über den Auflagern verbleibenden Zugkräfte  $Z_0$  zutreffend voraussagen, ist nun allerdings recht verwickelt und bedürfte einer besonderen Untersuchung. Für den speziellen Fall unserer Balken, die in Form, Betonqualität und Durchmesser der Armierung einheitlich waren, konnten im Bereiche der Nutzlast beispielsweise folgende Werte ermittelt werden:

Poliertes Rundstahl:	$Z_0 = Q$
Tor-Stahl 40:	$Z_0 = 0,25 Q$
Gewinde-Stangen:	$Z_0 = 0,05 Q$

Aus Bild 15 können wir noch die interessante Tatsache entnehmen, dass die Spiralrippen des Torstahles nicht sofort zur Wirkung kommen, sondern erst, nachdem sich ein gewisser «Schlupf» eingestellt hat.

Trotzdem die Aufbiegungen den Verlauf der Haftspannungen nicht massgebend beeinflussen, sind sie für die Aufnahme der Schubkräfte von grösster Bedeutung. Die Verbundeigenschaften fallen auch hier stark ins Gewicht, und zwar nicht nur für die Beanspruchung der Bewehrung, sondern auch für die Schubbeanspruchung selbst. Wie schon eingangs erwähnt, hat eine schlechte Haftung keine oder nur geringe Schubspannungen zur Folge, was aber nicht heisst, dass die Schrägeisen weniger beansprucht würden als bei gutem Verbund, im Gegenteil: der blanke Stahl nimmt die grössten Kräfte auf (Bild 17), obwohl hier praktisch keine schiefen Hauptzugspannungen vorhanden sind, was dadurch bestätigt wird, dass nur senkrechte Risse auftraten (Bild 9e und 9f). Zur Erklärung — nicht zur Berechnung — dieser Tatsache, kann man dieses Schrägeisen als Diagonale eines Gelenk-Vierecks auffassen, die sich bei der Durchbiegung des Balkens stärker dehnen muss als die andern Elemente dieses Vierecks (Bild 18). Derartige Aufbiegungen sind also in erster Linie geeignet, grossen Verformungen entgegenzuwirken, was vor allem bei Balken schlechter Haftung (grosse Risse) bedeutungsvoll wird. Die Abbiegungen sind auch darum sehr nützlich, weil sie die Zugkräfte des untern, geraden Teils solcher Armierungsstangen direkt abfangen und in den Druckgurt überleiten können. Dies führt zu einer entsprechenden Entlastung der Auflagerzone, von der, wie sich zeigen wird, die Schubbrüche ausgehen.

Die Grösse der schiefen Hauptspannungen selbst kann am ehesten aus der Beanspruchung des Gewindestabes ermittelt werden, da dieser, wie auch in andern Zusammenhang schon festgestellt werden konnte, den Dehnungen des Betons sehr gut folgt? Vergleichen wir nun die in diesem Stab gemessenen Spannungen mit den  $n$ -fachen Werten der rechnermässigen schiefen Betonzugspannung des homogenen Querschnittes, so erkennen wir, dass die letztgenannten lange nach erfolgter Rissbildung erreicht und erst im Gebiete der Bruchlast wesentlich überschritten werden (siehe Bild 17). Dies deutet darauf hin, dass die schiefen Hauptspannungen und daher auch die Schubspannungen of-

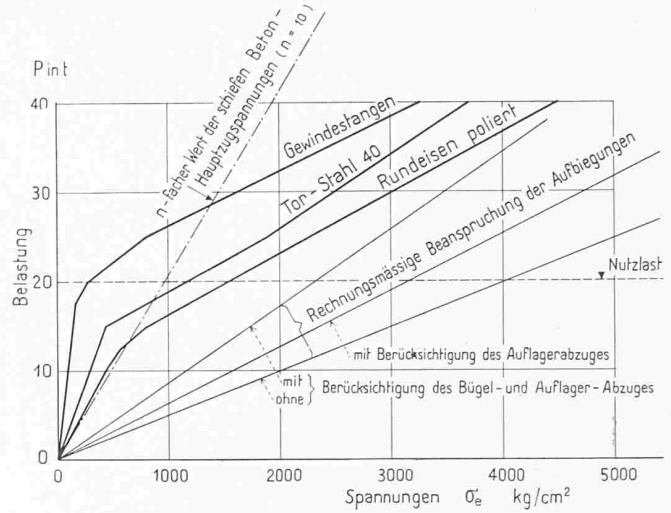


Bild 17. Rechnermässige und wirkliche Beanspruchung der Schrägeisen (Schubsicherung). (Die Berechnungen basieren auf dem Schubdiagramm nach Mörsch; die angegebenen gemessenen Beanspruchungen sind Mittelwerte aus den Messtellen links und rechts)

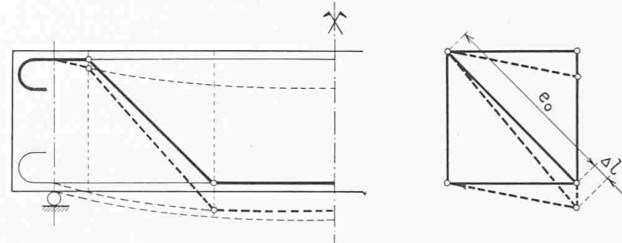


Bild 18. Veranschaulichung der Wirkungsweise der schrägen Aufbiegungen: bei der Durchbiegung des Balkens kann ein Schrägeisen in erster Näherung als Diagonale eines Gelenkvierecks angenommen werden. Die Dehnung dieser Diagonale ist weit grösser, als diejenige aller andern Armierungselemente. Neben ihrer Funktion als Schubsicherung wirken solche Schrägeisen daher vor allem grossen Verformungen des Balkens entgegen

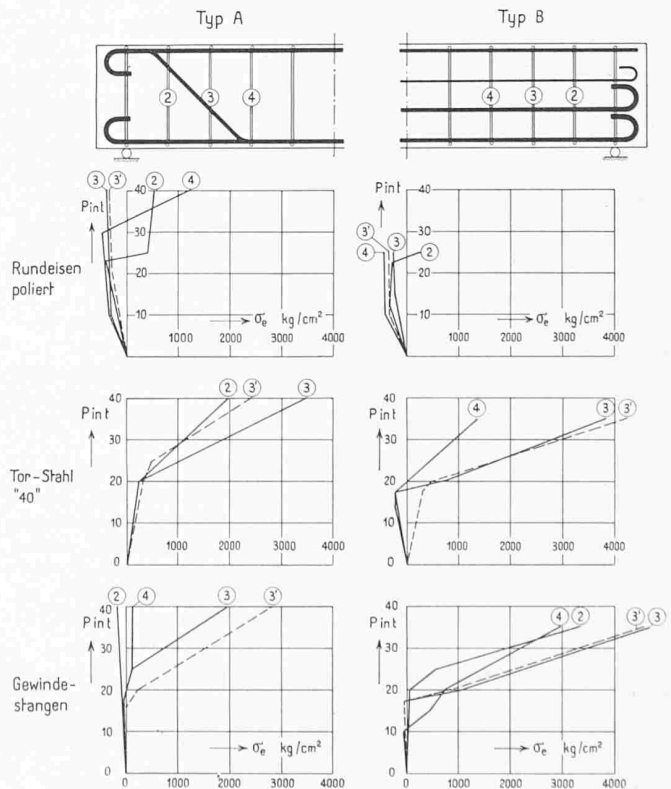


Bild 19. Beanspruchung der Bügel bei verschiedenen Verbundeigenschaften der Armierungsstähle. (Die gestrichelten Kurven geben jeweils die Vergleichsresultate der Bügel aus gewöhnlichem Beton-Rundstahl)

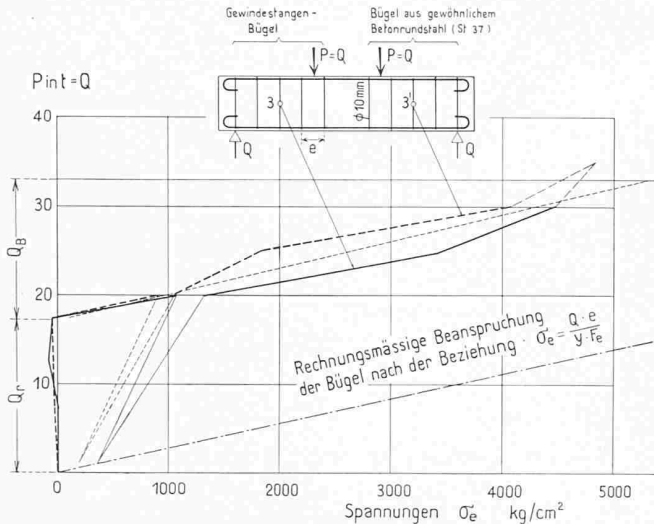


Bild 20. Beanspruchung der Bügel bei Balken Typ B mit Gewindestangen-Armierung. (Bügel links): Gewindestangen, Bügel rechts: gew. Betonrundeisen ST 37)

Theoretische Werte der Bügelspannungen:

- ungerissener Zustand  $\sigma_y = 0$ ;  $\sigma_{\text{Bügel}} = 0$
- gerissener Zustand  

$$Q = \sigma_e F_e \frac{y}{e}; \quad \sigma_e = \frac{Q e}{y F_e}; \quad \sigma_e = Q \frac{20}{37 \cdot 1,5} = 0,36 Q$$

fenbar nicht die primären Ursachen der Schubbrüche darstellen und dass daher auch eine Begrenzung ihrer Werte, wie sie unsere Normen angeben, nicht das Wesentliche erfasst.

Die Messung der Beanspruchung der Bügel hat unsere Annahmen betreffend Bogenwirkung bestätigt (Bild 19). Die Bügel der Balken mit blanke Armierung weisen tatsächlich beträchtliche Druckspannungen auf. Beim Torstahl und bei den Gewindestangen treten vor allem bei den orthogonal-armierten Balken teilweise anfängliche Druckspannungen auf, was wiederum auf die Bogenwirkung zurückzuführen ist.

Entgegen der allgemein geltenden Ansicht, dass die Verbundeigenschaften der Bügel selbst wesentlich für deren Beanspruchung verantwortlich seien, konnte keine derartige Abhängigkeit nachgewiesen werden. Alle unsere Balken waren ja mit zweierlei Bügel versehen: die eine Balkenhälfte war mit solchen aus dem gleichen Stahl wie die übrige Armierung versehen (also blanke, Gewinde oder Torstahl-Bügel), während die andere Hälfte bei allen Balken mit normalen Beton-Rundeisen-Bügel armiert waren. Ein Vergleich der Bügel (3) und (3') (Bild 20) — den einzigen, die in beiden Balkenhälften gemessen wurden — zeigt, dass deren Beanspruchungen jeweils weitgehend übereinstimmen; dies mag vor allem bei den Balken mit Gewinde-Armierung überraschen.

Wenn für fein aufgeteilte Bügel verschiedentlich eine günstige Wirkung festgestellt werden konnte, so liegt dies offenbar nicht in erster Linie an deren grossen Haftflächen, sondern eher an der grösseren Wahrscheinlichkeit, dass bei vermehrt angeordneten Bügel ein schräger Riss einen oder mehrere Bügel trifft.

Wie die Aufbiegungen, so haben auch die Bügel die Tendenz, klaffenden Rissen entgegenzuwirken, aber nur, wenn diese schräg verlaufen, d. h. wenn die Haftung der Längseisen gut ist. Einem weiteren wesentlichen Aspekt eng angeordneter Bügel werden wir noch bei der Betrachtung der Auflagerzone begegnen. Im übrigen sind sämtliche Bügel im Gebiete der Gebrauchslast, die wir ungefähr als halbe Bruch-

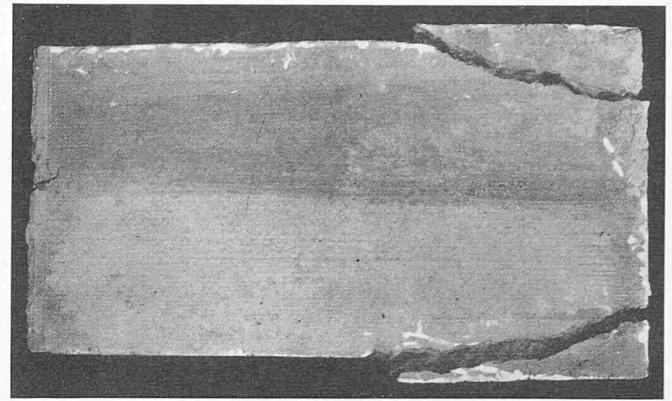


Bild 21. Aufsprengung der Balkenenden infolge grosser Beanspruchung der Endverankerungshaken. (Balken mit polierter Rundstahl-Armierung)

last, also für alle Balken etwa zu  $P_{\text{Nutz}} = 20 \text{ t}$  annehmen wollen, recht wenig beansprucht ( $\sigma_{\text{max}} \sim 600 \text{ kg/cm}^2$ ). Sie kommen erst richtig zur Wirkung, wenn sie einen grösseren Riss schneiden, in einem Zustand also, in dem ein Balken für die Praxis bereits unbrauchbar geworden ist. Es wurde auch schon festgestellt, dass Bügel, die rechnermässig dreifach überlastet waren, nicht gebrochen sind. Die Bügel können daher nicht wesentlich an der Lastaufnahme beteiligt sein. Trotzdem geht aus vielen Belastungsversuchen ganz eindeutig hervor, dass sie die Tragfähigkeit eines Balkens bedeutend erhöhen können und zwar um so mehr, je feiner sie über den Balken verteilt sind. Diese Erscheinung zeigen auch Balken mit schlecht haftender Längsarmierung, deren Bügel ja gar nicht auf Zug, sondern eher auf Druck beansprucht werden. Der günstige Einfluss der Bügel muss daher weniger in ihrer Eigenschaft als Schubsicherung, sondern vielmehr als umschürendes Element gesucht werden. Sehr viele Versuchs balken, die keine spezielle Verstärkung des Betonquerschnittes in der Auflagerzone aufweisen, sind infolge Aufsprengens des Betons zerstört worden, beispielsweise auch bei unseren Balken mit polierter Armierung (Bild 21). Die Bügel werden dabei in Querrichtung auf Zug beansprucht. Diese Querbeanspruchung wird immer vorhanden sein, wenn noch Zugkräfte in der Längsarmierung über dem Auflager verbleiben, selbst bei Balken, die nicht aufgesprengt werden. Ist nun aber der Beton in dieser Zone durch viele dünne Bügel eng umschürt, so nähert er sich bei Belastung durch die Endverankerungshaken dem Zustand allseitigen Druckes, was bewirkt, dass die resultierenden Verformungen geringer werden. Der Beton kann durch den Leibungsdruck also um so weniger gestaucht werden, als er durch Bügel satt umschürt ist. Damit wird der Bildung von klaffenden Rissen in der Schubzone wiederum direkt begegnet. Diese Ueberlegungen gelten auch, wenn die Auflagerkräfte nicht durch Endverankerungshaken, sondern durch überstehende Haftenden aufgenommen werden; auch diese haben eine aufsprengende Wirkung.

Das Studium von Bruchbildern vieler Schubversuche zeigt im Falle eines sog. Schubbruches immer eine ausgesprochene Zerstörung der Auflagerzone. Meistens beginnt der eigentliche Schubriss sogar unmittelbar über dem Auflager. Bild 22 mag dafür als Beispiel dienen. Schubbrüche müssen immer mit einem Gleiten der gerade durchgehenden Armierung verbunden sein. Dies, zusammen mit den vorhergehenden Ueberlegungen über die Beanspruchung der Aufbiegungen, lassen unseres Erachtens den Schluss zu, dass die Schubbeanspruchung selbst für die Schubbruchgefahr nur von

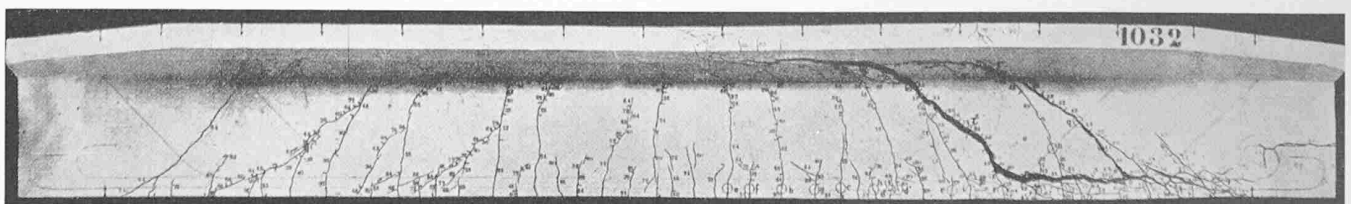


Bild 22. Typischer Schubriss. Zerstörung vom Auflager her

sekundärer Bedeutung sei. Die wesentliche Ursache diesbezüglicher Schäden ist das Gleiten der Längsarmierung vom Auflager her. Das Problem der Schubsicherung wird damit zu einem Problem der Haftung.

Es ist klar, dass ein solches Gleiten zu grossen Verformungen führt und damit die kleinen, meist schrägen

Haarrisse, die an und für sich nicht schaden, ja sogar bei guter Haftung am häufigsten auftreten, zu klaffenden Spalten aufgeweitet werden. Die Schrägeisen behindern nun wie gesagt diese Verformungen, und zwar eben auch dann, wenn gar keine schiefen Hauptzugspannungen und daher auch keine schrägen Risse vorhanden waren. Schluss folgt

## Berechnung des elastischen Verhaltens und der Eigenschwingungen von Eisenbahnfahrzeugen

Ergänzte Fassung der Antrittsvorlesung, die Prof. Otto Zweifel am 7. Dezember 1954 an der ETH gehalten hat DK 625.2.034

Schluss von Seite 6

Was weiter bestimmt werden muss, ist die potentielle Energie des Systems in einer allgemeinen Lage; es handelt sich dabei einerseits um das Potential der Schwerkraft und andererseits um die in den Federungen aufgespeicherte Deformationsarbeit. In beiden Fällen wird das Potential für die Gleichgewichtslage Null gesetzt. Unter dieser Voraussetzung wird das Schwerkraftpotential  $V_S$

$$(7) \quad V_S = mg \cdot \eta$$

worin  $m$  die Masse des Wagenkastens (Körper III) ist und  $g$  die Erdbeschleunigung. Sollen die Massen der Körper II und III mitberücksichtigt werden, so ist genauer:

$$(7a) \quad V_S = mg \cdot \eta + m_{II} g \cdot \eta_{II} + m_I g \cdot \eta_I$$

Das Potential einer Feder wird gerechnet, indem zumindest in einem kleinen Gebiet in Nähe der Gleichgewichtslage Linearität vorausgesetzt wird. Die Federkraft  $P$  ist dann nach Bild 20

$$P = P_o + \lambda \cdot f$$

worin  $P_o$  die Federkraft in der Gleichgewichtslage,  $\lambda$  die Federkonstante und  $f$  die Federdehnung ist. Das Potential der Feder ist dann

$$(8) \quad V_F = P_o \cdot f + \frac{1}{2} \lambda \cdot f^2$$

Dabei ist zu beachten, dass nach Bild 20 bei wachsendem  $f$  eine Zunahme der Federbelastung eintritt. Handelt es sich um eine Entlastung der Feder, so wird

$$(8a) \quad V_F = -P_o \cdot f + \frac{1}{2} \lambda \cdot f^2$$

Das Potential der gesamten Federung ist die Summe der einzelnen Federpotentiale

$$V_{Ftot} = \sum V_{Fi}$$

Das Gesamtpotential  $V$  ist dann

$$(9) \quad V = V_S + V_{Ftot} = mg \cdot \eta + \sum V_{Fi}$$

wenn die Massen  $m_I$  und  $m_{II}$  gegenüber  $m$  vernachlässigt werden können.

Zunächst sei im Teilsystem A-I (Bild 17) das Federpotential bestimmt. Zur Bestimmung der Federverlängerung der linken Feder setzt man den Vektorzug  $\vec{1} \vec{2}' \vec{3}' \vec{4}' \vec{3} \vec{2} \vec{1} = 0$ . Die einzelnen Vektoren haben hier folgende Komponenten:

$\vec{1} \vec{2} :$	0	$c_1$
$\vec{1} \vec{2}' :$	$c_x$	$c_y$
$\vec{2} \vec{3} :$	$a_1$	0
$\vec{2}' \vec{3}' :$	$a_1 \cos z_{12}$	$-a_1 \sin z_{12}$
$\vec{3} \vec{4} :$	0	$-b_1$
$\vec{3}' \vec{4}' :$	$-b_1 \sin z_{12}$	$-b_1 \cos z_{12}$

Die Komponentengleichungen ergeben dann (mit den gleichen Annäherungen wie bisher)

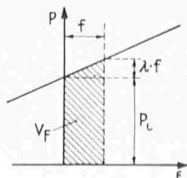


Bild 20. Federpotential  $V_F$ ;  $P$  = Federkraft,  $f$  = Federdehnung. In der Nähe der Gleichgewichtslage ( $f = 0$ ;  $P = P_o$ ) wird ein linearer Verlauf der Federcharakteristik angenommen

$$(114) \quad c_x = b_1 \cdot z_{12} + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot z_{12}^2$$

$$c_y = c_1 + z_{11} + a_1 \cdot z_{12} - \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot z_{12}^2$$

Macht man für die gesuchte Verlängerung  $f_L$  der linken Feder den allgemeinsten Ansatz 2. Ordnung

$$(115) \quad f_L = A_1 \cdot z_{11} + A_2 \cdot z_{12} + B_1 \cdot z_{11}^2 + B_2 \cdot z_{12}^2 + B_3 \cdot z_{11} \cdot z_{12}$$

so muss für die Gesamtlänge  $c_1 + f_L$  der Feder die Beziehung gelten

$$(116) \quad (c_1 + f_L)^2 = c_x^2 + c_y^2$$

Setzt man in Gl. (116) die Werte für  $c_x$ ,  $c_y$  und  $f_L$  aus (114) und (115) ein, so findet man durch Identifikation (auch in [116] dürfen dann Glieder 3. und höherer Ordnung ausser Betracht fallen) für die linke Feder

$$(117) \quad f_L = z_{11} + a_1 \cdot z_{12} + \frac{1}{2} \cdot b_1 \left( \frac{b_1}{c_1} - 1 \right) z_{12}^2$$

Da die allgemeine Lage von Bild 17 durch Ersatz von  $z_{12}$  durch  $-z_{12}$  in eine symmetrische Lage übergeht, wird für die rechte Feder

$$(118) \quad f_R = z_{11} - a_1 \cdot z_{12} + \frac{1}{2} \cdot b_1 \left( \frac{b_1}{c_1} - 1 \right) z_{12}^2$$

Nach (8a) gilt für das Federpotential  $V_{F1}$  dieses Teilsystems (für beide Federn zusammen)

$$(119) \quad V_{F1} = -P_o \cdot (f_L + f_R) + \frac{1}{2} \lambda_1 \cdot (f_L^2 + f_R^2)$$

worin  $P_o = \frac{1}{2} mg$  ( $m$  ist die gesamte Kastenmasse,  $\lambda_1$  die Federkonstante aller parallelwirkenden Federn der linken Seite an beiden Drehgestellen zusammen). Daraus ergibt sich dann mit den Gliedern bis zur 2. Ordnung

$$(120) \quad V_{F1} = -mg \left[ z_{11} + \frac{1}{2} b_1 \left( \frac{b_1}{c_1} - 1 \right) z_{12}^2 \right] + \lambda_1 (z_{11}^2 + a_1^2 z_{12}^2)$$

Berechnet man das Federpotential  $V_{F3}$  des Teilsystems II-III, so ergibt sich bis zur zweiten Ordnung wieder derselbe Ausdruck, so dass das totale Potential  $V$  des gesamten Systems nach (9) wie folgt angegeben werden kann:

$$(121) \quad V = mg (\eta - z_{11} - z_{31}) + \lambda_1 z_{11}^2 + \left[ \lambda_1 a_1^2 - \frac{1}{2} mg b_1 \left( \frac{b_1}{c_1} - 1 \right) \right] z_{12}^2 + \lambda_3 z_{31}^2 + \left[ \lambda_3 a_3^2 - \frac{1}{2} mg b_3 \left( \frac{b_3}{c_3} - 1 \right) \right] z_{32}^2$$

Als letzte Grösse wird noch die kinetische Energie  $T$  des Systems benötigt:

$$(10) \quad T = \frac{1}{2} m \left( \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \kappa^2 \dot{\psi}^2 \right)$$

worin  $\kappa$  der Massenträgheitsradius des Körpers III ist. Bei Berücksichtigung der Massen  $m_I$  und  $m_{II}$  der Körper I und II kämen noch mehr Glieder hinzu:

$$(10a) \quad T = \frac{1}{2} m \left( \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \kappa^2 \dot{\psi}^2 \right) + \frac{1}{2} m_{II} \left( \dot{\xi}_{II}^2 + \dot{\eta}_{II}^2 + \kappa_{II}^2 \dot{\psi}_{II}^2 \right) + \frac{1}{2} m_I \left( \dot{\xi}_I^2 + \dot{\eta}_I^2 + \kappa_I^2 \dot{\psi}_I^2 \right)$$

Die Gleichungen (4), (9) und (10) enthalten alle Zusammenhänge des Systems, die für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen nach Lagrange nötig sind. Diese lauten für jede Unabhängige  $z_{ik}$