

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 74 (1956)
Heft: 39

Artikel: Der exzentrisch gedrückte und querbelastete, prismatische Druckstab
Autor: Basler, Konrad
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62707>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der exzentrisch gedrückte und querbelastete, prismatische Druckstab

DK 624.075.22

Von Dipl. Ing. Konrad Basler, in Firma Wartmann & Cie. AG., Brugg

1. Einleitung

Bei Stäben unterscheiden wir zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Bauelementen, dem reinen Biegeträger (Bild 1a) und der zentrisch beanspruchten Stütze (Bild 1c). Für die Bemessung des zentrisch belasteten Stabes stehen uns die Formeln von Euler und Engesser-Kármán, beziehungsweise Shanley zur Verfügung, für den Biegeträger die Formel von Bernoulli-Navier. Sehr oft liegt aber eine Kombination beider Grundfälle vor. Dominiert die Biegung (Bild 1b₁), so dürfen wir mit genügender Genauigkeit die erweiterte Spannungsformel verwenden. Sobald aber die Normalkraft imstande ist, infolge der Stabausbiegung unter Querbelastung nennenswerte Biegemomente zu erzeugen, so fehlen uns im allgemeinen einfache und den beiden Grundfällen entsprechend genaue Bemessungsformeln.

In der vorliegenden Arbeit soll nun auf eine Näherungsformel (Abschnitt 3) hingewiesen, wie auch auf eine Methode (Abschnitt 4) zur Behandlung dieser Probleme aufmerksam gemacht werden.

Für die Herleitung von Bemessungsverfahren kann von beiden Seiten her der Bereich b in Bild 1 erschlossen werden. Man kann — um vom Grundfall c einen Schritt in Richtung b auszuführen — mit Ueberlegungen, wie sie F. Engesser erstmals vorgeschlagen hat, das Problem als Gleichgewichtsaufgabe behandeln, wobei Gleichgewicht zwischen dem Moment aus den äusseren Kräften und dem inneren Moment aus den Spannungen vorausgesetzt wird, oder aber vom Grundfall a aus die Aufgabe wie ein gewöhnliches Spannungsproblem ansehen. In diesem Fall nehmen wir an, dass der Stab aus einem Material bestehe, das sich bis zur Fließgrenze entsprechend dem Hookeschen Gesetz rein elastisch und nachher ideal plastisch verhalte. Ferner soll das Tragvermögen des gesamten Stabes erschöpft sein, wenn an irgendeiner Stabstelle die Randspannungen gleich der Fließgrenze werden. Die erstere Methode liefert Werte, die praktisch mit den gemessenen übereinstimmen, während das bei der zweiten nicht durchwegs der Fall ist. Dennoch bemessen wir unsere Tragwerke als Spannungsproblem, also nach der Elastizitätstheorie, und nicht nach einem Traglastverfahren, da dieses, wenn es für einen Stab der Gattung b ausgewertet worden ist, nur Gültigkeit besitzt für diesen bestimmten Lastfall, das zugrundeliegte Elastizitätsgesetz und darüber hinaus auch an die Querschnittsform des einzelnen Stabes gebunden ist.

Eine andere Darstellung der drei erwähnten Beanspruchungsarten ist in Bild 2 skizziert, wobei willkürlich als Grenze zwischen Fall b₁ und b₂ jene Linie eingetragen ist, für welche die Randspannung, nach der genauen Theorie ermittelt, höchstens 5% höher sein kann, als ohne Formänderungseinfluss berechnet. Man erkennt daraus, welche Fälle für die Praxis nicht als Formänderungsproblem zu untersuchen sind: jene, bei denen eine elastische Ausbiegung nie gross werden kann (Grenzfall der Ordinatenaxe), und solche, bei denen die Normalkraft zu klein ist (Grenzfall der Abszissenaxe). Trotzdem das Zustandekommen des Zusatzmomentes

von den beiden Grössen Stabausbiegung y und Normalkraft P abhängig ist, kann doch, wie wir immer wieder sehen werden, der Grad des Formänderungsproblems zweckmässig durch den Quotienten P/P_E angegeben werden.

$$P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

bedeutet die Eulersche Knicklast.

2. Der Sicherheitsgrad

Wir bemessen querbelastete und exzentrisch gedrückte Stäbe, indem wir nachweisen, dass unter den n -fachen Lasten die Randspannung an keinem Ort des Stabes die Fließgrenze überschreitet.

$$\sigma = \frac{nP}{F} + nH \frac{M(H=1, nP)}{W} < \sigma_{fl}$$

beziehungsweise

$$\sigma = \frac{P}{F} + H \frac{M(H=1, nP)}{W} < \sigma_{zul}$$

wenn wir durch den Sicherheitsgrad n dividieren.

In den folgenden, für den Spannungsnachweis bestimmten Formeln und Figuren setzen wir in dem mit der Normalkraft P nicht linear anwachsenden Anteil des Biegemomentes an Stelle von P die Zeichen $nP_{(vorh)}$, um daran zu erinnern, dass dafür die Bruchlast einzusetzen ist. Diese Schwierigkeit kommt daher, dass wir uns gewohnt sind, den Spannungsnachweis mit den Gebrauchs- statt Bruchlasten durchzuführen.

Aus Bild 2 ist ersichtlich, dass der Bereich der Stabgruppe b von Grenzen verschiedenen Sicherheitsgrades gesäumt wird, und zwar ist der rechnerische Sicherheitsgrad für den Grenzfall der reinen Biegung kleiner als beim zentrischen Knicken. Dieser Unterschied trägt zwei Einflüssen Rechnung. Einmal wirkt sich eine Ungenauigkeit in der Last-einleitung oder Stabform viel ungünstiger aus beim Knickstab als beim Biegeträger, und zum andern ist im Biegebalken stets eine kleine Tragreserve vorhanden, wenn dieser nur nach Randspannungen bemessen wird. Da die Tragreserve des Biegeträgers mählich abnimmt, je weiter sich der Fall b vom Grundfall a entfernt, und die Einflüsse aus Ungenauigkeiten in der Stabform zunehmen, je näher er dem Grenzfall c kommt, könnte man mit einem, dem Grad des Formänderungsproblems entsprechend variierenden, rechnerischen Sicherheitsgrad annähernd konstante effektive Sicherheit erzielen.

Für Stäbe aus St. 37 ($\sigma_{fl} = 2,40 \text{ t/cm}^2$) und Bauwerksklasse I, Fall H ($\sigma_{zul} = 1,60 \text{ t/cm}^2$) würde der Vorschlag etwa folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \lambda > 110 & \quad n = 1,5 + 2,5 \frac{\sigma_K}{\sigma_E} \\ \lambda < 110 & \quad n = 1,5 + 2,5 \frac{\sigma_K}{\sigma_E} + 0,15 \sigma_K \end{aligned}$$

darin bedeuten

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \frac{P}{F} \text{ [t/cm}^2\text{]} \\ \sigma_E &= \frac{P_E}{F'} = \frac{20000}{\lambda^2} \end{aligned}$$

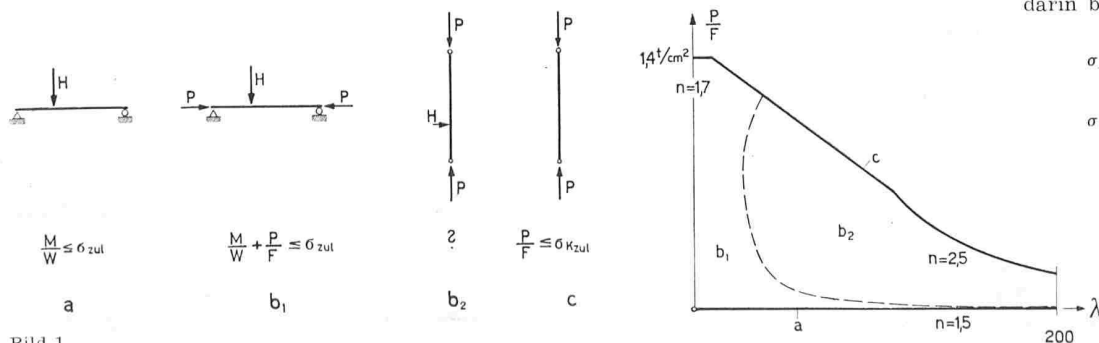


Bild 1

Bild 2

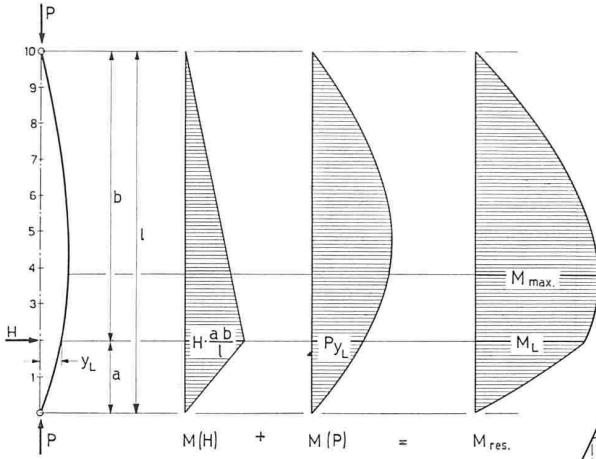


Bild 3

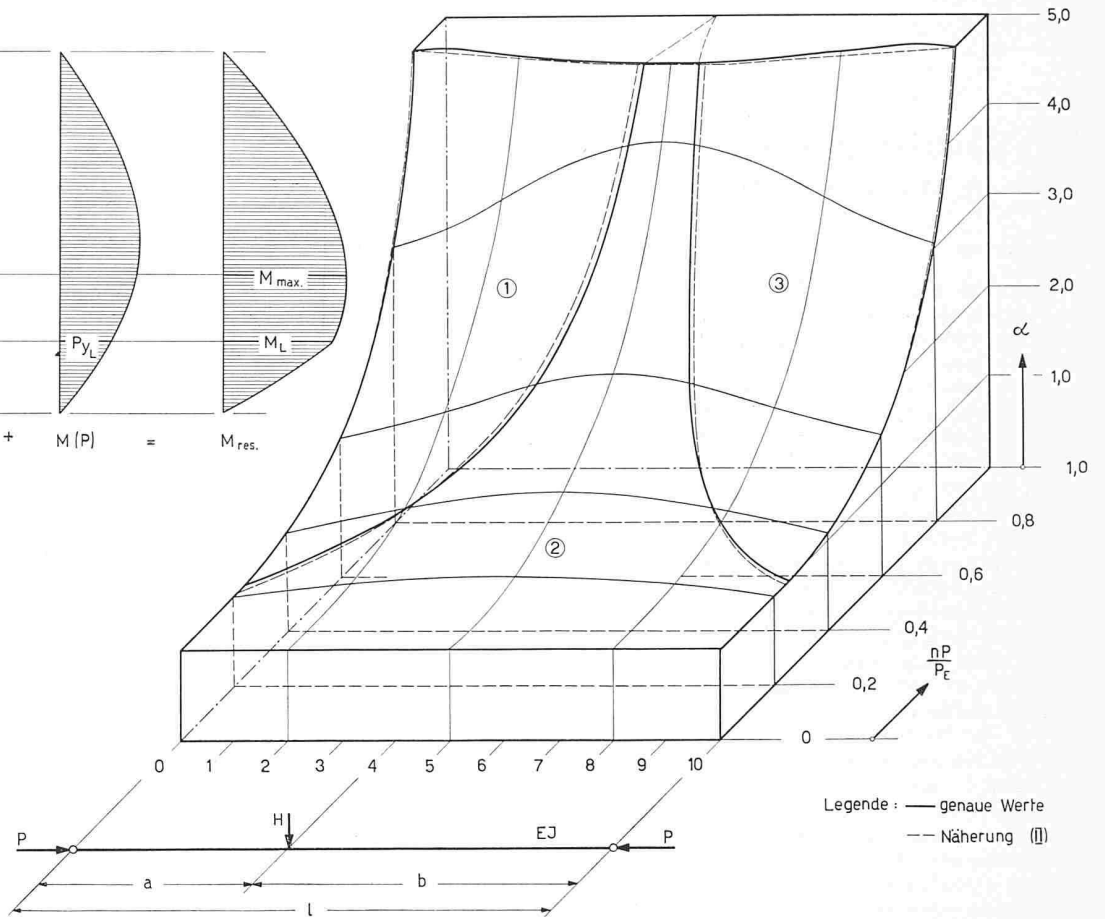


Bild 4 (rechts)

3. Eine Näherungsformel

Wenn wir nun, wie oben dargelegt worden ist, die Spannungen am vollkommen elastischen Stab ermitteln, so ist das Aufsuchen von Bemessungsformeln eine rein theoretische Angelegenheit. Da der erste Anteil der Navierschen Spannungsformel über den ganzen Stab konstant ist, müssen wir lediglich den Betrag des grössten Biegemomentes bestimmen. Darüber sind schon verschiedene Vorschläge gemacht worden. In der Schweiz ist es allgemein üblich, vom Momentenanteil M_0 infolge der Störkraft H auszugehen und diesen entsprechend einem Faktor zu vergrössern:

$$(I) \quad \sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_0}{W} \frac{1}{1 - \frac{nP}{P_E}}$$

Nun zeigt aber folgendes Beispiel, dass mindestens begrifflich die Formel (I) nicht zutreffen kann:

Beispiel: Es ist ein Pfosten eines Ständerfachwerkes zu bemessen, das in der Fensterebene eines Sheddaches liegt. Die Pfosten halten im untern Fünftelstpunkt die Fensterbrüstung. Es muss dort mit einer Windbelastung von $H = 500 \text{ kg}$ gerechnet werden (Bild 3).

gegeben: $l = 500 \text{ cm}$
 $a = 100 \text{ cm}$
 $b = 400 \text{ cm}$

berechnet:

$$P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \pi^2 \frac{2100 \cdot 327}{500^2} = 27 \text{ t}$$

$$n = 1,5 + 2,5 \frac{P}{P_E} = 1,5 + 2,5 \frac{7,9}{27} = 2,23$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \frac{nP}{P_E}} = \frac{1}{1 - \frac{2,23 \cdot 7,9}{27}} = 2,86$$

$$M_0 = H \frac{ab}{l} = 0,5 \frac{100 \cdot 400}{500} = 40 \text{ cmt}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \alpha = \frac{7,9}{20,8} + \frac{40}{69,7} \cdot 2,86 = 0,38 + 1,64 = 2,02 \text{ t/cm}^2 > \sigma_{zul}$$

Die Bemessung nach Formel (I) würde ein grösseres Profil ergeben.

Da wir das Biegemoment an allen Stabstellen mit dem konstanten Faktor α_1 multiplizieren, so erwarten wir insbesondere, dass die grösste Beanspruchung unter der Last zu suchen wäre und dass dort der Bruch eintreten werde. In Bild 3 ist nun die effektive Momentenfläche aufgetragen worden. Sie setzt sich im Fall des mit einer Einzellast H querbelasteten und unter P axial gedrückten Stabes aus zwei Anteilen $M(H)$ und $P \cdot y$ zusammen. Eine Aehnlichkeit der resultierenden Momentenfläche mit derjenigen infolge H ist nicht mehr vorhanden, und die grösste Beanspruchung kurz vor dem Bruch liegt nicht mehr unter der Last H . Demnach können diese Näherungswerte auch nicht sehr genau sein.

Dagegen stimmt Formel (I) genau, wenn überhaupt keine Querbelastung, sondern lediglich eine dem Knickfall entsprechende, sinusförmige Ausbiegung vorliegt. Wenn wir das Störmoment M_0 aus dem zweiten Term herausziehen und nur noch den Momentenanteil $P \cdot y (M_0)$ entsprechend vergrössern — wobei $y (M_0)$ die Ausbiegung infolge des Störmomentes allein bedeutet — so kommen wir der Wirklichkeit wesentlich näher:

$$(II) \quad \sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_0}{W} + \frac{P \cdot y (n M_0)}{W} \frac{1}{1 - \frac{nP}{P_E}}$$

Auf das oben beschriebene Beispiel bezogen, hiesse das:

$$M = H \frac{a}{l} \bar{x} + \frac{1}{1 - \frac{nP}{P_E}} P \cdot y (n H) = H \frac{a}{l} \bar{x} + \frac{P}{1 - \frac{nP}{P_E}} \frac{n H a \bar{x}}{6 E J l} (l^2 - a^2 - \bar{x}^2)$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten folgt der gefährdete Querschnitt \bar{x} aus $\frac{dM}{d\bar{x}} = 0$ zu

$$\bar{x}^2 = \frac{P_E - nP}{nP} \frac{2}{\pi^2} l^2 + \frac{1}{3} (l^2 - a^2) = (3,27 \text{ m})^2$$

Dieser \bar{x} -Wert oben eingesetzt, liefert uns das massgebende Biegemoment, und der Spannungsnachweis lautet demnach:

$$\sigma = \frac{7,9}{20,8} + \frac{33 + 53}{69,7} = 0,38 + 1,23 = 1,61 \text{ t/cm}^2$$

Diese Bemessungsmethode ist schon für verschiedene Spezialfälle verwendet worden ^{1) 2)}. Man kann aber zeigen, dass sie allgemein und über alle symmetrischen Fälle hinaus sehr gute Näherungen liefert.

Der tiefere Grund liegt darin, dass bei der sukzessiven Approximation die Integration als glättender und ausgleichender Prozess von der Belastungsfunktion bis zur Biegelinie infolge der Störmomente stets dieselben Randbedingungen wie die geschlossene Lösung des Knickproblems erfüllt. Wenn wir daher mit P_E allgemein den ersten kritischen Wert des betrachteten Knickfalles bezeichnen, so kann durch sukzessive Approximation das Zusatzmoment P_y sofort als Endwert einer geometrischen Reihe zu $P_y \frac{1}{1 - \frac{nP}{P_E}}$ angeschrieben werden.

Es ist unmöglich, alle vorkommenden Fälle numerisch zu

überprüfen. Um aber doch einen Eindruck von der Genauigkeit der Formel (II) zu geben, haben wir den in Bild 3 dargestellten Belastungsfall nach der Näherungsformel berechnet und mit den genauen Lösungswerten verglichen. Es dürfen dabei alle Werte H, P, E, J, a, b beliebig variieren. Man kann diese Fülle von Parametern zweckmässig zusammenfassen zu $P/P_E, a/b, H \cdot ab/l$. Wiederrum interessiert uns, um wieviel das Biegemoment $M_0 = H \cdot ab/l$ zu vergrössern ist, um dem Formänderungseinfluss Rechnung zu tragen. Diese dimensionslose Zahl α ist durch die in der Tabelle 1 zusammengestellten Ausdrücke bestimmt und in Bild 4 aufgetragen. Dazu wurde eine isodiametrische Darstellung mit dem Angriffspunkt der Last als Abszisse und nP/P_E als Ordinate gewählt. Dabei zeigt sich eine derart gute Uebereinstimmung der in Tabelle 1 zusammengestellten Näherungswerte mit den im nächsten Abschnitt exakt berechneten Ausdrücken, dass in Bild 4 praktisch nur noch die Unterschiede in den Gültigkeitsbereichen der Formeln zum Ausdruck kommen.

(Schluss folgt)

1) F. Stüssi, Baustatik I, Birkhäuser-Verlag, Basel 1946, 1953, «Krumme, querbelastete und exzentrisch gedrückte Stäbe», S. 334 u. f.
2) Kollbrunner und Meister, Knicken, Springer-Verlag, Berlin 1955, S. 65 u. f.

Werte α	M_{max} rechts der Einzellast Fläche 1	M_{max} unter Einzellast Fläche 2	M_{max} links der Einzellast Fläche 3
nach Näherung (II)	$\left[\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{9} \frac{nP}{P_E - nP} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right] \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2a}{3b} + \frac{2P_E - nP}{\pi^2} \frac{l^2}{P_E b^2}}$	$1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{nP}{P_E - nP} \frac{ab}{l}$	$\left[\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{9} \frac{nP}{P_E - nP} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) \right] \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a} + \frac{2P_E - nP}{\pi^2} \frac{l^2}{nP a^2}}$
analytische Lösung			
mit $\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{nP}{P_E}}$	$\frac{l \sin \omega a}{ab \omega \sin \omega l}$	$\frac{l \sin \omega a \sin \omega b}{ab \omega \sin \omega l}$	$\frac{l \sin \omega b}{ab \omega \sin \omega l}$

Tabelle 1

Schul- und Verwaltungszentrum für die berufliche Ausbildung in Stockholm

L. & C.-E. Geisendorf, Architekten S. I. A., Stockholm

DK 727.4

1. Voraussetzungen

Die Einführung einer allgemeinen, weitgreifenden Schulreform in Schweden hat einen erhöhten Bedarf an Berufsschulen zur Folge. Diese Reform legt u. a. fest, dass den Schülern im neunten, d. h. im letzten obligatorischen Schuljahr der Volksschule (der sog. Einheitsschule) die Möglichkeit geboten wird, sich mit den Anfangsgründen einer Berufsausbildung zu befassen. Gemäss den Berechnungen soll das Schuljahr 1958 einen Höhepunkt in der Zahl jener Schüler bringen, die das letzte Volksschuljahr absolvieren und bereits ihre erste

Ausbildung im zukünftigen Berufe erhalten. Nach diesem ersten Unterrichtsjahr können die jungen Leute ihre berufliche Ausbildung, die wechselweise in den Schulanstalten und im Berufsleben erfolgt, in der gewählten Richtung fortsetzen.

Die Stadt Stockholm hat in ihrem Ausbauprogramm u. a. vorgesehen: Vier neue Quartierschulen für das neunte Schuljahr der Einheitsschule, mehrere Erweiterungen der schon bestehenden männlichen Berufsschulen, sowie zwei Zentralschulen für weibliche Berufe, wo neben dem erwähnten Unterricht des neunten Schuljahres auch vollständige Ausbildung

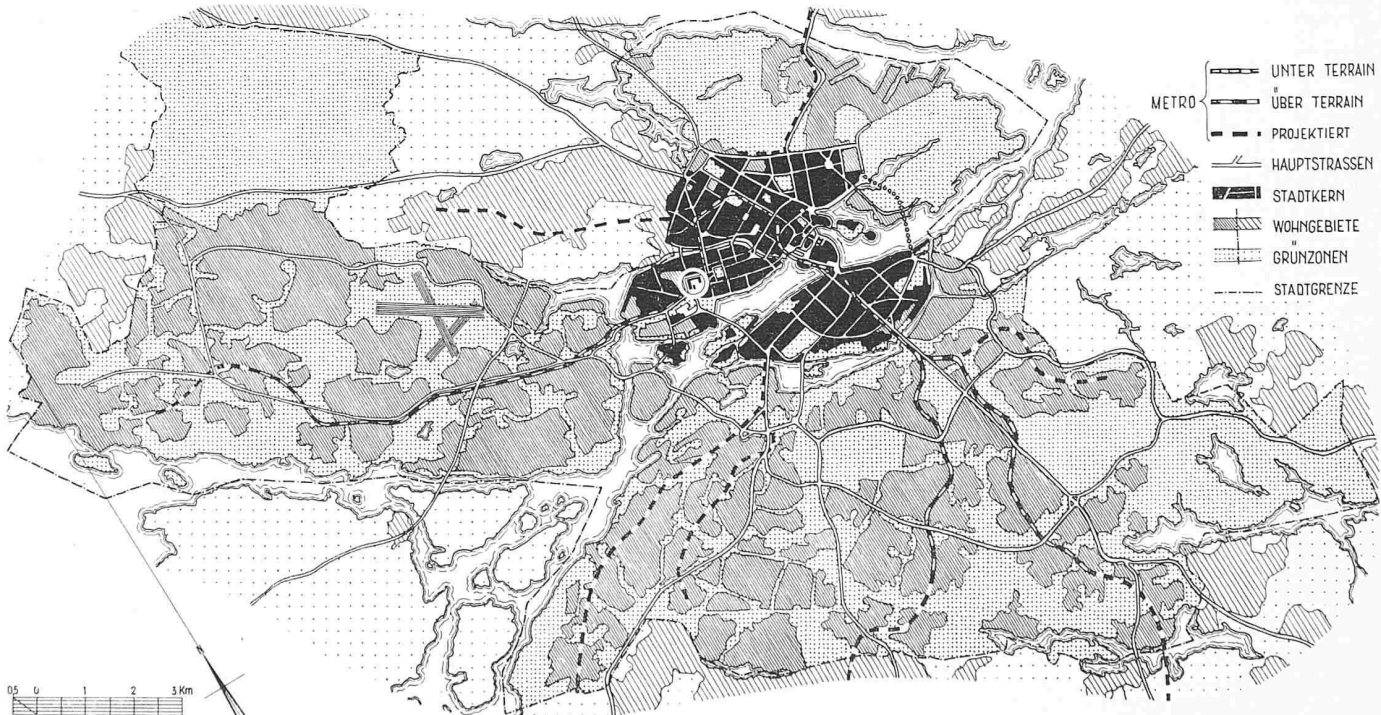


Bild 1. Stockholm, Uebersichtsplan 1:150 000. Im Kreis das hier dargestellte Schulzentrum in gutem Kontakt mit den öffentl. Verkehrsmitteln