

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Band:** 88 (1970)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Torsion und Biegung von Stahlbetonbalken: Vortrag  
**Autor:** Lampert, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84419>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Torsion und Biegung von Stahlbetonbalken

DK 624.072:539.384:539.385

Von Paul Lampert, dipl. Ing., Institut für Baustatik, ETH Zürich

Vortrag, gehalten an der Studientagung der FGBH über aktuelle Ingenieurprobleme vom 21. und 22. November 1969 in Zürich

### 1. Einleitung

Seit etwa 1960 nahmen die Anstrengungen zur Erforschung des Bruchverhaltens von Stahlbetonbalken und vorgespannten Betonträgern unter Berücksichtigung einer Torsionsbeanspruchung im Vergleich zu früheren Jahren stark zu. Diese Entwicklung ergab sich einerseits durch neue Konstruktionsformen und Lagerungsarten und andererseits durch eine Verschärfung der Belastungsannahmen, die exzentrische Belastungen massgebend werden lassen. Der projektierende Ingenieur wird deshalb vor Probleme gestellt, zu deren Lösung er die Kenntnis des Bruchverhaltens für kombinierte Beanspruchungen benötigt. Auf diesem Gebiet bestehen vor allem hinsichtlich der Torsionsbeanspruchung einige Lücken, die durch ein Forschungsprogramm «Torsion-Biegung-Querkraft» des Instituts für Baustatik an der ETH Zürich, unter Leitung von Prof. Dr. B. Thürlimann, geschlossen werden sollen.

Dieser Aufsatz orientiert über die Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Forschung der Jahre 1965 bis 1969 auf dem Gebiete der «Reinen Torsion» und der Kombination «Torsion und Biegung». Entsprechend werden, nach der Erläuterung der Problemstellung, die Versuchsergebnisse in «Reiner Torsion» und «Torsion und Biegung» besprochen. Das daraus entstehende allgemeine, theoretische Bruchmodell, ein räumliches Fachwerk, wird kurz skizziert, und abschliessend wird versucht, am einfachen Spezialfall des quadratischen Fachwerks mit 45°-Diagonalen die Wirkungsweise dieses Modells auch analytisch zu erfassen.

Es ergibt sich aus dieser Inhaltsübersicht, dass von Verformungen nicht die Rede sein wird. Diese sollen vorderhand mit der Bemerkung beiseite gelegt werden, dass der Abfall der Torsionssteifigkeit nach der Rissbildung grösser ist als derjenige der Biegesteifigkeit, was natürlich auf eine richtige Bemessung auch Folgen hat.

### 2. Problemstellung

In der Vergangenheit wurde immer wieder versucht, von den Bruchbedingungen unarmerter Balken auf die Verhältnisse bei armierten Trägern zu schliessen [1]. Dies führte zu Bruchbedingungen des Betons unter kombinierter Beanspruchung und deshalb oft zur Feststellung, dass die Armierung beim Lastfall Torsion keine wesentliche Erhöhung der Traglast über die Risslast hinaus bewirke.

Diese Ideen sind aus der neuesten Literatur verschwunden, wie sie z. B. in der Publikation «Torsion of Structural Concrete» des American Concrete Institute [2] zusammengestellt sind. Es hat sich die Auffassung durchgesetzt, dass der ungerissene und der gerissene armierte Balken zwei ganz verschiedene Tragsysteme darstellen, die zwei verschiedene Betrachtungsmodelle erfordern. In Bild 1 sind diese beiden Modelle am Beispiel des Lastfalls Torsion näher erläutert. Im ungerissenen Zustand werden die St. Venantschen Schub-

spannungen sowie die resultierenden Hauptspannungen am homogenen, isotropen Balken bestimmt. In der eingelegten Bewehrung entstehen bis zur Risslast praktisch keine Spannungen.

Nach dem Auftreten der ersten Risse entsteht allmählich ein zweites Tragmodell, dasjenige des gerissenen Zustandes, das sich vom ungerissenen grundlegend unterscheiden kann. In der Bewehrung entstehen nun Zugspannungen, im Beton Druckspannungen, die anfänglich ungefähr parallel zu den Rissen gerichtet sind. Es entsteht also ein Modell, bei welchem der Armierung erhöhte Bedeutung zukommt, während der Beton, wenigstens bei unterarmierten Balken, nur noch eine unwesentliche Rolle spielt.

Der Übergangsbereich zwischen den beiden Modellen kann sehr verschieden aussehen. Während sich z. B. beim Biegebalken das gerissene Modell durch das allmähliche Hochwandern der Biegerisse verhältnismässig langsam bildet, erfolgt der Übergang beim Torsionsbalken rascher, da die beiden Modelle stark voneinander abweichen. Liegt die Risslast nahe der Fließlast, so ist es möglich, dass das gerissene Modell, welches nur bis zur Fließlast gültig bleibt, nicht mehr sauber beobachtet werden kann.

Mit dem Fließbeginn nehmen die Verformungen in wachsendem Masse im Vergleich zur Belastung stärker zu, um schliesslich, durch Erreichen von bestimmten Verformungsgrenzen, den eigentlichen Bruch auszulösen. Der dazugehörigen Last oder der unter Umständen schon vor dem eigentlichen

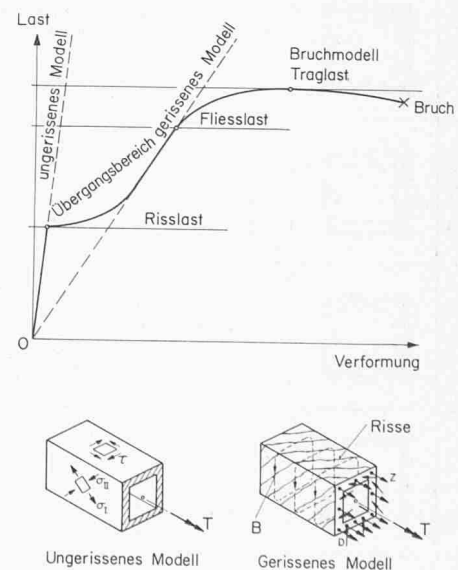


Bild 1. Betrachtungsmodelle eines unarmerierten Balkens für den Lastfall Torsion

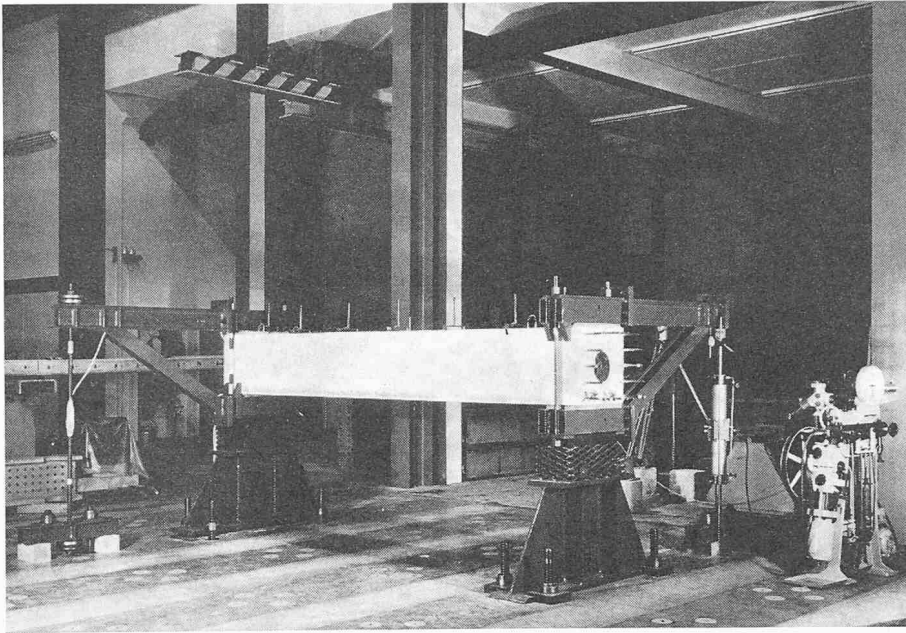


Bild 2. Versuchsanlage «Reine Torsion»

Bruch auftretenden Maximallast (Bild 1), der Traglast, liegt ein Tragmodell zugrunde, das als Bruchmodell bezeichnet wird. Ein wesentliches Ziel der experimentellen Forschung bildet das Finden eines möglichst zutreffenden, theoretischen Bruchmodells, um auch über den Zeitpunkt des Versagens einer Konstruktion Gewissheit zu erlangen.

In der Wahl dieses Bruchmodells unterscheiden sich nun die verschiedenen Autoren auf dem Gebiete der Torsion und Biegung [2]. Da viele ausländische Versuche an relativ kleinen und zum Teil unzureichend bewehrten Versuchskörpern

durchgeführt wurden, prüfte das Institut für Baustatik an der ETH Zürich in den Jahren 1965 bis 1969 u. a. 11 Balken in reiner Torsion und 8 Balken unter dem kombinierten Lastfall Torsion-Biegung. Diese Versuche an Stahlbeton- und Spannbetonbalken grösseren Querschnitts wurden in detaillierten Versuchsberichten [3], [4], [5] kommentiert. Die Ergebnisse sollen im folgenden kurz zusammengefasst werden.

### 3. Torsionsversuche

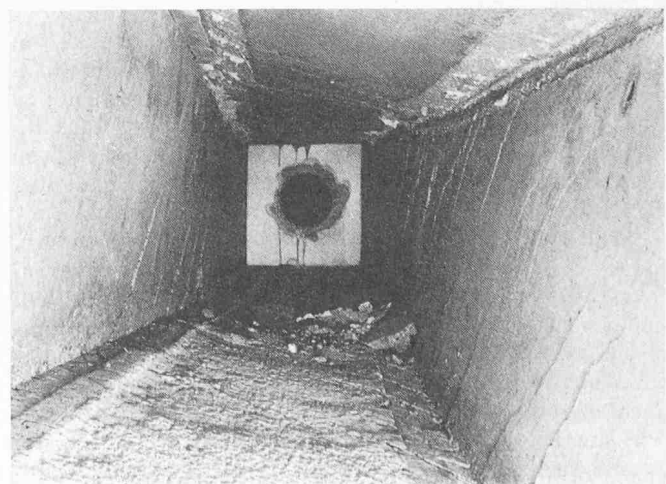
Einen Überblick über die Versuchsanlage «Reine Torsion» vermittelt Bild 2. Am Anfang und am Ende jeder Laststufe wurde die aufgebrauchte Last am Pendelmanometer der Zugpresse und am Verankerungsstab gemessen. Dazwischen wurde die Verformung konstant gehalten (Dehngeschwindigkeit null), was einen Lastabfall zur Folge hatte, und die Stahl- und Betondehnungen, die Verdrehungen und Durchbiegungen, die Rissbreiten und Schiebungen gemessen.

In Bild 3 sind die 11 Versuchskörper des Lastfalls «Reine Torsion» zusammengestellt. Ersichtlich sind, neben der Querschnittsform und Bewehrung, vor allem die Hauptvariablen. So wurden insbesondere verschiedene Querschnittsformen, verschiedene Längsbelegungsanordnungen, verschieden starke Bewehrungen der Kastenwände und der Lastfall

Balken	Querschnitt	Langsarmierg. Bügelarmierg.	Hauptvariable	Balken	Querschnitt	Langsarmierg. Bügelarmierg.	Hauptvariable
T <sub>0</sub>		16 Ø 16 Ø 16, s = 11cm	Armierungsgehalt hoch	T <sub>5</sub>		20 Ø 8 Ø 10, s = 11cm	Rechteck-Querschnitt
T <sub>1</sub>		16 Ø 12 Ø 12, s = 11cm	Grund-Querschnitt	T <sub>6</sub>		24 Ø 8 Ø 8, s = 7cm	T-Querschnitt
T <sub>2</sub>			Längsbelegung	T <sub>7</sub>		16 Ø 10 Ø 8/10, s = 11cm	Ungleiche Bügelarmierg.
T <sub>3</sub>			Biege-Armierung	T <sub>8</sub>		14 Ø 10 Ø 8/10, s = 11cm	Ungleiche Längs- und Bügelarmierg.
T <sub>4</sub>			Voll-Querschnitt	T <sub>9</sub>		4 Ø 10 Ø 10, s = 11cm	Vorspannung
T <sub>4S</sub>			Kurz-Versuch		4 Litzen Ø 1/2"	Ø 10, s = 11cm	zentrisch nicht injiziert
Versuchsbericht Nr. 6506-2 [3]				Versuchsbericht Nr. 6506-4 [5]			

Bild 3. Versuchskörper «Reine Torsion»

Bild 4. Innenaufnahme Balken T<sub>2</sub> (räumliches Fachwerk)



Vorspannung untersucht. Im folgenden werden die wesentlichsten Versuchsergebnisse zusammengefasst.

Die Wirkungsweise der beobachteten Bruchmodelle entsprach derjenigen eines räumlichen Fachwerks (Bild 4). Über den gesamten Prüfbereich bildeten sich spiralförmig um den Balken laufende Risse und Schiebungen. Schliesslich trat der Bruch nach dem Fliesen der Armierung auf den massgebenden Seiten an zufälliger Stelle ein, weil infolge grosser Verdrehung und Schiebung die Druckdiagonalen zermalmt wurden (Bild 5). Diese Bruchart wurde als Schiebungsbruch definiert. Sie trat bei allen Balken auf, mit Ausnahme des überarmierten Versuchskörpers  $T_0$ , der plötzlich, vor dem Fliesen der Armierung, durch Versagen der Betondruckdiagonalen (schiefer Druckbruch) zugrunde ging.

Die Neigung der Druckdiagonalen zur Balkenachse beim Bruch ergab sich aus der Gleichgewichtsbedingung einer Kastenwand; sie betrug im allgemeinen nicht  $45^\circ$ . Die Druckdiagonale stellte sich so ein, dass, ungeachtet vorhandener Risse, sowohl die Bügel wie auch die Längseisen ihre Fliessspannung erreichen konnten. Aus Bild 6 ist ersichtlich, wie gross der Einfluss dieser Umlagerung der Kräfte von den Längseisen auf die Bügel beim Balken  $T_3$  war, der auf der massgebenden Oberseite eine zu starke Bügelarmierung aufwies. Bei den volumengleich armierten Balken  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_4$ , bei welchen keine Umlagerung stattfand, stimmte für reine

Bild 5. Bruchbereich Balken  $T_3$  in der Abwicklung

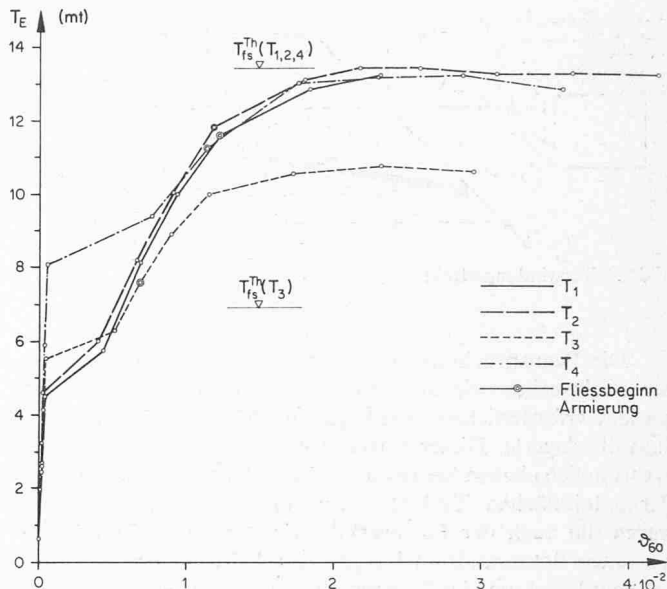
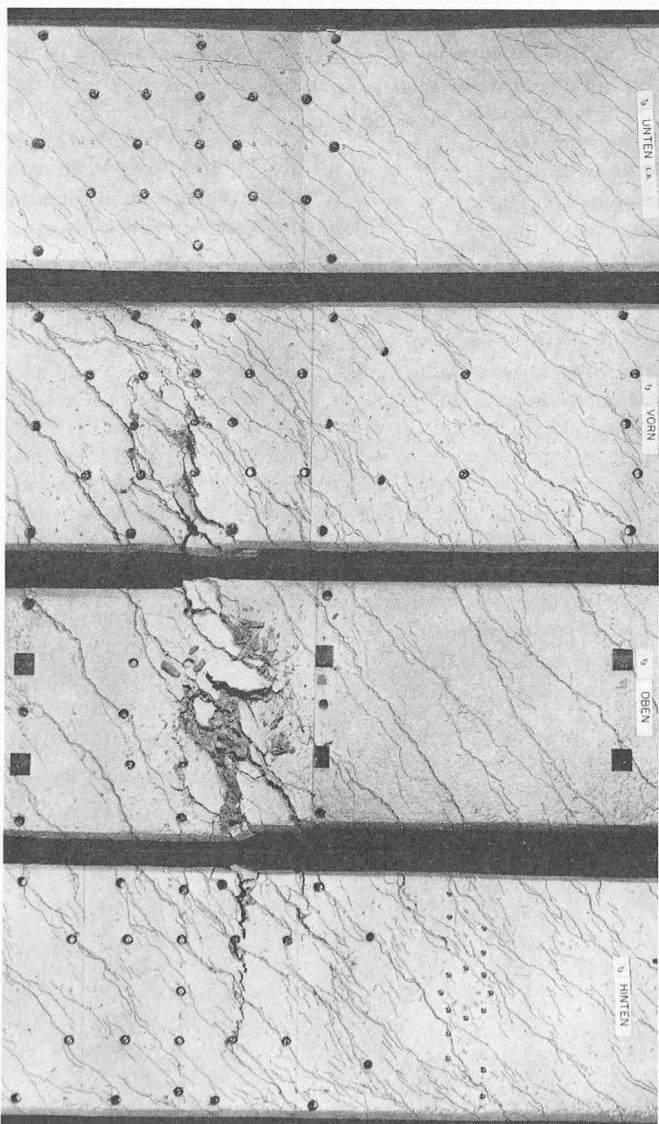


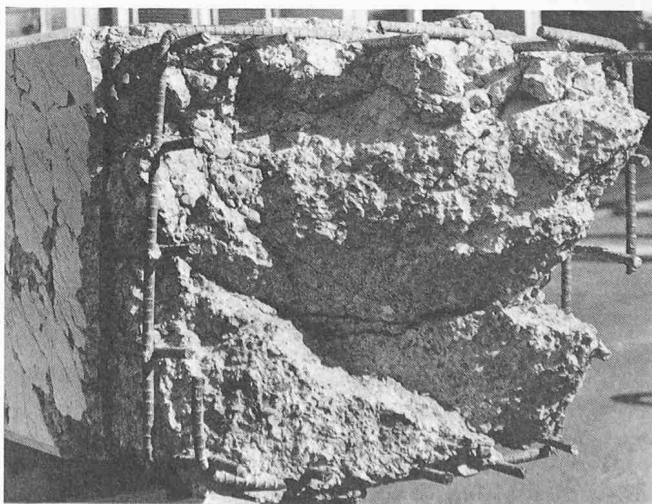
Bild 6. Verdrehungen der Balken  $T_1$  bis  $T_4$

Torsion der Versuchswert mit dem Flieissmoment des  $45^\circ$ -Fachwerks überein, mit jenem Modell also, welches schon Mörsch und Rausch [6] vor rund 50 Jahren benutzten.

In Bild 6 ist ebenfalls ersichtlich, dass sich die Konzentration der Längseisen in die Querschnittsecken (Balken  $T_2$ ) für das Verformungsverhalten vorteilhaft auswirkte, da die Verankerung der Betondruckdiagonalen so einwandfrei war, dass der Schiebungsbruch hinausgezögert wurde. Für die Traglast ergab sich gegenüber einer gleichmässigen Verteilung der Längseisen (Balken  $T_1$ ) kein Unterschied, womit zumindest gezeigt ist, dass nicht nur die gleichmässig über den Umfang verteilte Längsarmierung zur Torsionsaufnahme hinzugezogen werden kann.

Ferner ist in Bild 6 ersichtlich, dass der Vollquerschnitt  $T_4$ , mit Ausnahme der höheren Risslast, kein vom Kastenquerschnitt  $T_1$  abweichendes Tragverhalten aufwies. Damit ist erwiesen, dass auch bei Vollquerschnitten der in der Ebene des Armierungskorbes liegende Beton die Druckdiagonalen aufbaut, während der Kern keinen Beitrag an die Traglast leistet. In Bild 7 ist der Vollquerschnitt im Bruchbereich auseinandergezogen worden; der Kern ist noch erstaunlich kompakt, während die äussere Schale deutlich von der Beanspruchung gezeichnet ist.

Bild 7. Bruchfläche Balken  $T_4$



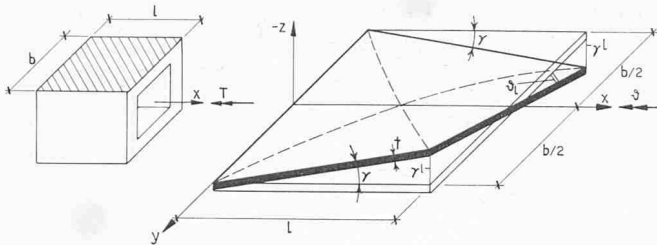


Bild 8. Verwindungseffekt

Die Beanspruchung der Betondruckdiagonalen wich von der Fachwerktheorie insofern ab, als sich der zum Gleichgewicht erforderlichen Druckkraft noch ein Krümmungseinfluss überlagerte. Dieser entstand durch eine Verwindung der ursprünglich ebenen Seitenwände des Balkens in hyperbolische Paraboloidflächen (Bild 8). Durch diesen Verwindungseffekt waren die nach der Fachwerktheorie unerwartet hohen, gemessenen Betonrandstauchungen zu erklären. Diese Tatsache verdient Beachtung im Zusammenhang mit der Festlegung einer oberen Schubspannungsgrenze zur Vermeidung eines schiefen Druckbruches der Betondiagonalen, die für Torsion aus diesem Grunde sicher nicht höher als diejenige für Biegeschub liegen darf.

Als äusserst interessant erwies sich der zentrisch vorgespannte Balken  $T_9$ , eigentlich ein Modell eines Brückenquerschnittes im Bereich des Biegemomenten-Nullpunktes. Dieser Versuch ergab, dass ein normal vorgespanntes Vorspannkabel wie eine schlaffe Armierung mit hoher Streckgrenze betrachtet werden kann, da die über die Initialdehnung hinaus verbleibende Dehnung bis zur Streckgrenze etwa derjenigen eines schlaffen Armierungstahles der Gruppe III der SIA-Norm 162 (1968) entspricht. Dies bedeutet, dass in Zukunft auch die Vorspannarmierung bei der Bemessung der Torsionslängsbewehrung berücksichtigt werden kann.

Instruktiv und wohl der schlagendste Beweis für das räumliche Fachwerk war die Wirksamkeit der in Querschnittsmitteln angeordneten Längsarmierung beim Balken  $T_9$ . Entsprechend der Zugbeanspruchung der Ecklängseisen verlängert sich der Balken unter einer Torsionsbeanspruchung; dieser Verlängerung kann in der Balkenachse ebensogut ein Widerstand entgegengebracht werden. Zudem werden in den Querschnittsecken, zumindest bei konstantem Torsionsmoment, die Längseisen für das Gleichgewicht nicht benötigt (Bild 9), da sich die Längskomponenten der Diagonalkräfte  $D$  gegenseitig aufheben, während die Querkomponenten durch die Bügel  $B$  aufgenommen werden müssen. Die Längskraft wird deshalb bei den Einleitungsstellen des Torsionsmomentes aufgebaut, also z. B. am Balkenende, wo die Diagonalen durch gut verankerte,

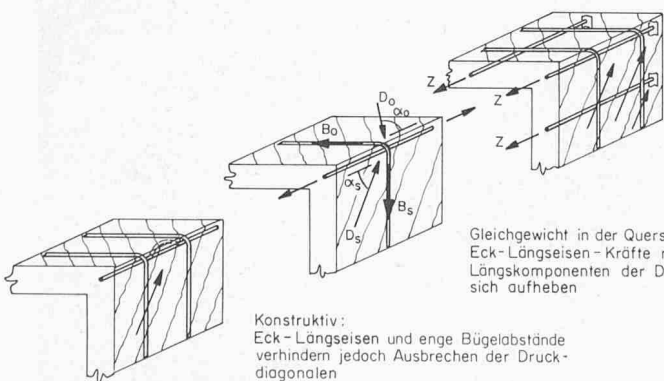


Bild 9 (oben). Wirkungweise der Torsions-Längsarmierung

Bild 10 (rechts). Bruchbereich Balken  $T_9$  (Verankerung Druckdiagonale)

u. U. sogar gleichmässig verteilte, Längseisen zurückgehalten werden müssen.

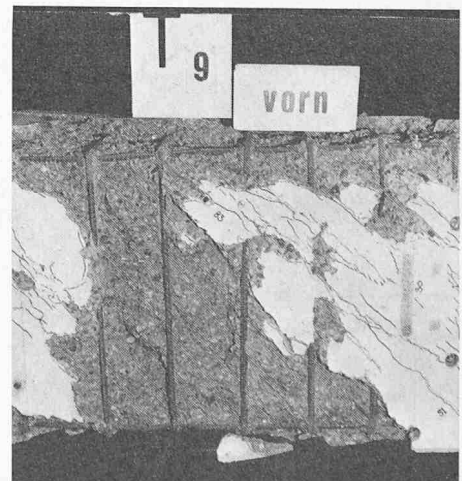
Die Eck-Längseisen dürfen jedoch auf keinen Fall weggelassen werden. Sie bilden die eigentliche Verankerung der Druckdiagonalen. Zusammen mit den Bügeln und deren Abstand ist die Eck-Längsarmierung verantwortlich dafür, dass die Druckdiagonale nicht zwischen zwei Bügeln frühzeitig ausbrechen kann. In Bild 10 wird anhand des Bruchbereiches des Balkens  $T_9$  diese abstützende Wirkung der Eck-Längseisen durch deren girlandenförmigen Verlauf bestätigt.

#### 4. Torsions-Biege-Versuche

Einen Überblick über die Versuchsanlage «Torsion und Biegung» vermittelt Bild 11. Die durchgeführten Messungen und die Messtechnik entsprachen den Versuchen in reiner Torsion (siehe Kapitel 3). Die abgebildeten Personen vermitteln einen Begriff von der Grösse der Versuchsbalken. Grosse Versuchsquerschnitte sollten immer dann angestrebt werden, wenn die Ergebnisse nachher auf noch grössere Balken (z. B. Brückenquerschnitte) extrapoliert werden müssen.

In Bild 12 sind die 8 Versuchskörper des kombinierten Lastfalles «Torsion und Biegung» zusammengestellt. Zur Abklärung der Interaktionsverhältnisse wurden insbesondere das Verhältnis von Torsions- zu Biegemoment und die Armierungsanordnung variiert, wobei die Querschnittsform der Torsionsversuche (Bild 3) übernommen wurde. Wiederum wurde ein Vergleichsversuch eines Vollquerschnittes durchgeführt und die Wirkungsweise einer exzentrischen Vorspannung untersucht. Im folgenden werden die wesentlichsten Versuchsergebnisse zusammengefasst.

Das bei den reinen Torsionsversuchen beobachtete Fachwerkmodell wurde bei der Kombination mit Biegung bestätigt. Wiederum bildeten sich spiralförmig um den Balken laufende Risse, wobei schliesslich bei allen Balken des  $T/M$ -Verhältnisses  $\kappa = 1$  (Bild 12) ein Schiebungsbruch an zufälliger Stelle, wie bei reiner Torsion, eintrat. In Bild 13 ist die nach dem Fliessen der Armierung auf drei Seiten eingetretene Schiebung und Zermalmung der Druckdiagonalen zu sehen. Balken  $TB_3$  mit kleinem  $T/M$ -Verhältnis ( $\kappa = 0,25$ ) ging durch einen Stauchungsbruch der Betondruckzone nach dem Fliessen der Zugarmierung eigentlich wie ein Biegebalken zugrunde. In Bild 14 ist die gestauchte, leicht schiefe Druckzone ersichtlich; die eingetretene Schiebung auf der Oberseite war ein sekundärer Effekt. Über den gesamten Interaktionsbereich Torsion-Biegung sind demnach bei unterarmierten Balken grundsätzlich zwei Brucharten zu beobachten. Die Grenze zwischen dem Stauchungsbruch (wie bei reiner Biegung) und dem Schiebungsbruch (wie bei reiner Torsion) lag beim vorliegenden Querschnitt beim Balken  $TB_2$  ( $\kappa = 0,50$ ), bei welchem beide Brucharten hätten eintreten können.



Balken	Querschnitt	$\kappa = T/M$	Langsarmierg	Bügelarmierg	Hauptvariable	Balken	Querschnitt	$\kappa = T/M$	Langsarmierg	Bügelarmierg	Hauptvariable
TB <sub>0</sub>		1			Torsions-Armierung	TB <sub>4</sub>		1	16 $\phi$ 12	$\phi$ 12, s = 11 cm	Voll-Querschnitt
TB <sub>1</sub>		1			Grund-Querschnitt	TB <sub>5</sub>		1	16 $\phi$ 12	$\phi$ 12, s = 11 cm	schwache Bügelarmierg
TB <sub>2</sub>		0.5			Verhältnis Torsion / Biegung	TB <sub>6</sub>		0.01	16 $\phi$ 12	$\phi$ 8, s = 11 cm	Risse in "falscher" Richtung
Versuchsbericht Nr. 6506-3 [4]						Versuchsbericht Nr. 6506-3 [4]					
TB <sub>3</sub>		0.25			Verhältnis Torsion / Biegung	TB <sub>9</sub>		1	5 $\phi$ 10 3 Litzen $\phi$ 1/2"	$\phi$ 10, s = 11 cm	Vorspanng. exzentrisch
Versuchsbericht Nr. 6506-3 [4]						Versuchsbericht Nr. 6506-4 [5]					

Bild 12. Versuchskörper «Torsion und Biegung»

Die eingetretene Kräfteumlagerung zwischen Längseisen und Bügeln auf der Unterseite ist in Bild 15 dargestellt. Der dazu theoretisch notwendige Neigungswinkel der Betondruckdiagonalen ist zum Vergleich angeschrieben. Dieser Winkel  $\text{tg } \alpha$  kann als ein Mass für die zum Fließen beider Armierungsanteile notwendige Neigungsänderung der Druckdiagonalen angesehen werden, wie ein Vergleich von TB<sub>0</sub> und TB<sub>2</sub> in Bild 15 mit ungefähr gleichen Werten für  $\text{tg } \alpha$  bestätigt. Offensichtlich liegt der Balken TB<sub>3</sub> mit  $\text{tg } \alpha = 2,83$  schon über der Grenze der möglichen Umlagerung, doch hat dies auf das Bruchmodell keinen Einfluss, da gegen die reine Biegung zu mit  $\text{tg } \alpha = \infty$  die Bügelarmierung ohnehin wirkungslos bleibt.

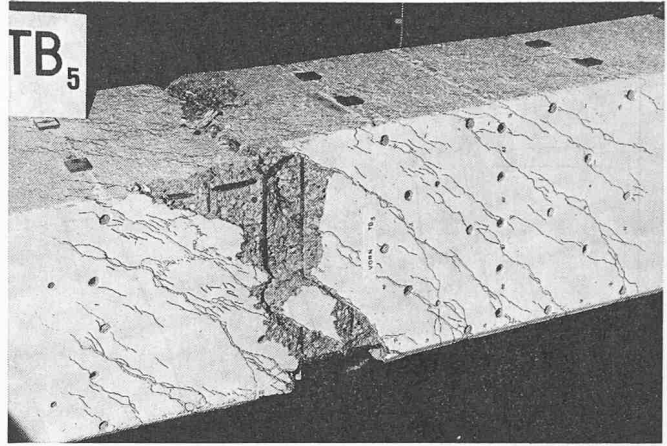


Bild 13. Bruchbereich Balken TB<sub>5</sub> (oben, vorn)

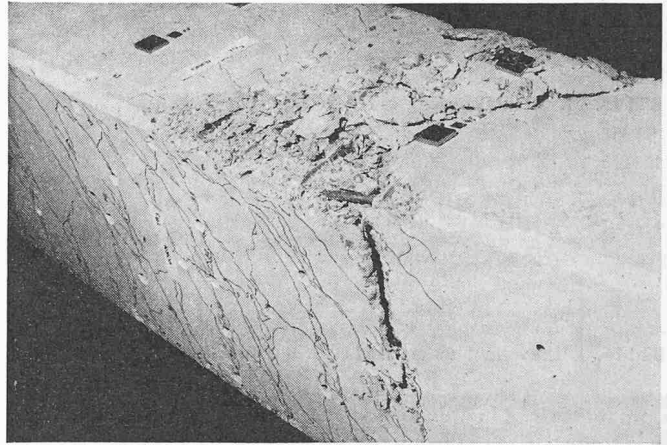


Bild 14. Bruchbereich Balken TB<sub>3</sub> (oben, vorn)

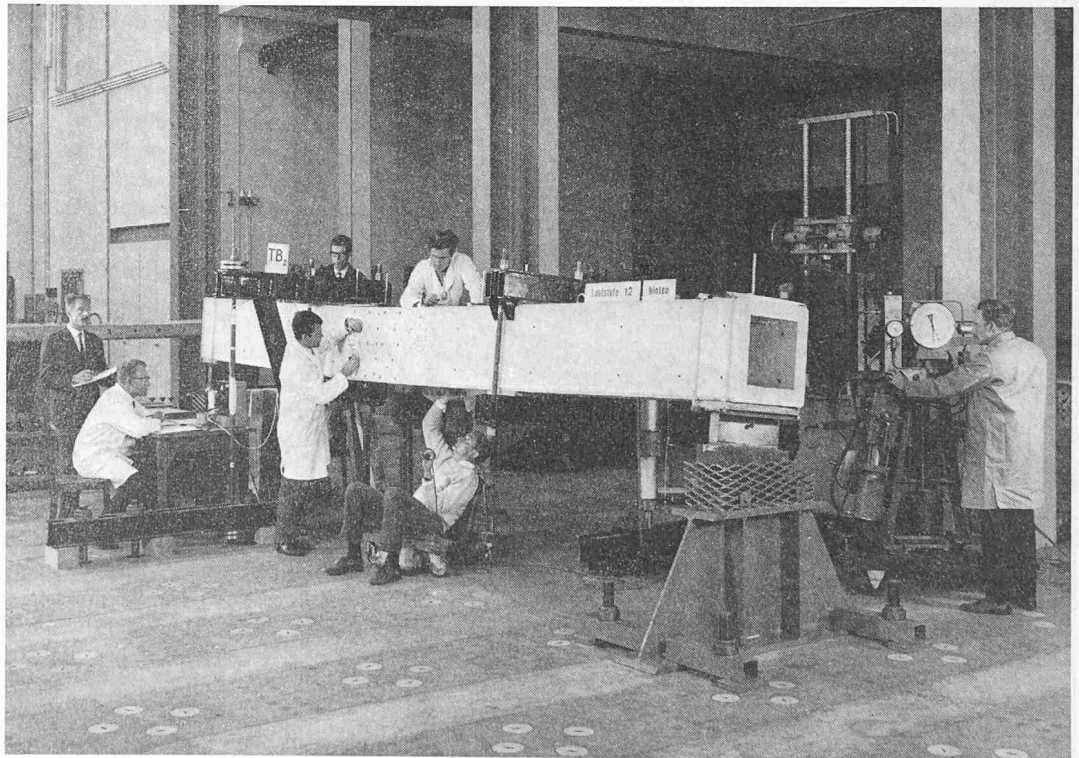


Bild 11. Versuchsanlage «Torsion und Biegung»

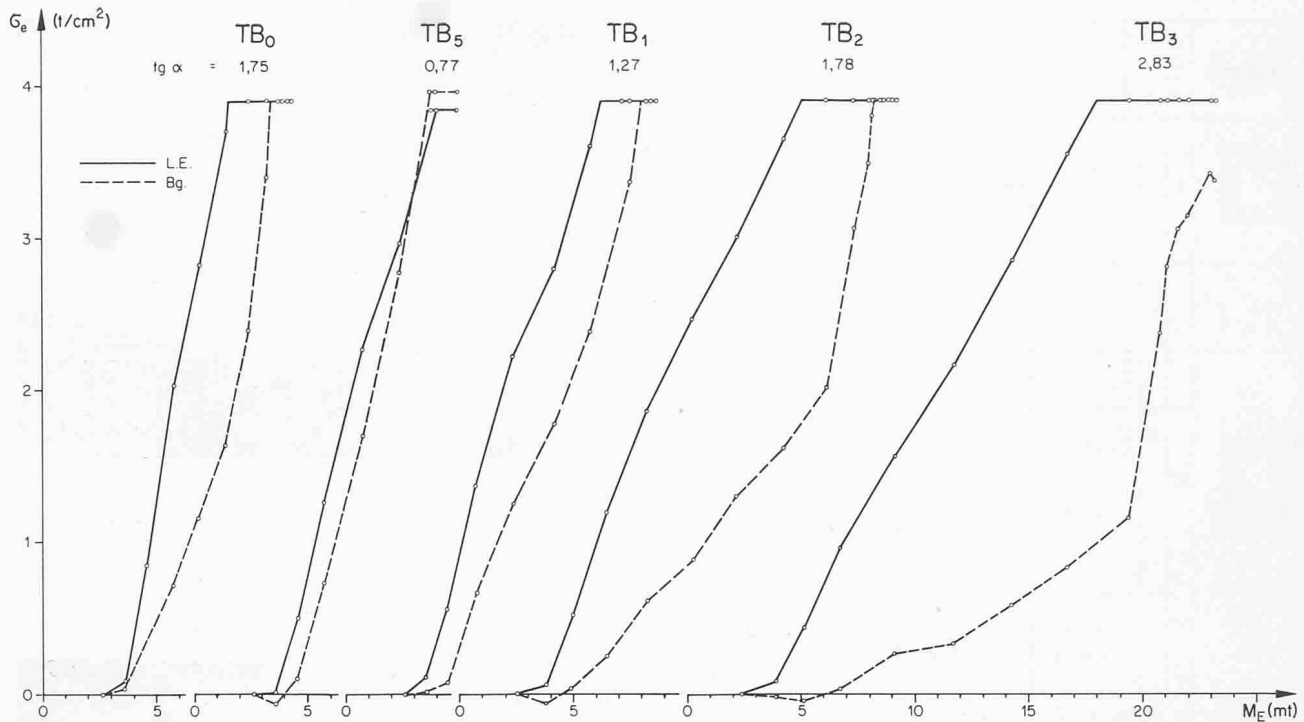
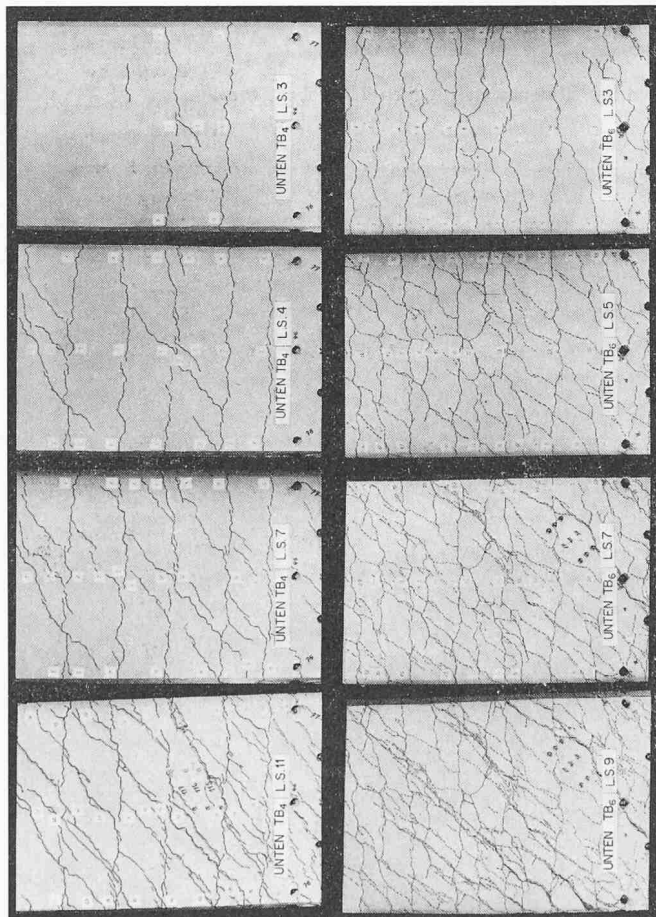


Bild 15. Kräfteumlagerung auf der Unterseite zwischen Längsisen und Bügeln

Bild 16. Risseverlauf unten, Balken TB<sub>4</sub> und TB<sub>6</sub>



Die zur Kräfteumlagerung notwendige Neigungsänderung der Druckdiagonalen stellte sich ungeachtet vorhandener Risse ein. Als Beweis hierfür diene der Balken TB<sub>6</sub>, der zunächst auf reine Biegung bis nahe an die Fließlast beansprucht wurde, um «falsche» Risse zu erzeugen. Beim anschließenden Torsions-Biege-Versuch verhielt er sich analog zum gleich beanspruchten und armierten Balken TB<sub>3</sub>. In Bild 16, das die Rissentwicklung auf der Unterseite zeigt, sind die neuen Risse bei TB<sub>6</sub> gestrichelt eingetragen. Ein Vergleich zum ebenfalls abgebildeten Balken TB<sub>4</sub> zeigt, wie unterschiedlich die Diagonalenneigungen sein können, obwohl doch beide Balken genau gleich beansprucht wurden. Der Balken TB<sub>4</sub> besitzt jedoch eine stärkere Bügelarmierung, so dass zu deren Fließen eine steilere Diagonalenneigung erforderlich war.

Die gemessenen Interaktionskurven sind in Bild 17 dargestellt; links wurden die Axen mit den absoluten, rechts mit den bezogenen Momentenwerten beschriftet. Bei den Bruchmomenten in reiner Torsion (Ordinate) wurde der Einfluss des Eigengewichts berücksichtigt, während die reinen Biegebruchmomente (Abszisse) rechnerisch bestimmt wurden. Zueinander gehörende Versuchspunkte sind linear miteinander verbunden. Es zeigt sich, dass zu jeder Armierungsanordnung ein gesondertes Interaktionsdiagramm gehört. Der Vollquerschnitt TB<sub>4</sub> wies auch unter kombinierter Beanspruchung kein von den entsprechenden Hohlquerschnitten TB<sub>1</sub>–TB<sub>3</sub> abweichendes Bruchverhalten auf, womit wiederum bestätigt ist, dass für das Bruchverhalten Vollquerschnitte wie Hohlquerschnitte gleicher Aussenabmessung und Armierung angesehen werden können.

Während Bild 17 zu entnehmen ist, dass ein Torsionsmoment den Biegezugwiderstand eines Balkens stets verkleinert, kann bei unsymmetrisch armierten Querschnitten (Biegearmierung) ein kleines Biegemoment die Torsionstragfähigkeit erhöhen. Dies rührt davon her, dass auf der schwächer armierten Seite der Zugkraft infolge Torsion in den Längsisen eine Druckkraft infolge Biegung entgegenwirkt (Bild 18). Dadurch wird die massgebende schwächere Längsarmierung entlastet und kann somit ein erhöhtes Torsionsmoment aufnehmen, solange die stärkere Längsarmierung, in der sich

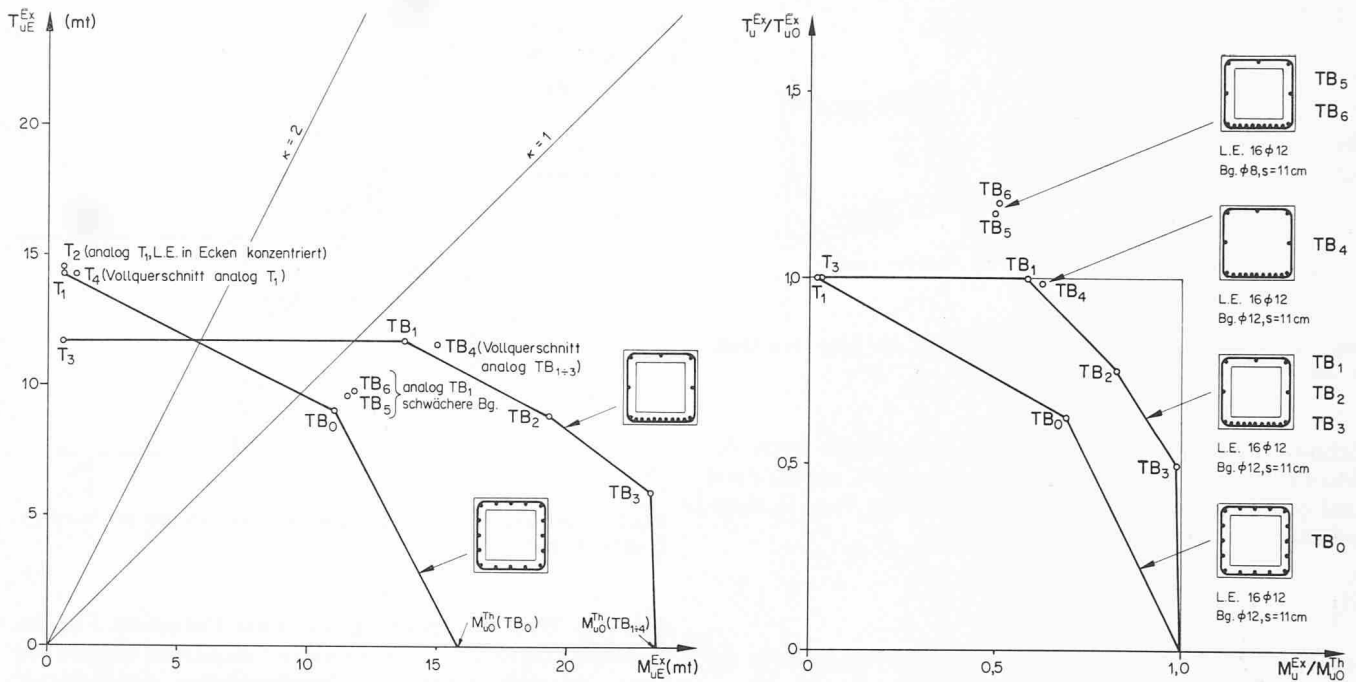


Bild 17. Gemessene Interaktionsverhältnisse Torsion - Biegung

Torsions- und Biegezugkraft additiv überlagern, für das Versagen nicht massgebend wird.

Der exzentrisch vorgespannte Balken TB<sub>0</sub> war eigentlich das Modell eines Brückenquerschnittes in Feldmitte. Auch für den kombinierten Lastfall mit relativ grossem Torsionsmoment ( $\alpha = 1$ ) hat sich bestätigt, dass eine normal vorgespannte und ausinjizierte Vorspannarmierung wie eine schlaaffe Armierung hoher Streckgrenze betrachtet werden kann. Das Hüllrohr in den Ecken erwies sich dabei als eine so ausgezeichnete Verankerung der Diagonalen, dass der Schiebungsbruch nach dem Fließen der Vorspannarmierung schliesslich auf der Oberseite auftrat, wo sich nur ein Längsisen in der Ecke befand. Dieses Ergebnis ermöglicht in Zukunft die Berücksichtigung der Vorspannkabel bei der Bemessung der Torsionslängsbewehrung, da die Lastfälle für maximales Biegemoment und maximales Torsionsmoment nie identisch sein werden.

### 5. Theoretisches Bruchmodell

Als Folgerung aus diesen Versuchsergebnissen entsteht das allgemeine Bruchmodell des Bildes 19, welches in [7] entwickelt wurde. Dieses räumliche Fachwerk besteht aus Längsisen, welche in die Querschnittsecken zu eigentlichen Stringern konzentriert gedacht werden und dazwischen liegenden Schubwänden, in denen Bügelkräfte und Betondruckdiagonalkräfte wirken. Letztere treten unter einem pro Querschnittswand als konstant angenommenen Winkel gegenüber der Balkenachse auf. Dieser Winkel beträgt im allgemeinen nicht 45°, sondern er stellt sich so ein, dass auf den für den Bruch massgebenden Seiten die Längsisen und die Bügel ihre Fließspannung erreichen können. Deshalb wird dieses Modell als

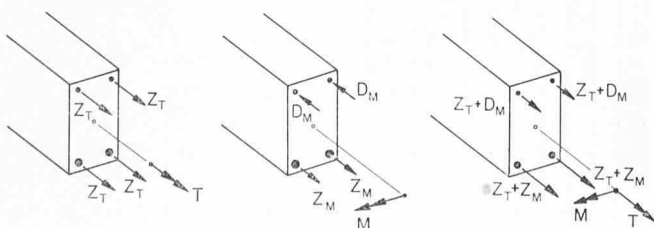
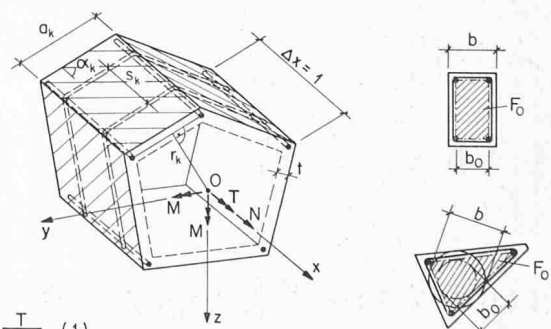


Bild 18. Erhöhung der Torsionstragfähigkeit durch ein Biegemoment

räumliches Fachwerk mit variabler Diagonalenneigung bezeichnet.

Dieses Modell gilt für St. Venantsche Torsion im gesamten Interaktionsbereich für schiefe Biegung, Normalkraft und Torsion. Damit ergeben sich einige Begrenzungen des Anwendungsbereiches hinsichtlich Querschnittsform, Sprödbbruchgefahr, Armierungsverhältnis Längsisen/Bügel und Verkleinerung des inneren Hebelarmes (bei grösseren Armierungsgehalten und überwiegender Biegebeanspruchung), auf die in [7] näher eingegangen wird. Auch sollen konstruktive Mängel, wie ungenügende Verankerung der Armierung, zu weiter Bügelabstand und ungenügende Eck-Längsbewehrung, die Verankerungsbrüche oder ein vorzeitiges Ausbrechen der Druckdiagonalen zur Folge hätten, ausgeschlossen werden.

Als weitere Folgerung aus den Versuchen wird auch bei Vollquerschnitten eine wirksame äussere Schale angenommen, da der Kern keinen Beitrag an den Torsionswiderstand leistet. Diese ideale Wandstärke wird zur Bestimmung einer nominalen Schubspannung benötigt, mit welcher eine obere Schubspannungsgrenze zur Vermeidung eines schiefen Druckbruchs der Betondiagonalen festgelegt werden soll. Diese



$$\tau = \frac{T}{2F_0t} \quad (1)$$

$$\text{bei Vollquerschnitten: } t = \frac{b}{6} \text{ resp. } t = \frac{b_0}{5} \quad (2)$$

$F_0$ : Von der Verbindungslinie durch die Ecken der Längsbewehrung umschlossene Fläche

Bild 19. Bruchmodell



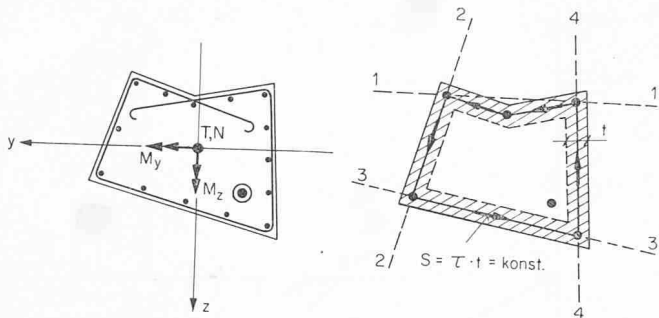


Bild 20. Allgemeiner Querschnitt, Bruchmodell mit möglichen Drehachsen

Schubspannung hat offensichtlich mit derjenigen nach der Membran-Analogie der Vollquerschnitte nichts mehr zu tun und bestimmt sich vernünftigerweise nach der Theorie dünnwandiger, geschlossener Querschnitte zu:

$$(1) \quad \tau = \frac{T}{2 F_0 t}$$

wobei für  $t$  bei Vollquerschnitten als ideale Wandstärke der kleinere der beiden Werte

$$(2) \quad t = b/6 \quad t = b_0/5$$

vorgeschlagen wird. Dabei bedeutet bei allgemeinen Querschnittsformen  $b$  bzw.  $b_0$  den Durchmesser des grössten in die Querschnittsfläche bzw. in die Fläche  $F_0$  eingeschriebenen Kreises (Bild 19). Bei zusammengesetzten Querschnitten werden zur Ermittlung von  $t$  die einzelnen Querschnittsteile getrennt betrachtet, und bei Hohlquerschnitten ist für  $t$  die effektive Wandstärke einzusetzen, solange diese kleiner bleibt als die ideale Wandstärke eines Vollquerschnittes gleicher Aussenabmessungen. Dieser Vorschlag wurde auch vom «Comité Européen du Béton» (CEB) in seine neuesten Torsions-Vorschriften [8] übernommen. Er wird für kleine Querschnitte streng, was sehr vernünftig scheint, da kleine Abmessungen bei Torsionsträgern vermieden werden sollten.

Einige Bedeutung in Gleichung (2), wie auch beim Bruchwiderstand, kommt der Fläche  $F_0$  zu. Sie wird definiert als die von der Verbindungslinie durch die Ecken der Längsbewehrung umschlossene Fläche. Die Fläche  $F_0$  entsteht aus der Momentenbedingung um die Balkenachse durch Aufsummieren der Hebelarme des Schubflusses über den Umfang. Da dieser Schubfluss an der Eck-Längsbewehrung umgelenkt

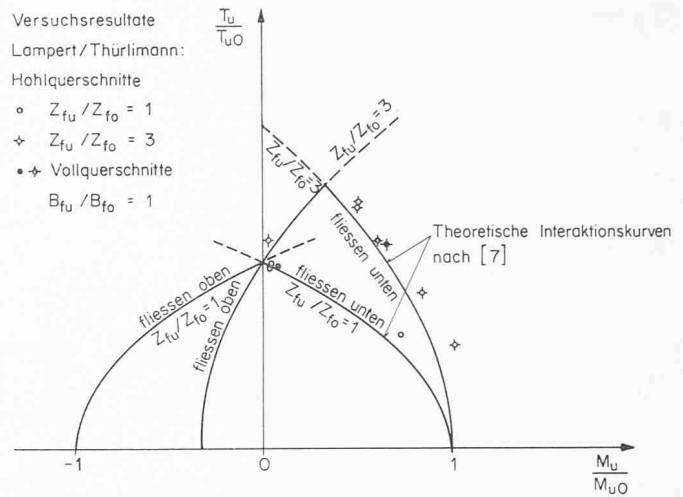


Bild 21. Interaktion am quadratischen Fachwerkmodell mit variabler Diagonalneigung

wird (vgl. Bild 10), rechtfertigt sich diese Definition. Für das Torsions-Tragverhalten unterarmierter Balken ist deshalb die Lage der verbügelten Eck-Längsbewehrung entscheidend. Damit kann nun der Bruchwiderstand dieses Bruchmodells theoretisch erfasst werden.

## 6. Bruchwiderstand

In Bild 20 ist ein allgemeiner Querschnitt beliebiger Armierung, schlaff und vorgespannt, durch schiefe Biegung, Normalkraft und Torsion beansprucht. Am dazugehörigen Bruchmodell ist es nicht von vornherein möglich, den Bruchmechanismus vorauszusehen. Insbesondere wäre von Interesse, welche Längseisen-Stringer und welche Bügel vor dem Versagen ihre Fließspannung erreichen werden, sofern der Balken nicht frühzeitig durch Zerstörung der Druckdiagonalen zugrunde geht.

Die Lösung des allgemeinen Bruchmodells ist mit Hilfe der Plastizitätstheorie möglich [7]. Mit den Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen kann ein lineares Programm aufgestellt werden, dessen Maximalwert nach dem statischen Grenzwertsatz eine untere Schranke für die Traglast bildet. Mit den kinematischen und den Leistungsbedingungen ergibt sich ein lineares Programm, dessen Minimalwert nach dem kinematischen Grenzwertsatz eine obere Schranke der Traglast darstellt. Da diese beiden Programme zueinander dual

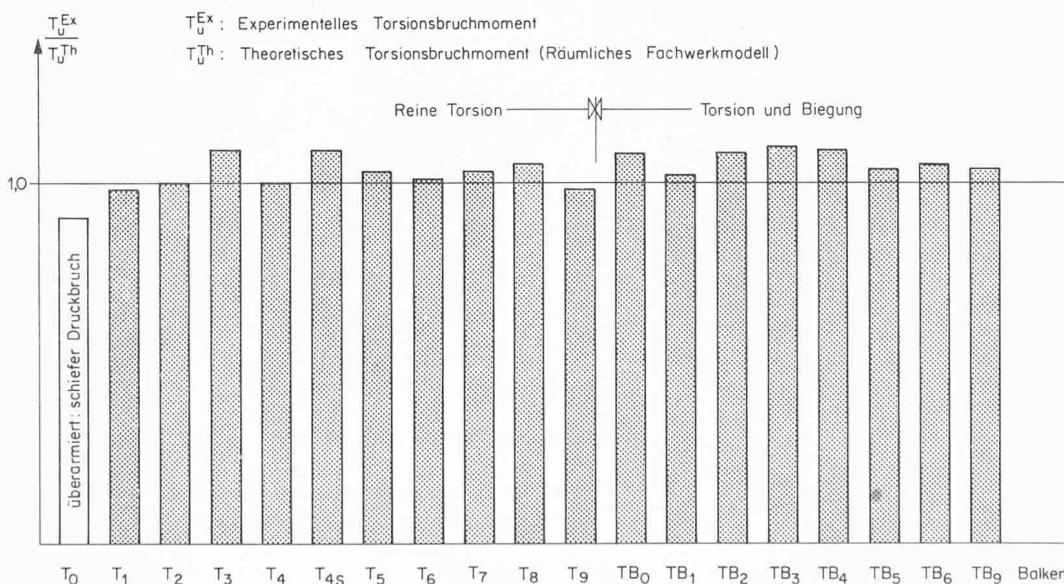


Bild 22. Vergleich Versuch-Theorie

sind, nehmen sie denselben Optimalwert an, nämlich den exakten Wert der Traglast dieses Bruchmodells.

Interessant sind nun (neben der aus den Gleichgewichtsbedingungen folgenden Tatsache, dass der Schubfluss beim Bruchmodell ringsherum konstant sein muss) die Folgerungen, die aus der Lösung der Optimierungsaufgabe gezogen werden konnten:

- a) Ein Mechanismus öffnet sich um die Verbindungsgerade zweier Längseisen-Stringer, sofern diese Gerade den Querschnitt nicht schneidet (Bild 20, Drehachsen 1 bis 4)
- b) Beim Mechanismus fließen die Bügel auf allen Querschnittsseiten.

Zusammen sagen diese beiden Sätze aus, dass beim Mechanismus alle Bügel und alle Längseisen ihre Fließspannung erreichen, mit Ausnahme der zwei Längseisen-Stringer auf der Drehachse. Offensichtlich trifft dieses Bruchmodell bei überwiegender Biegebeanspruchung mit ungerissener Biegedruckzone nicht zu, doch darf gleichwohl damit gerechnet werden, da die Bügelkraft in der Druckzone im Bruchmechanismus den Hebelarm null besitzt und deshalb das Ergebnis nicht verfälscht.

Es muss nun noch gezeigt werden, ob die theoretischen Ergebnisse, die diesem räumlichen Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenennung entstammen, im Versuch auch belegt werden können. Für den quadratischen Querschnitt wurden in Bild 21 die theoretischen Interaktionskurven Torsion - Biegung für die zwei Fälle  $Z_{fu}/Z_{fo} = 1$  bzw. 3 mit konstanter Bügelarmierung ( $B_{fu}/B_{fo} = 1$ ) dargestellt. Auf dem linken Kurvenstück bis zum Scheitelpunkt der Interaktion fließt die obere, auf dem rechten Kurvenstück die untere Armierung. Die Versuchspunkte der dazugehörigen Balkenversuche sind ebenfalls eingezeichnet und bestätigen die Richtigkeit des gewählten Bruchmodells. In Bild 22 sind sämtliche bisher am Institut für Baustatik durchgeführten Versuche in «Reiner Torsion» und «Torsion und Biegung» mit dieser Theorie [7] verglichen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch über alle Parameter hinweg erlaubt die Feststellung, dass das Torsions-Biege-Problem für unterarmierte und konstruktiv richtig bewehrte Balken grundsätzlich gelöst ist.

### 7. Bemessung

Suchte man bis anhin stets nach dem Bruchwiderstand eines bestimmt armierten Querschnittes, so soll nun die Fragestellung umgekehrt werden: Gesucht wird bei gegebener Belastung und Abmessung die Längs- und Bügelarmierung. Es kann gezeigt werden, dass bei massgebender Torsionsbeanspruchung das notwendige Stahlvolumen für eine Diagonalenennung von  $45^\circ$  minimal wird. Es scheint deshalb gerechtfertigt, der Bemessung ein  $45^\circ$ -Fachwerk zugrunde zu legen. Im folgenden sollen daher einige Bemessungsbeziehungen für Torsion und Biegung am einfach symmetrischen, quadratischen Fachwerkmodell abgeleitet werden.

In Bild 23 ist ein solcher Hohlquerschnitt mit verschiedenen starken oberen und unteren Längseisen-Stringern unter einer konstanten Torsions- und Biegemomentenbeanspruchung dargestellt. Die Bügel seien ringsherum gleich und die Diagonalkräfte voraussetzungsgemäss unter  $45^\circ$  zur Balkenachse geneigt. Diese Diagonalkräfte sind auf allen vier Seiten gleich gross (konstanter Schubfluss), wie man sich auch durch die Komponentengleichgewichtsbedingungen in der  $y$ - und  $z$ -Richtung sowie in der  $x$ -Richtung im Detailausschnitt überzeugen kann.

Die  $y$ - und  $z$ -Komponenten der Diagonalkräfte müssen durch die Bügel aufgenommen werden, womit sich aus dem Detailausschnitt des Bildes 23 die Beziehung

$$(3) \quad B = D \frac{s}{a} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

zwischen Bügeln und Diagonalkraft ergibt. In einem zur  $x$ -Achse senkrechten Schnitt des ganzen Querschnitts verbleiben von den 6 möglichen noch 3 nichttriviale Gleichgewichtsbeziehungen (Bild 23):

$$(4) \quad Z_o + Z_u = D \sqrt{2}$$

$$(5) \quad T = Da \sqrt{2}$$

$$(6) \quad M = (Z_u - Z_o) a$$

Macht man Gebrauch von der Voraussetzung unterarmerter Balken, dass vor dem Versagen die Armierung zum Fließen komme, so lässt sich die uninteressante Beton-diagonalkraft  $D$  aus Gleichung (5) berechnen und in Gleichung (3) und (4) einsetzen. Damit und mit Gleichung (6) erhält man die drei Beziehungen

$$(7) \quad Z_u + Z_o = \frac{T}{a}$$

$$(8) \quad Z_u - Z_o = \frac{M}{a}$$

$$(9) \quad \frac{B}{s} = \frac{T}{2a^2}$$

für die drei Unbekannten  $Z_u$ ,  $Z_o$  und  $B$ . Mit Hilfe von Gleichung (7) wird

$$(10) \quad 2(Z_u + Z_o) = \Sigma Z = \frac{2T}{a}$$

und mit Einführung des Umfanges der Fläche  $F_o$  ( $u = 4a$ ) und der Eisenspannung  $\sigma_e$  wird

$$(11) \quad \frac{F_B}{s} = \frac{\Sigma F_L}{u} = \frac{T}{2a^2 \sigma_e}$$

Für reine Torsion ist dies bereits die bekannte endgültige Lösung. An der Richtigkeit dieser Bemessungsgleichung wurde lange gezweifelt [1], [2], doch ergaben die vorliegenden reinen Torsionsversuche [3] eine so eindeutige Bestätigung des  $45^\circ$ -Fachwerks für volumengleich armierte Balken, dass die obige Gleichung (11) in der allgemeinen Form

$$(12) \quad \frac{F_B}{s} = \frac{\Sigma F_L}{u} = \frac{T}{2F_o \sigma_e}$$

in die neuen Torsionsnormen des CEB [8] aufgenommen wurden. Es ist ersichtlich, dass bei der Bemessung der Armierung die effektive oder ideelle Wandstärke nicht benötigt wird.

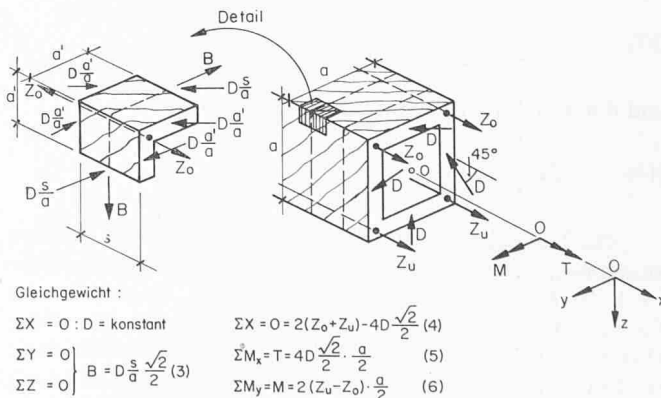
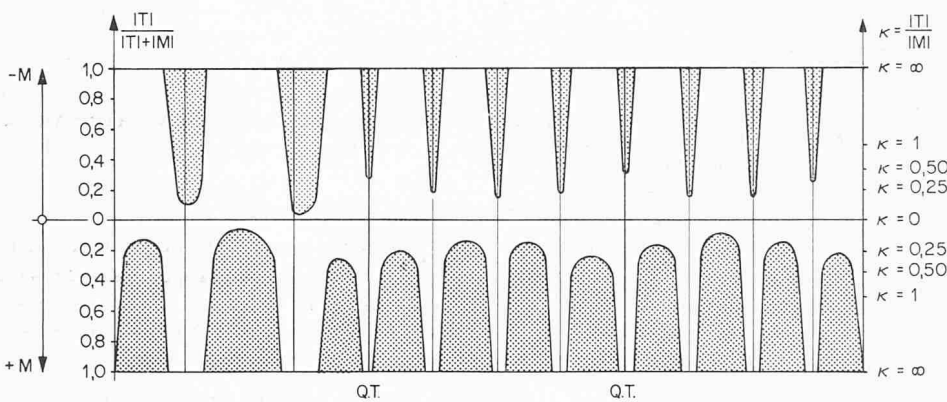
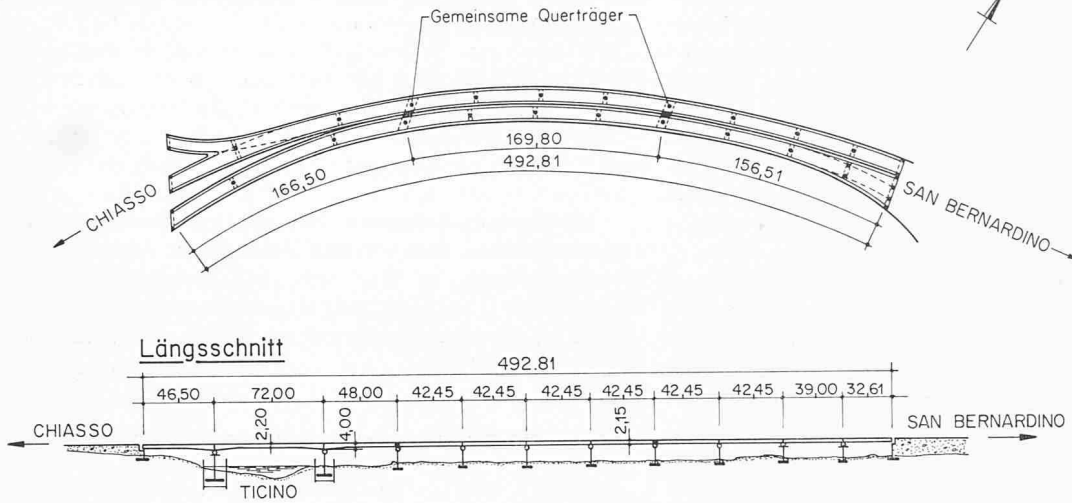


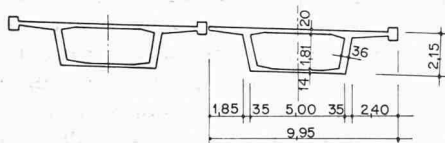
Bild 23. Quadratisches Fachwerkmodell mit  $45^\circ$ -Diagonalen

Untersicht

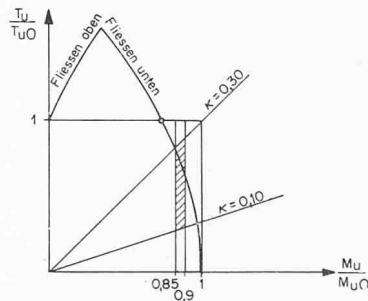
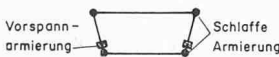
Bild 24. «Viadotto Foce Moesa» (Interaktion Torsion-Biegung in Feldmitte)



Querschnitt (Feldmitte)



Idealisierung



Für den kombinierten Lastfall Torsion - Biegung des quadratischen Fachwerks benötigt man noch Gleichung (8). Durch Addition zu Gleichung (7) wird

$$(13) \quad F_u = \frac{T}{2a\sigma_e} + \frac{M}{2a\sigma_e}$$

und durch Subtraktion von (7)

$$(14) \quad F_o = \frac{T}{2a\sigma_e} - \frac{M}{2a\sigma_e}$$

Die Längsflächen setzen sich also aus zwei Anteilen zusammen, aus einem Biege- und einem Torsionsanteil. Während die Superposition von Torsions- und Biegearmierung für die unteren Längsflächen bestätigt wird, ist aus Gleichung (14) ersichtlich, dass die obere Torsionslängsarmierung dank der Druckvorspannung infolge des Biegemomentes (siehe auch Bild 18) sogar reduziert bzw. ganz weggelassen werden könnte. Die Gleichung (11) behält nach wie vor ihre Gültigkeit, wobei

$\Sigma F_L = 2(F_o + F_u)$  die Gesamtsumme der (ungleichen) Längsarmierung oben und unten bedeutet; insbesondere ist auch auf der Oberseite stets eine Bügelbewehrung  $F_B$  für Torsion einzulegen.

Für eine allgemeine Ableitung und die Kontrolle der Unterarmierung sei auf [7] verwiesen. Mit den Möglichkeiten einer

- Berücksichtigung der konzentrierten Eck-Längsarmierung
- Berücksichtigung der Vorspannarmierung
- Reduktion der Längsarmierung in der Biegedruckzone

bei der Bemessung der Torsionslängsbewehrung eröffnen sich für die Zukunft einige neue Gesichtspunkte und Einsparungen, die wohl auch bei Überlagerung einer zusätzlichen Querkraft gültig bleiben werden. Bis zum Vorliegen der experimentellen Ergebnisse auf diesem Gebiet darf bei der Bügelbemessung die getrennte Berechnung und nachherige Überlagerung der Armierungsflächen für Torsion und für die Querkraft des dazugehörigen Lastfalls angewendet werden.

Anstelle einer direkten Bemessung kann es zweckmässiger sein, die Interaktionskurven des Bruchwiderstandes Torsion – Biegung zu verwenden. Bei Brücken z. B. ist nach der Berechnung der zentralen Maximallast bereits eine solche Längs- und Bügelarmierung in Steg und Fahrbahnplatte vorhanden, dass der Querschnitt, je nach Armierung der Druckplatte, einen erheblichen Torsionsbruchwiderstand besitzt. Anhand des Interaktionsdiagramms kann an exponierten Stellen, wie Feldmitte oder Stützenbereich, abgeklärt werden, ob eine zusätzliche Torsionsarmierung für exzentrische Belastungsfälle tatsächlich notwendig wird. In Bild 24 ist dies am Beispiel des «Viadotto Foce Moesa» gezeigt, wo die Torsionsmomente durch die Widerlager und zwei gemeinsame Querträger nur etwa alle 170 m aufgenommen werden. Die dadurch bedingten, hohen Torsionsmomente ergeben für die Feldmitten der kurzen Spannweiten  $T/M$ -Werte zwischen  $\alpha = 0,10$  und  $0,30$ . Aus dem Interaktionsdiagramm nach [7] lässt sich mit dem zum Lastfall  $T_{max}$  gehörigen Biegemoment, das zwischen 85% und 90% des maximalen Momentes liegt, ablesen, dass der Lastfall Torsion und Biegung, auch ohne Querkraft, massgebend werden kann.

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Im Laufe der Jahre 1965 bis 1969 wurden vom Institut für Baustatik u.a. 11 Versuchsbalken grösseren Querschnitts in Stahl- und Spannbeton unter reiner Torsion und 8 unter dem kombinierten Lastfall Torsion und Biegung geprüft. Sie brachten als hauptsächlichstes Ergebnis die Gültigkeit des räumlichen Fachwerks als Bruchmodell. Durch Kräfteumlagerungen zwischen Längseisen und Bügeln richtet sich die Diagonalenneigung nach der Bedingung, dass auf den massgebenden Seiten beide Armierungsanteile zum Fließen kommen. Bei biegearmierten Querschnitten kann die Torsionstragfähigkeit durch ein gleichzeitig wirkendes Biegemoment erhöht werden, da in den Längseisen der Biegedruckzone der Zugkraft infolge Torsion eine Druckkraft infolge Biegung entgegenwirkt.

Für die Bemessung ergibt ein Fachwerkmodell mit 45°-Diagonalen den geringsten Stahlbedarf. Eine Reduktion der Längsbewehrung in der Biegedruckzone sowie die Berücksichtigung der normal vorgespannten Spannkabel bei der Bemessung auf Torsion wird vorgeschlagen. Konstruktiv empfiehlt es sich, die Torsionslängsarmierung vor allem in den Querschnittsecken anzuordnen, um, zusammen mit einer engen Verbügelung, eine einwandfreie Abstützung der Druckdiagonalen zu erreichen.

Ein theoretisches Bruchmodell, ein räumliches Fachwerk mit variabler Diagonalenneigung, wird kurz erläutert. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit dieser Theorie [7] für verschiedene Querschnittsformen und Armierungsanordnungen zeigt, dass der Bruchwiderstand unterarmerter und konstruktiv richtig bewehrter Balken unter Torsion und Biegung grundsätzlich bekannt ist.

Die zukünftige Forschung wird sich deshalb vor allem der Belastungskombination Torsion – Biegung – Querkraft zuwenden, wie auch dem Bruchwiderstand offener Querschnitte, bei welchen das Wölben nicht mehr vernachlässigbar bleibt. Durch den starken Steifigkeitsabfall nach dem Rissbeginn infolge der St. Venantschen Torsion kann der Wölb torsion im Bruchzustand erhöhte Bedeutung zukommen. Stets bleibt es aber dem projektierenden Ingenieur überlassen, zu entscheiden, ob ein vorliegendes Modell für sein Problem passt oder ob nicht sekundäre Effekte, wie z. B. eine Behinderung freier Verformung oder von der Theorie abweichende Randbedingungen, primär werden.

## Summary

From 1965 to 1969 the Institute of Structural Engineering, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, tested 11 beams

of large dimensions in reinforced and prestressed concrete under pure torsion and 8 beams under combined torsion and bending. The main result of these tests confirmed the validity of the space truss as failure module. A redistribution of the forces between longitudinal and transverse reinforcement requires a change in the inclination of the concrete compression diagonals so that finally all the bars on three of the four sides yield. In unsymmetrically reinforced beams (bending reinforcement) small bending moments cause an increase in torsional resistance, because in the longitudinal reinforcement of the compression zone a compressive force due to bending counteracts the tensile force due to torsion.

For design, a space truss model with 45°-diagonals requires the least amount of steel. A reduction of the longitudinal reinforcement in the bending compression zone as well as the consideration of normally stressed prestressing steel for torsion is proposed. Constructively it is recommended to concentrate the longitudinal reinforcement for torsion in the corners of the cross-section, to get, together with a close spacing of stirrup reinforcement, a perfect support of the concrete diagonals.

A theoretical failure model, a space truss with variable inclination of diagonals, is reported in brief. The agreement between the test results and this theory [7] for different cross-sections and arrangements of reinforcement shows that the ultimate load in torsion and bending of under-reinforced and correctly constructed concrete beams is fundamentally known.

## Verdankungen

Diese theoretischen und experimentellen Untersuchungen wurden ermöglicht durch die grosszügige finanzielle Unterstützung der «Stiftung für wissenschaftliche, systematische Forschungen auf dem Gebiete des Betons- und Eisenbetonbaues».

Der experimentelle Teil konnte an der Eidgenössischen Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA) in Dübendorf durchgeführt werden. Die Armierungsstähle für die Versuchsbalken wurden von der Firma Monteforno, Stahl- und Walzwerke AG, Bodio, die Spannkabel von der Firma Losinger & Co. AG, Bern, zur Verfügung gestellt. Bei der Versuchsdurchführung wirkten zahlreiche Mitarbeiter des Institutes, Assistenten und Studenten aktiv mit. Für alle diese Unterstützung möchte der Verfasser herzlich danken.

Adresse des Verfassers: Paul Lampert, dipl. Bauing. ETH, z. Zt. University of Toronto, Department of Civil Engineering, Toronto 5, Canada.

## Literatur

- [1] Cowan, H.J.: Reinforced and Prestressed Concrete in Torsion, Edward Arnold Ltd., London, 1965.
- [2] Torsion of Structural Concrete, Publication SP-18, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1968.
- [3] Lampert, P. und Thürlimann, B.: Torsionsversuche an Stahlbetonbalken, Bericht Nr. 6506-2, Juni 1968, Institut für Baustatik, ETH Zürich.
- [4] Lampert, P. und Thürlimann, B.: Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken, Bericht Nr. 6506-3, Januar 1969, Institut für Baustatik, ETH Zürich.
- [5] Lampert, P., Lüchinger, P. und Thürlimann, B.: Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken, Bericht Nr. 6506-4, Institut für Baustatik, ETH Zürich (erscheint 1970).
- [6] Rausch, E.: Drillung (Torsion), Schub und Scheren im Stahlbetonbau, Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH, Düsseldorf, 3. Auflage 1953.
- [7] Lampert, P.: Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung, Dissertation ETH Zürich (erscheint 1970).
- [8] Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Exécution des Ouvrages en Béton, Comité Européen du Béton, XIIIe Session Plénière, Delft, Septembre 1969.