

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 82 (1964)
Heft: 3

Artikel: Die Dreimomentengleichung für den horizontal belasteten zweistieligen Stockwerk-Rahmen und ihre Anwendung auf die Berechnung von Fassaden mit Windlasten
Autor: Steckner, Sebastian
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-67430>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Dreimomentengleichung für den horizontal belasteten zweistieligen Stockwerk-Rahmen und ihre Anwendung auf die Berechnung von Fassaden mit Windlasten

DK 624.072.333

Von Sebastian Steckner, Ingenieur, Basel

Einleitung

Bei höheren Gebäuden stellt sich dem Ingenieur das Problem der Aufnahme der Windkräfte. In der Regel sieht er sich dabei gezwungen, die Fassaden des Gebäudes zur Aussteifung mit heranzuziehen. Die statische Berechnung der in ihrer Ebene horizontal belasteten Fassade ist recht kompliziert und umfangreich, wenn es sich — wie in den meisten Fällen — um ein stockwerkrahmenartiges System handelt und die Schnittkräfte mit Hilfe eines allgemeinen Rahmenberechnungsverfahrens ermittelt werden. Sehr oft trifft man jedoch Fassadensysteme an, welche die Anwendung von einfacheren, speziellen Berechnungsmethoden zulassen. Zwei solche sehr häufig vorkommende Fassadentypen sollen hier behandelt werden: Der symmetrische zweistielige Stockwerkrahmen und der symmetrische mehrstielige Stockwerkrahmen mit betont breiten Aussenstielen. Die Berechnung beider Rahmenarten beruht auf der Dreimomentengleichung für den horizontal belasteten, symmetrischen zweistieligen Stockwerkrahmen, die daher im folgenden Abschnitt zunächst abgeleitet werden soll.

Ableitung der Dreimomentengleichung und Berechnung der Schnittkräfte des zweistieligen Stockwerkrahmens

Die im folgenden abgeleiteten Beziehungen gelten für den in Bild 1 dargestellten *symmetrischen zweistieligen Stockwerkrahmen*, der durch horizontale, an den Rahmenknoten angreifende Kräfte P_i belastet ist. Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte stabweise konstant sind und der Elastizitätsmodul für den ganzen Rahmen gleich ist. Der Einfluss sowohl der Querkräfte als auch der Normalkräfte in den Riegeln auf die elastischen Formänderungen bleibt unberücksichtigt; hingegen werden die Längenänderungen der Stiele infolge der Normalkräfte in Rechnung gestellt.

Die *Systemabmessungen* sowie die *Numerierung der Rahmenknoten und Stockwerke* gehen aus Bild 1 hervor. Die Kräfte werden nach dem Rahmenknoten bezeichnet, an dem sie angreifen. Es bedeuten:

F_m bzw. J_m die Fläche bzw. das Trägheitsmoment des Stielquerschnitts,

K_m das Trägheitsmoment des Riegelquerschnitts,
 J_c ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment.

Wir führen die folgenden *«reduzierten Stablängen»* ein:

$$h'_m = h_m \frac{J_c}{J_m} \quad , \quad h''_m = h_m \frac{J_c}{I_2 F_m} \quad , \quad l'_m = l \frac{J_c}{K_m}$$

Als *«Belastungsglieder»* definieren wir:

$$Q_m = \sum_0^{m-1} P_i \quad , \quad M_m = \sum_0^{m-1} P_i (e_i - e_m)$$

Q_m stellt die Querkraft und M_m das Biegemoment des stellvertretenden Kragträgers dar.

Die *Schnittkräfte* sind in Bild 2 in ihrer Wirkung auf den Rahmenknoten dargestellt; sie sind alle in positiver Richtung eingezeichnet. Es bedeuten:

N_m bzw. Q_m die Normalkraft bzw. die Querkraft des Stieles,

X_m bzw. Y_m das Fuss- bzw. Kopfmoment des Stieles,

V_m bzw. Z_m die Querkraft bzw. das Knotenmoment des Riegels.

Die Schnittkräfte der Stiele werden nach dem betr. Stockwerk, diejenigen der Riegel nach dem betr. Knotenpunkt bezeichnet.

Die einseitige Belastung des symmetrischen Stockwerkrahmens ($P \rightarrow$) kann in einen symmetrischen Anteil ($\frac{1}{2}P \rightarrow \leftarrow \frac{1}{2}P$) und in einen antisymmetrischen Anteil ($\frac{1}{2}P \rightarrow \frac{1}{2}P \rightarrow$) zerlegt werden. Ersterer erzeugt keine Biegemomente und braucht deshalb nicht in Betracht gezogen zu werden. Für den antisymmetrischen Lastanteil verschwinden die symmetrischen Schnittkräfte Biegemomente und Normalkraft in Riegelmitte; ebenso ist dort die vertikale Verschiebung gleich Null. Aus dem Gleichgewicht und dem antisymmetrischen Verlauf der Schnittkräfte folgt:

$$(1) \quad 2Q_m = Q_m \quad \text{und} \\ (2) \quad N_m l + 2X_m = M_m$$

Wir betrachten nun den in Bild 3 dargestellten, aus dem antisymmetrisch belasteten, deformierten Stockwerkrahmen herausgeschnittenen *einhuftigen Rahmen*. Die Schnittkräfte und die Kraft $\frac{1}{2}P_{m-1}$ stehen miteinander im Gleichgewicht. Der Rahmenknoten m bzw. $m-1$ hat sich um das Mass Δ_m bzw. Δ_{m-1} vertikal verschoben und gleichzeitig um den Winkel φ_m bzw. φ_{m-1} verdreht. Um ein statisch bestimmtes System zu erhalten, denken wir uns im Punkt m ein festes und im Punkt I ein horizontal bewegliches Lager. Wir fassen jetzt die Kräfte $\frac{1}{2}P_{m-1}$, Q_{m-1} , N_{m-1} , X_{m-1} und X_m als «Belastung» und die Kräfte Q_m , N_m und V_{m-1} als «Reaktionen» auf und erklären die vertikale Verschiebung Δ_{m-1} als «Senkung» des Auflagers I. Die Gleichgewichtsbedingung liefert hier in Verbindung mit Gleichung (1):

$$(3) \quad \frac{1}{2} P_{m-1} + Q_{m-1} = Q_m = \frac{1}{2} Q_m$$

Die Bilder 4 und 5 zeigen zum einhuftigen Rahmen von Bild 3 den Verlauf der Biegemomente M infolge der «Belastung» und der «virtuellen» Biegemomente \bar{M}_{m-1} bzw. \bar{M}_m infolge eines am Knotenpunkt $m-1$ bzw. m angreifenden virtuellen Momentes = 1.

Wir finden die *Knotendrehwinkel*:

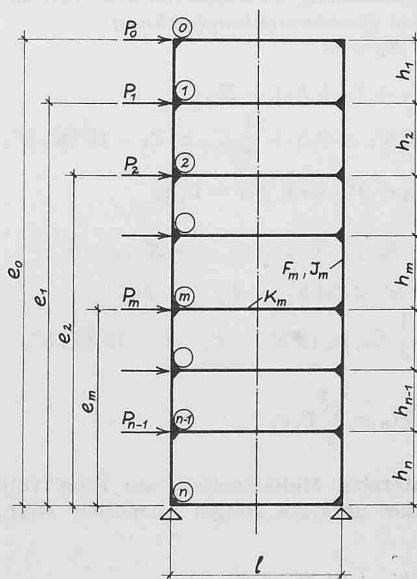


Bild 1. Symmetrischer zweistieliger Stockwerkrahmen

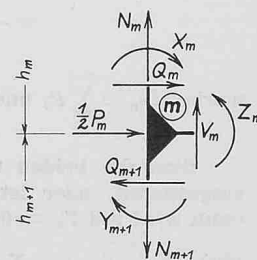


Bild 2. Schnittkräfte am Rahmenknoten

$$E J_c \varphi_m = \int \bar{M}_m M ds' + \frac{2 \Delta_{m-1}}{l} E J_c$$

$$(4) \quad E J_c \varphi_m = \frac{1}{2} \varrho_m h_m \left(\frac{1}{2} h'_m + \frac{1}{6} l'_{m-1} \right) + X_{m-1} \cdot \frac{1}{6} l'_{m-1} - X_m \left(h'_m + \frac{1}{6} l'_{m-1} \right) + \frac{2 \Delta_{m-1}}{l} E J_c$$

$$E J_c \varphi_{m-1} = \int \bar{M}_{m-1} M ds' + \frac{2 \Delta_{m-1}}{l} E J_c$$

$$(5) \quad E J_c \varphi_{m-1} = \frac{1}{2} \varrho_m h_m \cdot \frac{1}{6} l'_{m-1} + X_{m-1} \cdot \frac{1}{6} l'_{m-1} - X_m \cdot \frac{1}{6} l'_{m-1} + \frac{2 \Delta_{m-1}}{l} E J_c$$

Wir transponieren die Gleichung (5) von φ_{m-1} nach φ_m :

$$(5') \quad E J_c \varphi_m = \frac{1}{2} \varrho_{m+1} h_{m+1} \cdot \frac{1}{6} l'_m + X_m \cdot \frac{1}{6} l'_m - X_{m+1} \cdot \frac{1}{6} l'_m + \frac{2 \Delta_m}{l} E J_c$$

Nach Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $E J_c \varphi_m$ nach Gleichung (4) und (5') erhalten wir geordnet:

$$X_{m-1} \cdot l'_{m-1} - X_m (6 h'_m + l'_{m-1} + l'_m) + X_{m+1} \cdot l'_m + \frac{12 (\Delta_{m-1} - \Delta_m) E J_c}{l} + \frac{1}{2} \varrho_m h_m (3 h'_m + l'_{m-1}) - \frac{1}{2} \varrho_{m+1} h_{m+1} l'_m = 0,$$

wobei

$$\Delta_{m-1} - \Delta_m = \frac{N_m h_m}{F_m E} \quad \text{und} \quad N_m = \frac{\mathfrak{M}_m - 2 X_m}{l} \quad \text{nach Gl. (2)},$$

$$\text{also} \quad \frac{12 (\Delta_{m-1} - \Delta_m) E J_c}{l} = 12 (\mathfrak{M}_m - 2 X_m) h_m \frac{J_c}{l^2 F_m} = 12 \mathfrak{M}_m h''_m - 24 X_m h''_m;$$

damit lautet die Dreimomentengleichung:

$$(6) \quad X_{m-1} \cdot l'_{m-1} - X_m (6 h'_m + 24 h''_m + l'_{m-1} + l'_m) + X_{m+1} \cdot l'_m = -\frac{1}{2} \varrho_m h_m (3 h'_m + l'_{m-1}) + \frac{1}{2} \varrho_{m+1} h_{m+1} l'_m - 12 \mathfrak{M}_m h''_m$$

Für die praktische Anwendung interessieren uns noch die folgenden Spezialfälle der Dreimomentengleichung:

1. Für $m = 1$ ist $X_{m-1} = X_0 = 0$:

$$(6a) \quad -X_1 (6 h'_1 + 24 h''_1 + l'_0 + l'_1) + X_2 l'_1 = -\frac{1}{2} \varrho_1 h_1 (3 h'_1 + l'_0) + \frac{1}{2} \varrho_2 h_2 l'_1 - 12 \mathfrak{M}_1 h''_1$$

worin $\varrho_1 = P_0$, $\varrho_2 = P_0 + P_1$ und $\mathfrak{M}_1 = P_0 h_1$

2. Für $m = n$ ist $h_{m+1} = h_{n+1} = 0$ und $X_{m+1} = X_{n+1} = 0$:

$$(6b) \quad X_{n-1} l'_{n-1} - X_n (6 h'_n + 24 h''_n + l'_{n-1} + l'_n) = -\frac{1}{2} \varrho_n h_n (3 h'_n + l'_{n-1}) - 12 \mathfrak{M}_n h''_n$$

worin $\varrho_n = \sum_0^{n-1} P_i$ und $\mathfrak{M}_n = \sum_0^{n-1} P_i e_i$

Sind die beiden untersten Rahmenstiele am Fuss voll eingespannt, oder ist der unterste Riegel unendlich steif, dann wird mit $l'_n = 0$:

$$(6c) \quad X_{n-1} l'_{n-1} - X_n (6 h'_n + 24 h''_n + l'_{n-1}) = -\frac{1}{2} \varrho_n h_n (3 h'_n + l'_{n-1}) - 12 \mathfrak{M}_n h''_n$$

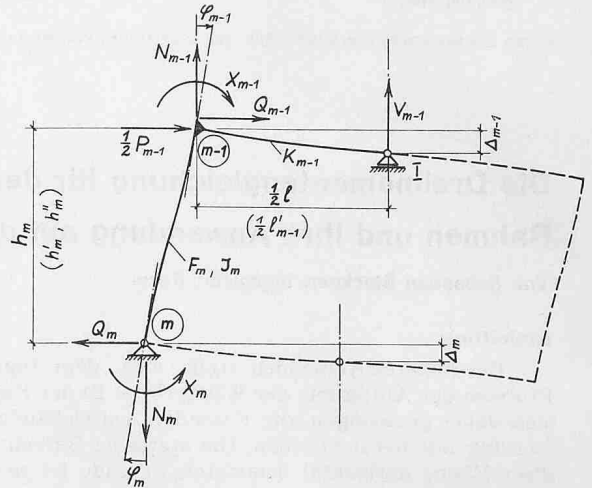


Bild 3. Einhütiger Rahmen

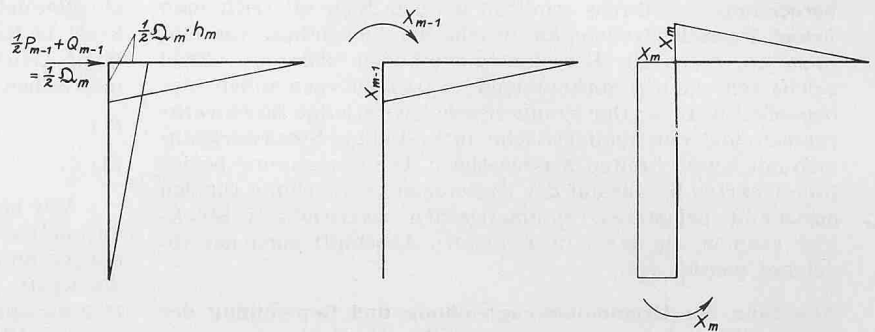


Bild 4. Biegemomente M infolge der «Belastung»

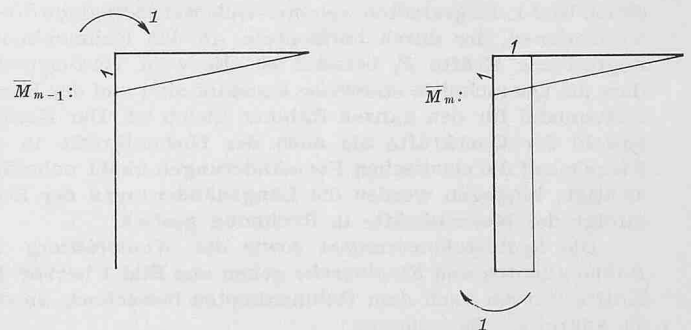


Bild 5. «Virtuelle» Biegemomente

Die Berechnung der Fussmomente X_i der Stiele erfolgt nun im Prinzip in gleicher Weise wie die Berechnung der Stützenmomente eines durchlaufenden Balkens mit Hilfe der Clapeyronschen Dreimomentengleichung. Wir stellen die Gleichung (6) nacheinander für $m = 1, 2, 3, \dots, n$ auf, — für $m = 1$ und $m = n$ gelten die Gleichungen (6a) und (6b) — und erhalten nach Auflösung des Gleichungssystems die Knotenmomente $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Für die Querkraft Q_m und die Normalkraft N_m des Stiels benutzen wir die Gleichungen (1) und (2):

$$(1') \quad Q_m = \frac{1}{2} \varrho_m$$

$$(2') \quad N_m = \frac{\mathfrak{M}_m - 2 X_m}{l}$$

Für das Kopfmoment Y_m finden wir, vgl. Bild 6:

$$Y_m = Q_m \cdot h_m - X_m, \quad \text{wobei} \quad Q_m = \frac{1}{2} \varrho_m$$

nach Gleichung (1)

$$(7) \quad Y_m = \frac{1}{2} \varrho_m h_m - X_m$$

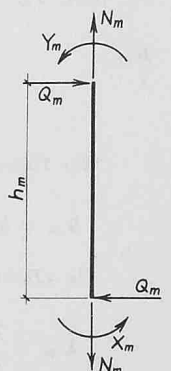


Bild 6. Schnittkräfte des Stiels

Die Gleichungen für das *Knotenmoment* Z_m und die *Querkraft* V_m des Riegels können an Hand der Bilder 2 und 3 abgelesen werden:

$$(8) \quad Z_m = X_m + Y_{m+1} \quad (9) \quad V_m = \frac{2 Z_m}{l}$$

Der zwei-stielige Fassadenrahmen mit kurzen Riegeln

Wir betrachten den in Bild 7 dargestellten, *symmetrischen zwei-stieligen Fassadenrahmen*. Die lichte Weite der Riegel ist im Verhältnis zur Breite der beiden Stiele gesehen sehr klein, zudem sind die Riegel sehr gedungen. Die der Dreimomentengleichung (6) zugrundeliegenden Voraussetzungen sind hier zum Teil nicht erfüllt:

1. Der Riegelquerschnitt kann wegen der gegenseitigen Durchdringung von Stiel und Riegel nicht als unveränderlich angesehen werden.

2. Der Einfluss der Querkräfte auf die elastische Verformung der Riegel ist wegen deren Gedungenheit nicht vernachlässigbar.

Neben den weiterhin geltenden Bezeichnungen des zwei-stieligen Stockwerkrahmens von Bild 1 bedeuten:

- A_m die Fläche des Riegelquerschnitts,
- d_m die Riegelhöhe bei rechteckigem Querschnitt,
- κ_m die Schubverteilungszahl des Riegelquerschnitts,
- a die lichte Weite des Riegels,
- b die halbe Stielbreite.

In Bild 8 ist ein durch die Schnittkräfte V und Z antisymmetrisch belasteter Riegel dargestellt mit den dazugehörigen Abbildungen der Querkraft Q , des Biegemomentes M und der elastischen Linie mit dem Endtangentialwinkel τ . Der Einfachheit halber sind die Indizes m weggelassen. Der Riegel ist auf der Strecke b , wo er den Stiel durchdringt, unendlich steif; zwischen den Stielen, auf der Strecke a , hat sein Querschnitt die Fläche A , das Trägheitsmoment K und die Schubverteilungszahl κ .

Wir berechnen den Endtangentialwinkel τ :

$$2 Z \tau = \frac{1}{E K} \int M^2 ds + \frac{\kappa}{G A} \int Q^2 ds,$$

worin E = Elastizitätsmodul und G = Schubmodul,

$$\tau = \frac{Z a^3}{6 E K l^2} \left(1 + \frac{12 E K \kappa}{G A a^2} \right)$$

Für die Elastizität des Riegels ist das Verhältnis $\tau : Z$ charakteristisch:

$$\frac{\tau}{Z} = \frac{a^3}{6 E K l^2} \left(1 + \frac{12 E K \kappa}{G A a^2} \right)$$

Setzt man für Eisenbeton $G = \frac{3}{7} E$, so erhält man als *Mass für die Elastizität des Fassadenriegels*:

$$(10) \quad \frac{\tau}{Z} = \frac{a^3}{6 E K l^2} \left(1 + \frac{28 K \kappa}{A a^2} \right)$$

Wir bestimmen nun das *Trägheitsmoment* K' des *Ersatzriegels*, dessen Querschnitt auf die ganze Länge l konstant ist und welcher bei Ausschluss der Querkraftverformung die gleiche Elastizität $\tau : Z$ besitzt wie der vorhandene Riegel. Wir setzen in Gleichung (10) $a = l$, $K = K'$ und den zweiten Ausdruck in der Klammer, der den Einfluss der Querkraftverformung darstellt, gleich Null:

$$(11) \quad \frac{\tau}{Z} = \frac{l}{6 E K'}$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten der Gleichungen (10) und (11) finden wir:

$$(12) \quad \frac{1}{K'} = \frac{1}{K} \left(\frac{a}{l} \right)^3 \left(1 + \frac{28 K \kappa}{A a^2} \right)$$

Wir können nun den Ersatzriegel an Stelle des vorhandenen Fassadenriegels in den Stockwerkrahmen einbauen, ohne etwas an dem elastischen Verhalten des Rahmens zu ändern. Bei Zugrundelegung des konstanten Trägheitsmo-

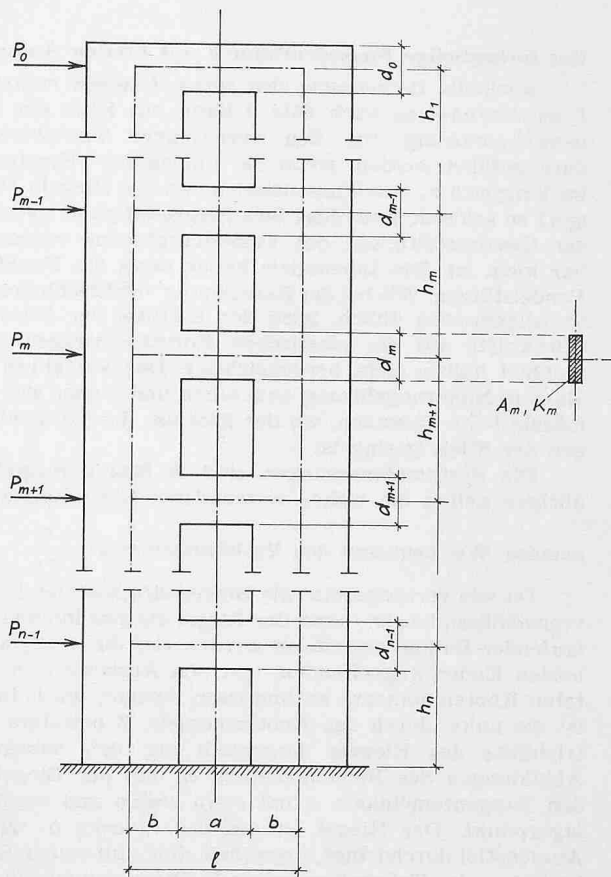


Bild 7. Zwei-stieliger Fassadenrahmen

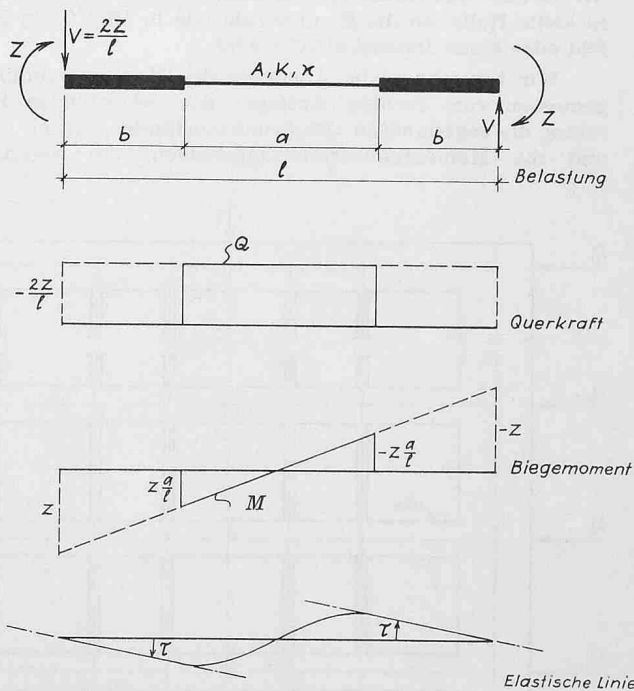


Bild 8. Antisymmetrisch belasteter Fassadenriegel

mentes K' des Ersatzriegels gelten die für den zwei-stieligen Stockwerkrahmen entwickelten Gleichungen. Für die *reduzierte Riegelstützweite* l' ist jetzt zu setzen:

$$(13) \quad l'_m = l \frac{J_c}{K'_m} = l \frac{J_c}{K_m} \left(\frac{a}{l} \right)^3 \left(1 + \frac{28 K_m \kappa_m}{A_m a^2} \right)$$

Bei rechteckigem Riegelquerschnitt ist mit $\frac{K_m}{A_m} = \frac{d_m^2}{12}$ und

$\kappa = 1,2$:

$$(13') \quad l'_m = l \frac{J_c}{K_m} \left(\frac{a}{l} \right)^3 \left(1 + 2,8 \frac{d_m^2}{a^2} \right)$$

Der mehrstielige Fassadenrahmen mit breiten Aussenstielen

Auch die Berechnung des *symmetrischen mehrstieligen Fassadenrahmens* nach Bild 9 kann mit Hilfe der Dreimomentengleichung für den zweistieligen Stockwerkrahmen durchgeführt werden, wenn die Innenstiele (Fensterpfeller) im Vergleich zu den Aussenstielen und den Riegeln (Brüstungen) so schlank sind, dass ihre Biegesteifigkeit gemessen an der Gesamtsteifigkeit des Fassadenrahmens vernachlässigbar klein ist. Die Innenstiele haben dann die Funktion von Pendelstützen. Wie bei der Berechnung von Eisenbetonrahmen im allgemeinen üblich, wird der Einfluss der Normal- und Querkkräfte auf die elastischen Formänderungen der Einfachheit halber nicht berücksichtigt. Das Verfahren ist also als eine Näherungslösung anzusehen und eignet sich nur für mässig hohe Fassaden, wo der Einfluss der Längenänderungen der Stiele gering ist.

Die Systemabmessungen sind in Bild 9 festgelegt; im übrigen gelten die bisher verwendeten Bezeichnungen sinngemäss. Wir benützen den Verhältnisswert $\alpha = \frac{a}{s_I}$

Da wie vorausgesetzt die Biegesteifigkeit der Innenstiele vernachlässigbar ist, kann der Riegel als gewöhnlicher durchlaufender Balken aufgefasst werden, der durch die an seinen beiden Enden angreifenden, von den Aussenstielen eingeleiteten Knotenmomente antisymmetrisch belastet wird. In Bild 10 ist die linke, durch das Knotenmoment Z belastete Symmetriehälfte des Riegels dargestellt mit den dazugehörigen Abbildungen des Biegemomentes M und der Biegelinie mit den Tangentenwinkeln τ und τ' im ersten und zweiten Auflagerpunkt. Der Riegel ist auf der Strecke b , wo er den Aussenstiel durchdringt, unendlich steif; auf seiner Restlänge besitzt er das Trägheitsmoment K . Biegemoment und Durchbiegung verschwinden in der Symmetrieaxe, also können wir dort ein momentenfreies Auflager annehmen; dabei spielt es keine Rolle, ob die Symmetrale wie in Bild 9 ein Riegelstiel oder einen Innenstiel schneidet.

Wir bezeichnen die Abstände der Momentennullpunkte, gemessen vom rechten Auflager des betreffenden Riegelstückes, die sogenannten «Festpunktabstände», mit c_I, c_{II} usw. und die Momentenweiterleitungszahlen, die sogenannten

«Festpunktzahlen», mit γ_I, γ_{II} usw. Zwischen Festpunktzahl und Festpunktstrecke besteht die Beziehung:

$$\gamma_I = \frac{c_I}{s_I - c_I}, \quad \gamma_{II} = \frac{c_{II}}{s_{II} - c_{II}} \quad \text{usw.}$$

Das Biegemoment an der Innenkante des Aussenstiels hat die Grösse:

$$(14) \quad Z' = Z \frac{a}{s_I} - \gamma_I Z \frac{b}{s_I} = Z \left\{ \alpha - \gamma_I (1 - \alpha) \right\}$$

Die Endtangentialwinkel des ersten Riegelstückes können nach Mohr berechnet werden; wir erhalten mit Z' nach Gleichung (14) und $\alpha = \frac{a}{s_I}$:

$$(15) \quad EK\tau = -\frac{\alpha^2 s_I Z}{6} \left\{ 2\alpha - \gamma_I (3 - 2\alpha) \right\} \quad \text{und}$$

$$(16) \quad EK\tau' = \frac{\alpha^2 s_I Z}{6} (3 - 2\alpha) - \frac{\gamma_I \alpha s_I Z}{6} (6 - 6\alpha + 2\alpha^2)$$

Für den Endtangentialwinkel des zweiten Riegelstückes, ebenfalls nach Mohr, finden wir:

$$(17) \quad EK\tau' = \frac{\gamma_I s_{II} Z}{6} (2 - \gamma_{II})$$

Indem wir die rechten Seiten der Gleichungen (16) und (17) gleichsetzen, bekommen wir die *Bestimmungsgleichung für die Festpunktzahl* γ_I :

$$(18) \quad \gamma_I = \frac{s_I \alpha^2 (3 - 2\alpha)}{s_I \alpha (6 - 6\alpha + 2\alpha^2) + s_{II} (2 - \gamma_{II})}$$

Die übrigen Festpunktzahlen des Riegels $\gamma_{II}, \gamma_{III}$ usw. können in bekannter Weise nach den Rechenvorschriften für den durchlaufenden Träger mit konstantem Trägheitsmoment ermittelt werden (vgl. Literatur über Festpunktverfahren). Für das an die Symmetrale angrenzende Riegelstück ist stets $\gamma = 0$. Im Beispiel der Bilder 9 und 10 ist $\gamma_{III} = 0$, $\gamma_{II} = s_{II} / 2 (s_{II} + s_{III})$, γ_I nach Gleichung (18).

Das für die *Elastizität des Riegels* charakteristische Verhältnis $\tau:Z$ ist bestimmt durch die Gleichung (15):

$$(15') \quad \frac{\tau}{Z} = \frac{s_I \alpha^2}{6 EK} \left\{ 2\alpha - \gamma_I (3 - 2\alpha) \right\}$$

Wir können nun die gleichen Überlegungen anstellen wie bei der Behandlung des zweistieligen Fassadenrahmens mit kurzen Riegeln. Für den *Ersatzriegel* gilt unverändert die Gleichung (11):

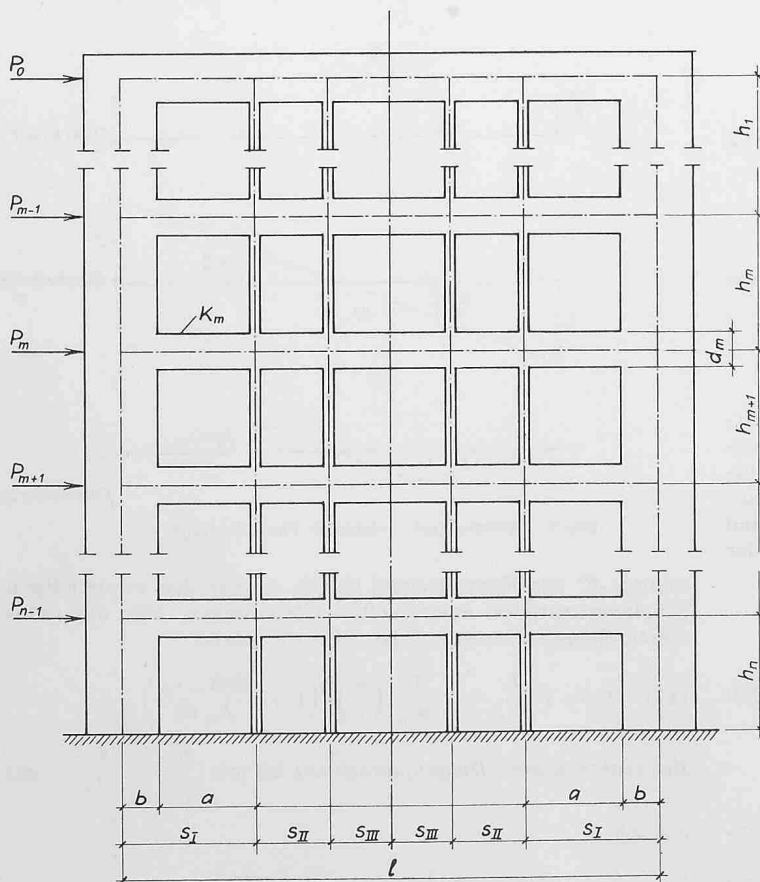


Bild 9. Mehrstieliger Fassadenrahmen

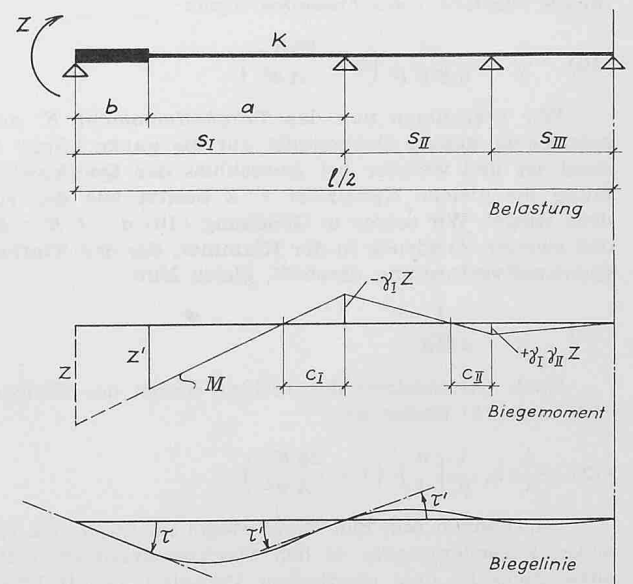


Bild 10. Belastete linke Riegelhälfte

$$(11) \quad \frac{\tau}{Z} = \frac{l}{6 E K'}$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten der Gleichungen (15') und (11) finden wir:

$$(19) \quad \frac{1}{K'} = \frac{s_I \alpha^2}{l K} \{2\alpha - \gamma_I (3 - 2\alpha)\}$$

Bei Verwendung des Ersatzriegels anstelle des vorhandenen Riegels können wir die für den zweiastigen Stockwerkrahmen entwickelte Dreimomentengleichung für die Berechnung der Fussmomente der Aussenstiele verwenden. Für die reduzierte Riegelstützweite l' ist jetzt zu setzen:

$$(20) \quad l'_m = l \frac{J_c}{K'_m} = s_I \frac{J_c}{K_m} \alpha^2 \{2\alpha - \gamma_I (3 - 2\alpha)\}$$

Da wir den Einfluss der Normalkräfte vernachlässigen, müssen wir in der Dreimomentengleichung

$$h''_m = h_m \frac{J_c}{l^2 F_m} = 0 \text{ setzen; damit lauten die Gleichungen}$$

(6), (6a) und (6c):

$$(6') \quad X_{m-1} \cdot l'_{m-1} - X_m (6h'_m + l'_{m-1} + l'_m) + X_{m+1} \cdot l'_m = -\frac{1}{2} \sum h_m (3h'_m + l'_{m-1}) + \frac{1}{2} \sum h_{m+1} l'_m$$

$$(6'a) \quad -X_1 (6h'_1 + l_0 + l_1) + X_2 l_1 = -\frac{1}{2} \sum h_1 (3h'_1 + l_0) + \frac{1}{2} \sum h_2 l_1 \quad \text{für } m = 1$$

$$(6'c) \quad X_{n-1} l'_{n-1} - X_n (6h'_n + l'_{n-1}) = -\frac{1}{2} \sum h_n (3h'_n + l'_{n-1})$$

für $m = n$ bei voller Einspannung der Aussenstiele.

Für die Querkräfte und Kopfmomente der Aussenstiele gelten unverändert die Gleichungen (1') und (7), für das am Riegelende angreifende Knotenmoment Z die Gleichung (8). Der weitere Momentenverlauf im Riegel ist gegeben durch die Festpunktzahlen γ_I, γ_{II} usw., und aus diesem lassen sich sowohl die Querkräfte im Riegel als auch die Normalkräfte in den Innen- und Aussenstielen bestimmen.

Zahlenbeispiel

Wir berechnen die Schnittkräfte des in Bild 11 dargestellten, achtstöckigen zweiastigen Fassadenrahmens.

Querschnittswerte:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0,20 \cdot 6,00 = 1,20 \text{ m}^2;$$

$$F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,30 \cdot 6,00 = 1,80 \text{ m}^2;$$

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0,15 \cdot 1,60 = 0,24 \text{ m}^2;$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 0,25 \cdot 1,60 = 0,40 \text{ m}^2;$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = \frac{1}{12} \cdot 0,20 \cdot 6,00^3 = 3,60 \text{ m}^4$$

$$J_5 = J_6 = J_7 = J_8 = \frac{1}{12} \cdot 0,30 \cdot 6,00^3 = 5,40 \text{ m}^4$$

$$K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = \frac{1}{12} \cdot 0,15 \cdot 1,60^3 = 0,0512 \text{ m}^4$$

$$K_4 = K_5 = K_6 = K_7 = \frac{1}{12} \cdot 0,25 \cdot 1,60^3 = 0,0853 \text{ m}^4$$

$$J_c = J_s = 5,40 \text{ m}^4 \text{ (gewählt)}$$

Reduzierte Stablängen:

$$h'_1 = h'_2 = h'_3 = h'_4 = 4,00 \frac{5,40}{3,60} = 6,00 \text{ m};$$

$$h'_5 = h'_6 = h'_7 = 4,00 \frac{5,40}{5,40} = 4,00 \text{ m};$$

$$h'_8 = 3,20 \frac{5,40}{5,40} = 3,20 \text{ m};$$

$$h''_1 = h''_2 = h''_3 = h''_4 = 4,00 \frac{5,40}{8,00^2 \cdot 1,20} = 0,281 \text{ m}$$

$$h''_5 = h''_6 = h''_7 = 4,00 \frac{5,40}{8,00^2 \cdot 1,80} = 0,188 \text{ m}$$

$$h''_8 = 3,20 \frac{5,40}{8,00^2 \cdot 1,80} = 0,150 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} l'_1 = l'_2 = l'_3 = l'_4 = &= 8,00 \frac{5,40}{0,0512} \left(\frac{2,00}{8,00} \right)^3 \left(1 + 2,8 \frac{1,60^2}{2,00^2} \right) = 36,8 \text{ m} \\ l'_5 = l'_6 = l'_7 = l'_8 = &= 8,00 \frac{5,40}{0,0853} \left(\frac{2,00}{8,00} \right)^3 \left(1 + 2,8 \frac{1,60^2}{2,00^2} \right) = 22,1 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{ nach Gleichung (13')}$$

Belastungsglieder:

$\mathfrak{D}_1 = 14 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_1 = 14 \cdot 4,00 = 56 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_2 = 14 + 14 = 28 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_2 = 56 + 28 \cdot 4,00 = 168 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_3 = 28 + 14 = 42 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_3 = 168 + 42 \cdot 4,00 = 336 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_4 = 42 + 14 = 56 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_4 = 336 + 56 \cdot 4,00 = 560 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_5 = 56 + 12 = 68 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_5 = 560 + 68 \cdot 4,00 = 832 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_6 = 68 + 12 = 80 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_6 = 832 + 80 \cdot 4,00 = 1152 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_7 = 80 + 12 = 92 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_7 = 1152 + 92 \cdot 4,00 = 1520 \text{ tm}$
$\mathfrak{D}_8 = 92 + 10 = 102 \text{ t}$	$\mathfrak{M}_8 = 1520 + 102 \cdot 3,20 = 1846 \text{ tm}$

Dreimomentengleichungen:

Berechnung des Klammerausdrucks $(6h'_m + 24h''_m + l'_{m-1} + l'_m)$ in Gleichung (6),

$$\text{für } m = 1, 2, 3 : 6 \cdot 6,00 + 24 \cdot 0,281 + 36,8 + 36,8 = 116,4$$

$$\text{für } m = 4 : 6 \cdot 6,00 + 24 \cdot 0,281 + 36,8 + 22,1 = 101,7$$

$$\text{für } m = 5, 6, 7 : 6 \cdot 4,00 + 24 \cdot 0,188 + 22,1 + 22,1 = 72,7$$

$$\text{für } m = 8 : 6 \cdot 3,20 + 24 \cdot 0,150 + 22,1 + 0 = 44,9$$

Berechnung des Klammerausdrucks $(3h'_m + l'_{m-1})$ in Gleichung (6),

$$\text{für } m = 1, 2, 3, 4 : 3 \cdot 6,00 + 36,8 = 54,8$$

$$\text{für } m = 5, 6, 7 : 3 \cdot 4,00 + 22,1 = 34,1$$

$$\text{für } m = 8 : 3 \cdot 3,20 + 22,1 = 31,7$$

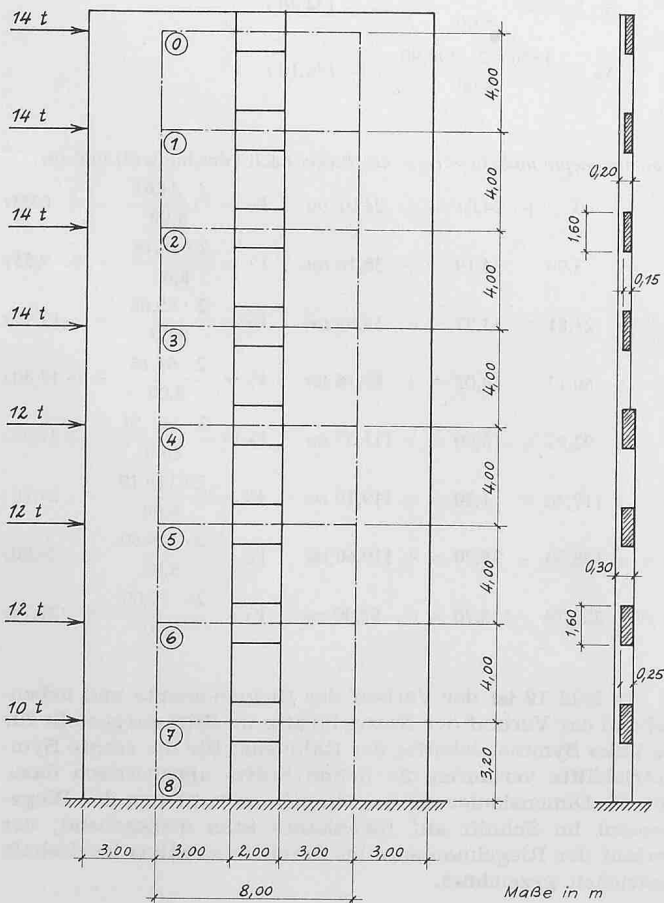


Bild 11. Achtstöckiger zweiastiger Fassadenrahmen

Aufstellung der Dreimomentengleichungen (6) bzw. (6a) bzw. (6c):

1. $-X_1 \cdot 116,4 + X_2 \cdot 36,8 =$
 $= -\frac{1}{2} 14 \cdot 4,00 \cdot 54,8 + \frac{1}{2} 28 \cdot 4,00 \cdot 36,8 - 12 \cdot 56 \cdot 0,281 = +338$
2. $X_1 \cdot 36,8 - X_2 \cdot 116,4 + X_3 \cdot 36,8 =$
 $= -\frac{1}{2} 28 \cdot 4,00 \cdot 54,8 + \frac{1}{2} 42 \cdot 4,00 \cdot 36,8 - 12 \cdot 168 \cdot 0,281 = -545$
3. $X_2 \cdot 36,8 - X_3 \cdot 116,4 + X_4 \cdot 36,8 =$
 $= -\frac{1}{2} 42 \cdot 4,00 \cdot 54,8 + \frac{1}{2} 56 \cdot 4,00 \cdot 36,8 - 12 \cdot 336 \cdot 0,281 = -1613$
4. $X_3 \cdot 36,8 - X_4 \cdot 101,7 + X_5 \cdot 22,1 =$
 $= -\frac{1}{2} 56 \cdot 4,00 \cdot 54,8 + \frac{1}{2} 68 \cdot 4,00 \cdot 22,1 - 12 \cdot 560 \cdot 0,281 = -5015$
5. $X_4 \cdot 22,1 - X_5 \cdot 72,7 + X_6 \cdot 22,1 =$
 $= -\frac{1}{2} 68 \cdot 4,00 \cdot 34,1 + \frac{1}{2} 80 \cdot 4,00 \cdot 22,1 - 12 \cdot 832 \cdot 0,188 = -2980$
6. $X_5 \cdot 22,1 - X_6 \cdot 72,7 + X_7 \cdot 22,1 =$
 $= -\frac{1}{2} 80 \cdot 4,00 \cdot 34,1 + \frac{1}{2} 92 \cdot 4,00 \cdot 22,1 - 12 \cdot 1152 \cdot 0,188 = -3987$
7. $X_6 \cdot 22,1 - X_7 \cdot 72,7 + X_8 \cdot 22,1 =$
 $= -\frac{1}{2} 92 \cdot 4,00 \cdot 34,1 + \frac{1}{2} 102 \cdot 3,20 \cdot 22,1 - 12 \cdot 1520 \cdot 0,188 = -6090$
8. $X_7 \cdot 22,1 - X_8 \cdot 44,9 =$
 $= -\frac{1}{2} 102 \cdot 3,20 \cdot 31,7 - 12 \cdot 1846 \cdot 0,150 = -8495$

Nach Auflösung des vorstehenden Gleichungssystems erhalten wir die Fussmomente der Stiele:

$$\begin{aligned} X_1 &= + 3,99 \text{ tm} & X_5 &= + 117,40 \text{ tm} \\ X_2 &= + 21,81 \text{ tm} & X_6 &= + 158,30 \text{ tm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= + 50,13 \text{ tm} & X_7 &= + 222,70 \text{ tm} \\ X_4 &= + 92,97 \text{ tm} & X_8 &= + 298,90 \text{ tm} \end{aligned}$$

Kopfmomente und Normalkräfte der Stiele nach Gleichung (7) und (2):

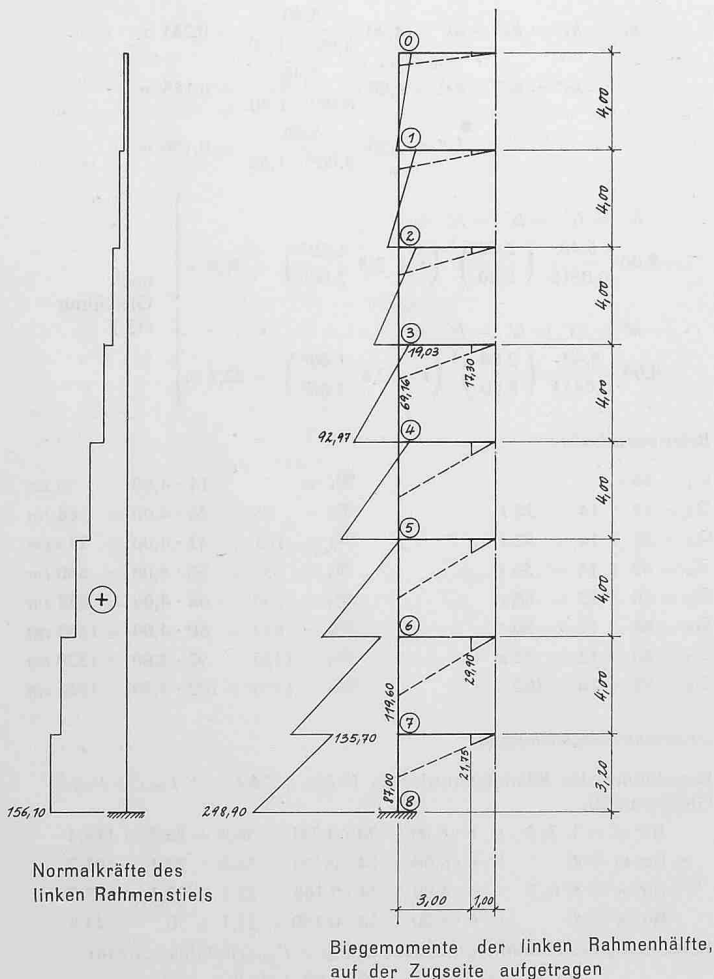
$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} 14 \cdot 4,00 - 3,99 = + 24,01 \text{ tm} \\ Y_2 &= \frac{1}{2} 28 \cdot 4,00 - 21,81 = + 34,19 \text{ tm} \\ Y_3 &= \frac{1}{2} 42 \cdot 4,00 - 50,13 = + 33,87 \text{ tm} \\ Y_4 &= \frac{1}{2} 56 \cdot 4,00 - 92,97 = + 19,03 \text{ tm} \\ Y_5 &= \frac{1}{2} 68 \cdot 4,00 - 117,40 = + 18,60 \text{ tm} \\ Y_6 &= \frac{1}{2} 80 \cdot 4,00 - 158,30 = + 1,70 \text{ tm} \\ Y_7 &= \frac{1}{2} 92 \cdot 4,00 - 222,70 = - 38,70 \text{ tm} \\ Y_8 &= \frac{1}{2} 102 \cdot 3,20 - 298,90 = - 135,70 \text{ tm} \\ N_1 &= \frac{56 - 2 \cdot 3,99}{8,00} = + 6,00 \text{ t} \\ N_2 &= \frac{168 - 2 \cdot 21,81}{8,00} = + 15,56 \text{ t} \\ N_3 &= \frac{336 - 2 \cdot 50,13}{8,00} = + 29,46 \text{ t} \\ N_4 &= \frac{560 - 2 \cdot 92,97}{8,00} = + 46,75 \text{ t} \\ N_5 &= \frac{832 - 2 \cdot 117,40}{8,00} = + 74,65 \text{ t} \\ N_6 &= \frac{1152 - 2 \cdot 158,30}{8,00} = + 104,40 \text{ t} \\ N_7 &= \frac{1520 - 2 \cdot 222,70}{8,00} = + 134,40 \text{ t} \\ N_8 &= \frac{1846 - 2 \cdot 298,90}{8,00} = + 156,10 \text{ t} \end{aligned}$$

Knotenmomente und Querkräfte der Riegel nach Gleichung (8) und (9):

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0 + 24,01 = + 24,01 \text{ tm} & V_0 &= \frac{2 \cdot 24,01}{8,00} = + 6,00 \text{ t} \\ Z_1 &= + 3,99 + 34,19 = + 38,18 \text{ tm} & V_1 &= \frac{2 \cdot 38,18}{8,00} = + 9,55 \text{ t} \\ Z_2 &= + 21,81 + 33,87 = + 55,68 \text{ tm} & V_2 &= \frac{2 \cdot 55,68}{8,00} = + 13,92 \text{ t} \\ Z_3 &= + 50,13 + 19,03 = + 69,16 \text{ tm} & V_3 &= \frac{2 \cdot 69,16}{8,00} = + 17,30 \text{ t} \\ Z_4 &= + 92,97 + 18,60 = + 111,57 \text{ tm} & V_4 &= \frac{2 \cdot 111,57}{8,00} = + 27,90 \text{ t} \\ Z_5 &= + 117,40 + 1,70 = + 119,10 \text{ tm} & V_5 &= \frac{2 \cdot 119,10}{8,00} = + 29,80 \text{ t} \\ Z_6 &= + 158,30 - 38,70 = + 119,60 \text{ tm} & V_6 &= \frac{2 \cdot 119,60}{8,00} = + 29,90 \text{ t} \\ Z_7 &= + 222,70 - 135,70 = + 87,00 \text{ tm} & V_7 &= \frac{2 \cdot 87,00}{8,00} = + 21,75 \text{ t} \end{aligned}$$

In Bild 12 ist der Verlauf der Biegemomente und nebstehend der Verlauf der Normalkräfte im Stiel dargestellt für die linke Symmetriehälfte des Rahmens; für die rechte Symmetriehälfte verlaufen die Schnittkräfte antimetrisch dazu. Für die Dimensionierung des Riegels ist natürlich das Biegemoment im Schnitt auf Innenkante Stiel massgebend; der Verlauf der Riegelmomente im Bereich des Stiels ist deshalb gestrichelt gezeichnet.

Adresse des Verfassers: Ing. Sebastian Steckner, Neu-Allschwil BL, Dürrenmattweg 66.



Normalkräfte des linken Rahmenstiels

Biegemomente der linken Rahmenhälfte, auf der Zugseite aufgetragen

Bild 12. Schnittkräfte des achtstöckigen zwei-stieligen Fassadenrahmens