

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 1: 1. Sonderheft zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. F. Stüssi

**Artikel:** Das Rechnen mit unstetigen Funktionen in der Baustatik  
**Autor:** Franz, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84726>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

[4] *Donnel L.H., Wan C.C.*: Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. "Journ. Appl. Mech." 17 (1950) No. 1.

[5] *Ebner H.*: Theoretische und experimentelle Untersuchung über das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck. «Der Stahlbau» 21 (1952) Nr. 9.

[6] *Geckeler J.W.*: Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen. «Z.f.a.M.M.» 8 (1928).

[7] *Kanemitsu S., Nojima N.M.*: Axial compression tests of thin circular cylinders. M.S. Thesis, Calif. Inst. Techn. (1939).

[8] *v. Kármán Th., Tsien H.S.*: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. "Journ. of Aero. Sci." 8 (1941) No. 8.

[9] *Kempner J.*: Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells. "Journ. of Aero. Sci." 21 (1954) No. 5.

[10] *Michielsen H.F.*: The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression. "Journ. of Aero. Sci." 15 (1948) No. 12.

[11] *Pflueger A.*: Zur praktischen Berechnung der axial gedrückten Kreiszyllinderschale. «Der Stahlbau», 32 (1963) H. 6.

[12] *Pflueger A.*: Zur axial gedrückten Kreiszyllinderschale. «Braunsch. Wissensch. Gesellschaft» 14 (1962).

[13] *Schulz U.*: Zur Beulstabilität von Kreiszyllinderschalen. Dissertation, Universität Karlsruhe (1970).

[14] *Weingarten V.I., Morgan E.I., Seide P.*: Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined internal pressure and axial compression. "AIAA Journ." 3 (1965) No. 6.

[15] *Thielemann W.F., Esslinger M.*: Beul- und Nachbeulverhalten isotroper Zylinder unter Aussendruck. «Der Stahlbau» 36 (1967) H. 6.

[16] *Thielemann W.F., Dreyer H.J.*: Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger, axial gedrückter Kreiszyllinder. «Deut. Vers.f. Luftf. Ber.» (1956) Nr. 17.

[17] *Wolmir A.S.*: Biegsame Platten und Schalen. Berlin 1962, VEB-Verlag für Bauwesen.

## Das Rechnen mit unstetigen Funktionen in der Baustatik

DK 624.04.001.2

Von Prof. Dr.-Ing. G. Franz

Wir stellen als Ingenieure immer wieder fest, wie spröde unsere mathematischen Hilfsmittel sind: Bei unseren Aufgaben der Stabstatik haben wir es einerseits vielfach mit Einzellasten zu tun oder mit Streckenlasten, die unstetig verlaufen, andererseits wechseln die Abmessungen von Balken oder Stützen mitunter plötzlich (Bild 1). Wie behandeln wir in solchen Fällen die Aufgabe, die Schnittkräfte oder Verformungen zu ermitteln?

Es stehen hierzu folgende Methoden zur Verfügung:

- 1a) Die Zerlegung des Stabes in einzelne Bereiche, in denen Lasten und Querschnitte stetig verlaufen. Zu den Randbedingungen des Gesamtstabes treten dann noch Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Abschnitten, so dass eine grosse Zahl von Konstanten zu bestimmen ist.
- 1b) Benutzt man Abschnitte geringer Länge, so gelangt man zur Differenzenrechnung.
- 2) Die Entwicklung unstetiger Belastungen in Fourier-Reihen. Man weiss, dass sehr viele Reihen-Glieder nötig sind, um zum Beispiel die Wirkung einer Einzellast zu beschreiben.

- 3) Die Ansätze von unstetigen Funktionen in der Form von Operatoren. Sie stammen von *Mikusinsky* [1] und sind neuerdings bei uns durch *Dimitrov* [2] bekannt geworden. Zu erwähnen sind auch in den USA entwickelte Verfahren, über die *Pilkey* [3] berichtet.
- 4) Grafische Verfahren. Sie sind zwar mühsam, aber sehr universell.

Es gibt aber auch noch andere Möglichkeiten. Ich habe 1931 auf Anregung von Prof. *Trefftz* in Dresden eine recht einfache, ingenieurmässige Methode entwickelt, die eine Funktion  $u(a, x)$  benutzt (Bild 2). Sie besitzt ab  $x = a$  den Wert 1 und gestattet so, eine gleichförmige Streckenlast als  $p = qu(a, x)$  darzustellen. Hört diese Streckenlast bei  $x = b$  auf, so hat man einen zweiten Teil mit der Funktion  $u(b, x)$  hinzuzufügen, der ab  $x = b$  die Belastung annulliert:

$$p = q [u(a, x) - u(b, x)]$$

Aber auch eine linear ansteigende Last lässt sich hiermit darstellen, eine Trapezlast oder eine beliebige andere Last, die bei  $x = a$  beginnt.

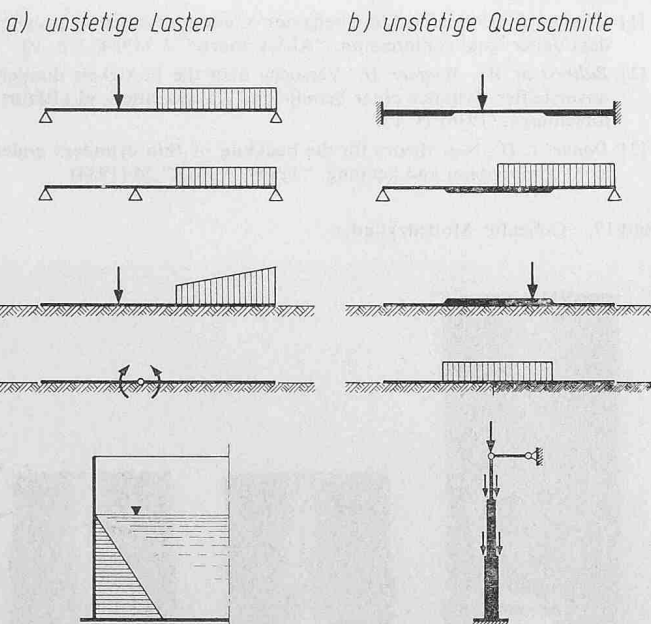


Bild 1. Unstetige Funktionen in der Stabstatik

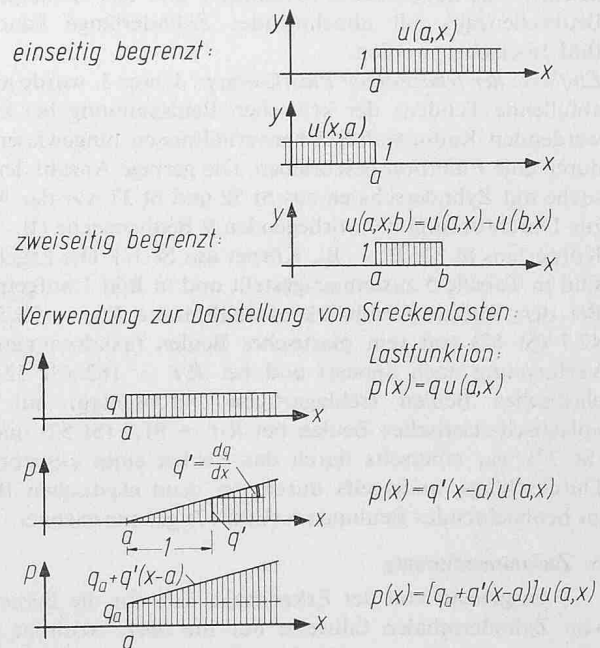


Bild 2. Die unstetige Funktion  $u(a, x)$

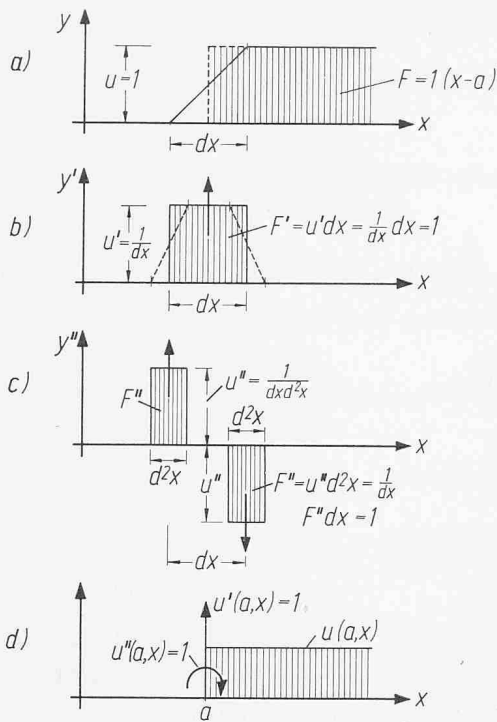


Bild 3. Differenzieren der Funktion  $u(a, x)$ ; geometrische Ableitung

Zur Darstellung einer Einzellast und eines Momentenangriffes müssen wir die Infinitesimalrechnung auf die Funktion  $u(a, x)$  anwenden. Zunächst wollen wir sie differenzieren (Bild 3). Wenn wir geometrisch vorgehen, ziehen wir den Anstieg um 1 an der Stelle  $a$  auf  $dx$  auseinander. In diesem Bereich ist dann die Steigung

$$u'(a, x) = \frac{du(a, x)}{dx} = \frac{1}{dx}$$

sehr gross, aber das Integral ist

$$F' = \int u'(a, x) dx = u(a, x) = 1.$$

Wenn wir daher  $p = P u'(a, x)$  bilden, so stellen wir damit eine auf die Länge  $dx$  verteilte, sehr grosse Gleichlast dar, deren Summe jedoch endlich gleich  $P$  ist. Durch eine weitere Differentiation erhalten wir im An- und Abstieg von  $1/dx$  wiederum zwei Streckenlasten über die Strecken  $d^2x$  von der Grösse  $u''(a, x) = 1/dx^2 d^2x$ . Sie ergeben ein Moment 1, so dass sich durch Multiplikation mit  $M_a$  die Belastungsfunktion angeben lässt, die ein eingepprägtes Moment darstellt:

$$p(x) = M_a u''(a, x).$$

Die Integration von  $u(a, x)$  (Bild 4) liefert:

$$Y_1 = \int u(a, x) dx:$$

$$\text{für } x < a: u = 0: \int_a^x 0 dx = 0,$$

$$\text{für } x > a: u = 1: \int_a^x dx = (x - a);$$

$$Y_1 = (x - a) u(a, x) + k_1.$$

$$Y_2 = \int \int u(a, x) dx^2 = \frac{(x - a)^2}{2} u(a, x) + k_1 x + k_2.$$

$$Y_3 = \int \int \int u(a, x) dx^3 = \frac{(x - a)^3}{2 \cdot 3} u(a, x) + k_1 \frac{x^2}{2} + k_2 x + k_3$$

usw.

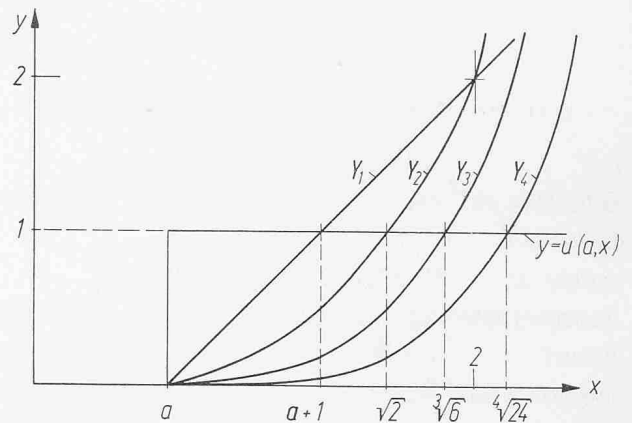


Bild 4. Integration der Funktion  $u(a, x)$ ; Darstellung der Integralfunktionen für  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

Die Konstanten  $k_1, k_2, k_3, \dots$  gelten für den Gesamtstab. Sie gestatten nachträglich die Erfüllung von Randbedingungen am linken Stabende, während die Wirkung der Lasten zunächst auf den rechten Stabteil beschränkt ist.

Im allgemeinen Fall wird die Stabbiegung durch folgende Differentialgleichung der Biegelinie  $y$  beschrieben:

$$A y^{IV} + B y^{III} + C y = p(x).$$

Dabei sind folgende Sonderfälle wichtig:

- $B = C = 0$ : freitragender Balken;
- $C = 0$ : Stab mit Längs- und Querlast;
- $B = 0$ : elastisch gebetteter Stab, rotations-symmetrisch belastete Zylinderschale

Beim freitragenden Balken kann man die Lastfunktion unmittelbar integrieren, wobei die Kontinuität erfüllt ist. Von besonderem Nutzen ist die hier vorgeführte Methode bei den anderen Fällen.

Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:  $y = y_1 + y_2$ . Als Lösung der homogenen Gleichung ist dabei

$$y_1 = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) + c_4 g_4(x).$$

$y_2$  besteht aus der Partikularlösung  $f(x)$ , die im Fall einer Lastunstetigkeit bei  $x = a$  zur Wahrung der Kontinuität ergänzt werden muss:

$$y_2 = f(x) + [d_1 g_1(x - a) + d_2 g_2(x - a) + d_3 g_3(x - a) + d_4 g_4(x - a)] u(a, x).$$

Angepaßte Form der Lösungsfunktionen  $g$ , dadurch ausgezeichnet, daß sie für  $x=0$  bestimmte Werte annehmen:

$$x=0: \begin{matrix} g_1(0)=1 & g_2(0)=0 & g_3(0)=0 & g_4(0)=0 \\ g_1'(0)=0 & g_2'(0)=1 & g_3'(0)=0 & g_4'(0)=0 \\ g_1''(0)=0 & g_2''(0)=0 & g_3''(0)=1 & g_4''(0)=0 \\ g_1'''(0)=0 & g_2'''(0)=0 & g_3'''(0)=0 & g_4'''(0)=1 \end{matrix}$$

Sollen für  $x=0$   $y$  und seine Ableitungen bestimmte Werte  $A$  annehmen, so muß sein

$$x=0: \begin{matrix} y = f(0) + c_1 = A_1, & c_1 = A_1 - f(0) \\ y' = f'(0) + c_2 = A_2, & c_2 = A_2 - f'(0) \\ y'' = f''(0) + c_3 = A_3, & c_3 = A_3 - f''(0) \\ y''' = f'''(0) + c_4 = A_4, & c_4 = A_4 - f'''(0) \end{matrix}$$

$$y = f(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) + c_4 g_4(x)$$

Bild 5

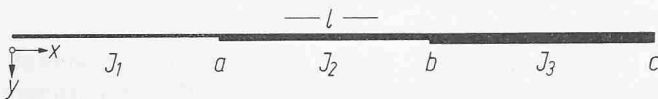
a) Lastunstetigkeiten an der Stelle  $x=a$ .

Zugehörige Lösung:

$$y_2 = u(a, x) [f(x) + d_1 g_1(x-a) + d_2 g_2(x-a) + d_3 g_3(x-a) + d_4 g_4(x-a)]$$

Last	$M_0$	$P$	$q$	$q'$
Lastfunktion $p(x)$	$= M_0 u''(a, x)$	$= P u'(a, x)$	$= q u(a, x)$	$= q'(x-a) u(a, x)$
$f(x)$ für $x=a$ :	0	0	$Aq$	$Bq'$
unstetig ist	$M = -EJ y_2''$	$Q = -EJ y_2'''$	$p$	$p'$
Zusatzglied daher	$d_3 g_3(x-a)$	$d_4 g_4(x-a)$	$d_1 g_1(x-a)$	$d_2 g_2(x-a)$
Beiwert	$d_3 = \frac{M_0}{EJ}$	$d_4 = \frac{P}{EJ}$	$d_1 = -Aq$	$d_2 = -Bq'$
insgesamt $y_2 = u(a, x)$	$\frac{M_0}{EJ} g_3(x-a)$	$\frac{P}{EJ} g_4(x-a)$	$Aq[1-g_1(x-a)]$	$Bq'[(x-a)-g_2(x-a)]$

b) Querschnittsunstetigkeiten bei  $x=a$  und  $x=b$



Nur allg. Lösungsanteil  $y_1$ , Argumente der  $g$  enthalten  $J$ !  
Bereich  $a$  hat nur 2 Beiwerte, da für  $x=0$  stets zwei Nullbedingungen.

$$y_1 = c_1 g_1\left(\frac{x}{l_1}\right) + c_2 g_2\left(\frac{x}{l_1}\right) \quad y_1 = d_1 g_1\left(\frac{x-a}{l_2}\right) + d_2 g_2\left(\frac{x-a}{l_2}\right) \quad y_1 = e_1 g_1\left(\frac{x-b}{l_3}\right) + e_2 g_2\left(\frac{x-b}{l_3}\right) + d_3 g_3\left(\frac{x-a}{l_2}\right) + d_4 g_4\left(\frac{x-a}{l_2}\right) + e_3 g_3\left(\frac{x-b}{l_3}\right) + e_4 g_4\left(\frac{x-b}{l_3}\right)$$

für  $x=a$ :  $y_1 = c_1 g_1\left(\frac{a}{l_1}\right) + c_2 g_2\left(\frac{a}{l_1}\right) = d_1$

$y_1' = c_1 g_1'\left(\frac{a}{l_1}\right) + c_2 g_2'\left(\frac{a}{l_1}\right) = d_2$

$y_1'' = c_1 g_1''\left(\frac{a}{l_1}\right) + c_2 g_2''\left(\frac{a}{l_1}\right) = d_3$

$y_1''' = c_1 g_1'''\left(\frac{a}{l_1}\right) + c_2 g_2'''\left(\frac{a}{l_1}\right) = d_4$

für  $x=b$ :  
 $y_1 = d_1 g_1\left(\frac{b-a}{l_2}\right) + d_2 g_2\left(\frac{b-a}{l_2}\right) = e_1$   
 $y_1' = d_1 g_1'\left(\frac{b-a}{l_2}\right) + d_2 g_2'\left(\frac{b-a}{l_2}\right) = e_2$   
 $y_1'' = d_1 g_1''\left(\frac{b-a}{l_2}\right) + d_2 g_2''\left(\frac{b-a}{l_2}\right) = e_3$   
 $y_1''' = d_1 g_1'''\left(\frac{b-a}{l_2}\right) + d_2 g_2'''\left(\frac{b-a}{l_2}\right) = e_4$

Alle  $e$  lassen sich so auf die  $c_1$  und  $c_2$  zurückführen. Diese werden aus den Bedingungen für  $x=l$  bestimmt. Alle  $d$  und  $e$  ergeben sich dann aus Rekursion.

Bild 6. Herstellung der Kontinuität bei Unstetigkeiten

Homogene Differentialgleichung der Biegelinie:

$$y'''' + 4 \frac{y}{l^2} = 0, \text{ „charakteristische Länge“ } L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{C}}$$

Allg. Lösung:  $y_1 = c_1 g_1\left(\frac{x}{l}\right) + c_2 g_2\left(\frac{x}{l}\right) + c_3 g_3\left(\frac{x}{l}\right) + c_4 g_4\left(\frac{x}{l}\right)$

für  $x=0$  ist:

$g_1\left(\frac{x}{l}\right) = \cosh \frac{x}{l} \cos \frac{x}{l}$	$g$	$g'$	$g''$	$g'''$	Dim.
$g_2\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{2} (\cosh \frac{x}{l} \sin \frac{x}{l} + \sinh \frac{x}{l} \cos \frac{x}{l})$	1	0	0	0	1
$g_3\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{l^2}{2} \sinh \frac{x}{l} \sin \frac{x}{l}$	0	1	0	0	$m$
$g_4\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{l^3}{4} (\cosh \frac{x}{l} \sin \frac{x}{l} - \sinh \frac{x}{l} \cos \frac{x}{l})$	0	0	1	0	$m^2$
	0	0	0	1	$m^3$

Differentiationsschema:

$$\begin{aligned} g_1''' &= -\frac{4}{l^4} g_4'' = -\frac{4}{l^4} g_4' = -\frac{4}{l^4} g_4 & \frac{1}{m^3} \\ g_2''' &= g_1'' = -\frac{4}{l^4} g_4' = -\frac{4}{l^4} g_4 & \frac{1}{m^2} \\ g_3''' &= g_2'' = g_1' = -\frac{4}{l^4} g_4 & \frac{1}{m} \\ g_4''' &= g_3'' = g_2' = g_1 & 1 \end{aligned}$$

Bem.: Für Balkenlänge  $l > 3L$  benutzt man andere Funktionen!

Bild 7. Lösungsfunktionen für den Fall  $B = 0$  (elastisch gebetteter Stab)

Bodenreaktion  $p^* = Cy$ ;  $C$  Bettungszahl.

Vollständige Differentialgleichung:

$$y'''' + 4 \frac{y}{l^2} = \frac{p(x)}{EJ}; \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{C}}$$

Allg. Lösung: Randbed.  $x=0$ :  $y_1'' = -\frac{M}{EJ} = c_3 = 0$ ,

$y_1''' = -\frac{Q}{EJ} = c_4 = 0$ ,

daher  $y_1 = c_1 g_1\left(\frac{x}{l}\right) + c_2 g_2\left(\frac{x}{l}\right)$ .

Zusatzlösungen  $y_2$  für Belastungen in  $x=a$ :

	$p(x)$	$f(x)$	$y_2$	$y_2'$	$y_2''$	$y_2'''$
	$M_0 u''(a, x)$	0	0	0	$\frac{M_0}{EJ}$	0
	$y_2 = \frac{M_0}{EJ} g_3\left(\frac{x-a}{l}\right) u(a, x)$	0	0	0	0	$\frac{P}{EJ}$
	$P u'(a, x)$	0	0	0	0	0
	$y_2 = \frac{P}{EJ} g_4\left(\frac{x-a}{l}\right) u(a, x)$	0	0	0	0	0
	$q u(a, x)$	$\frac{q}{l}$	$-\frac{q}{l}$	0	0	0
	$y_2 = \frac{q}{l} [1 - g_1\left(\frac{x-a}{l}\right)] u(a, x)$	$\frac{q}{l}$	0	$-\frac{q}{l}$	0	0
	$q'(x-a) u(a, x)$	$\frac{q'}{l}$	0	$-\frac{q'}{l}$	0	0
	$y_2 = \frac{q'}{l} [(x-a) - g_2\left(\frac{x-a}{l}\right)] u(a, x)$	$\frac{q'}{l}$	0	$-\frac{q'}{l}$	0	0

Bild 8. Durchgehend elastisch gebetteter Balken

Homogene Differentialgleichung der Biegelinie:

$$y'' + \frac{y}{l^2} = 0, \text{ „charakteristische Länge“ } L = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$$

$P$ : Langskraft

Allg. Lösung:  $y_1 = c_1 g_1\left(\frac{x}{l}\right) + c_2 g_2\left(\frac{x}{l}\right)$

für  $x=0$  ist:

$g_1\left(\frac{x}{l}\right) = \cos \frac{x}{l}$	$g$	$g'$
$g_2\left(\frac{x}{l}\right) = L \sin \frac{x}{l}$	1	0
	0	1

Differentiationsschema:

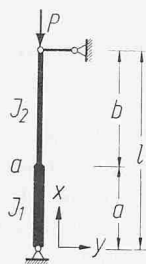
$$g_1''' = -\frac{1}{l^2} g_2'' = -\frac{1}{l^2} g_2' = -\frac{1}{l^4} g_2$$

$$g_2''' = g_1'' = -\frac{1}{l^2} g_2' = -\frac{1}{l^2} g_2$$

Bild 9. Lösungsfunktionen für den Fall  $C = 0$  (druckbeanspruchter Stab)

Die Konstanten  $c$  werden aus den Bedingungen  $A_1$  bis  $A_4$  bestimmt, die der Größe  $y$  und ihren ersten drei Ableitungen an den Stellen  $x=0$  und  $x=l$  auferlegt werden. Man formuliert die Funktionen  $g$  mit Rücksicht auf eine bequeme Rechnung so, dass für  $x=0$  die Funktionen  $g$  und ihre Ableitungen den Wert 0 oder 1 annehmen (Bild 5). Ich weise ausdrücklich darauf hin, dass die Funktionen  $g$  ebenso wie die Ableitungen von  $y$  dimensionsbehaftet sind, und zwar derart, dass die gewünschten «1»-Werte der Funktionen dimensionslos sind. Nach Bestimmung der Konstanten  $c$  erhält man dann  $y$  in übersichtlicher Form. Auf diese Weise wird die Formulierung von Zusatzfunktionen bei Lastunstetigkeiten wesentlich erleichtert. Auch die Erfassung von Querschnittsunstetigkeiten wird dadurch vorbereitet. Wie man vorzugehen hat, zeigt Bild 6a bei Lastunstetigkeiten und konstantem Stabquerschnitt und Bild 6b bei unstetigem Querschnittswechsel.

Die allgemeinen Lösungsfunktionen beispielsweise für einen elastisch gebetteten Stab zeigt Bild 7. In Bild 8 ist die Lösung für den Stab mit verschiedenen Lasten dargestellt. Da für den Stabanfang  $M = -EJ y_1'' = 0$  wie auch  $Q = -EJ y_1''' = 0$  sein sollen, müssen die Beiwerte  $c$  derjenigen Funktionen  $g$ , die für  $x=0$  nicht Null sind, ver-



$$y_b = d_2 L_2 \sin \frac{x-a}{L_2} + d_1 \cos \frac{x-a}{L_2}$$

$$y_a = c_2 L_1 \sin \frac{x}{L_1} + c_1 \cos \frac{x}{L_1}$$

für  $x=0$ :  $y_a=0$ ,  $c_1=0$

Übergangsbedingung für  $x=a$ :

$$y_b = d_1 = y_a = c_2 L_1 \sin \alpha, \quad d_1 = c_2 L_1 \sin \alpha,$$

$$y'_b = d_2 = y'_a = c_2 \cos \alpha, \quad d_2 = c_2 \cos \alpha,$$

damit wird:  $y_b = c_2 L_1 [\sin \alpha \cos \frac{x-a}{L_2} + \lambda \cos \alpha \sin \frac{x-a}{L_2}]$ ,  $\lambda = \frac{L_2}{L_1} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}$ .

Randbed.  $x=l$ :  $y_b = c_2 L_1 [\sin \alpha \cos \beta + \lambda \cos \alpha \sin \beta] = 0$ ,  $\alpha = \frac{a}{L_1}$ ;  $\beta = \frac{b}{L_2}$ .

$y$  nur dann  $=0$ , wenn  $[\ ] = 0$ , d. h.  $\lambda = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$

oder  $\lambda = -\frac{\operatorname{tg} \pi \sqrt{P/P_{E1}}}{\operatorname{tg} \pi \sqrt{P/P_{E2}}}$ ,  $P_{E1} = \pi^2 \frac{EJ_1}{a^2}$ ;  $P_{E2} = \pi^2 \frac{EJ_2}{b^2}$ .

Beispiel:  $a=b$ ;  $J_1=2J_2$ ;  $\lambda = \sqrt{2}$  ergibt  $P=0,183 P_{E1}$  durch Probieren.

Bild 10. Druckstab mit wechselndem Querschnitt und zentrischer Last  $P$

schwinden, das heisst  $c_3 = 0$  und  $c_4 = 0$ . Übrig bleibt ein zweigliedriger Ausdruck. Wir haben nun einen zweiten Anteil  $y_2$  hinzuzufügen, der die Wirkung der Last in  $x = a$  beschreibt, mithin die Partikularlösung darstellt. Seine Gültigkeit ist auf  $x > a$  beschränkt, so dass die Differentialgleichung lautet

$$y_2'''' + 4 \frac{y_2}{L^4} = \frac{p(x)}{EJ} = \frac{p(x)}{EJ} u(a, x).$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden aus den Bedingungen für das rechte Stabende bestimmt, wo  $M = -EJy'' = 0$  und  $Q = -EJy''' = 0$  gefordert wird.

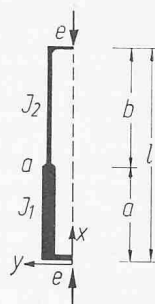
Bild 9 zeigt die Lösungsfunktionen für einen Druckstab ohne Querlast. Wenn ein solcher aus zwei Abschnitten mit verschiedenen Querschnitten besteht (Bild 10), ändert sich der Koeffizient  $J$  der Differentialgleichung an der Bereichsgrenze, und es wechselt das Argument der Lösungsfunktion  $x/L$ . Man muss daher  $x$  für die beiden Bereiche getrennt ansetzen und die beschränkte Gültigkeit für einen Bereich  $a$  bis  $b$  im allgemeinen Falle durch

$$y = [e_1 g_1(x-a) + e_2 g_2(x-a)] [u(a, x) - u(b, x)]$$

kennzeichnend machen. Statt der Differenz der Werte  $u$  kann man auch schreiben  $u(a, x, b)$ .

## Anwendungsgebiete der Kryotechnik

An einem höchst beachtenswerten Vortrag mit dem Titel «Zukunftsaspekte der Kältetechnik», den Prof. Dr.-Ing. Th. E. Schmidt, Universität Stuttgart, an der Fachtagung Klima- und Kältetechnik 1970 am 29. April in Hannover gehalten hatte (veröffentlicht in «Kältetechnik – Klimatisierung» 22 (1970), H. 9, S. 274–278, wird unter anderem auf jene interessanten Anwendungen der Tieftemperaturtechnik (Kryotechnik) hingewiesen, die auf der Feststellung beruhen, dass der elektrische Widerstand von Metallen bei sehr tiefen Temperaturen nahezu verschwindet. Heute sind über hundert supraleitende Verbindungen bekannt. Spulen aus solchem Material gestatten etwa die



$$y_b = d_1 \cos \frac{x-a}{L_2} + d_2 L_2 \sin \frac{x-a}{L_2}$$

$$y_a = c_1 \cos \frac{x}{L_1} + c_2 L_1 \sin \frac{x}{L_1}$$

für  $x=0$ :  $y_a=e$ ,  $c_1=e$

Übergangsbedingung für  $x=a$ :

$$y_b = d_1 = y_a = e \cos \alpha + c_2 L_1 \sin \alpha,$$

$$y'_b = d_2 = y'_a = -\frac{e}{L_1} \sin \alpha + c_2 \cos \alpha,$$

damit wird:  $y_b = (c_2 \cos \alpha - \frac{e}{L_1} \sin \alpha) L_2 \sin \frac{x-a}{L_2} + (c_2 L_1 \sin \alpha + e \cos \alpha) \cos \frac{x-a}{L_2}$ ,

Randbed.  $x=l$ :  $y_b=e$  liefert

$$c_2 = \frac{e}{L_1} \frac{1 + \lambda \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\lambda \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta};$$

wenn  $\lambda = \lambda_K$ , d. h.  $P = P_K$  (zentrische Knicklast), wird der Nenner  $=0$  und  $c_1$  sowie  $y \rightarrow \infty$ .

Bild 11. Druckstab mit wechselndem Querschnitt und exzentrischer Last  $P$

Für unseren Fall setzen wir wieder die Funktionen in der angepassten Form an:

$$y_1 = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$$

$$y_2 = d_1 g_1(x-a) + d_2 g_2(x-a).$$

An der Nahtstelle müssen beide Anteile mit Ordinate und Neigung ineinander übergehen. Dadurch lassen sich die Beiwerte  $d$  auf die  $c$  zurückführen, allgemein gesprochen auf diejenigen des vorhergehenden Bereiches und damit die aller folgenden Bereiche auf die des ersten. Die Randbedingungen für  $x = l$  liefern die kritische Last  $P$  oder bei zusätzlicher Querbelastung, die sich leicht in den Rechnungsgang einbauen lässt, die Werte von  $c_1$  und  $c_2$ , wie in Bild 11 dargestellt ist.

Der Verfasser wird die hier im Grundriss gezeigte Methode in einer in Kürze erscheinenden Broschüre ausführlicher darstellen und verschiedene Anwendungsgebiete behandeln.

### Literaturverzeichnis

- [1] Mikusinski, Jan: Operatorenrechnung. Berlin 1957, VEB-Verlag.
- [2] Dimitrov, Nikola: Operatorenstatik. Ein Beitrag zur Algebra der Gitterpunktfunktionen. Fortschrittbericht VDI-Zeitschrift, Reihe 4, Nr. 4, Jan. 1968. Düsseldorf, VDI-Verlag 1968.
- [3] Pilkey, W. D.: Clebsch's method for beam deflections. «Journal of Engineering Education» 54 (1964), Nr. 5, S. 170–174.

DK 621.56.004

zehnfache Stromdichte und ein zehnfaches Magnetfeld; es lässt sich somit die hundertfache Leistung verwirklichen.

In England wurde ein Elektromotor mit supraleitender Feldwicklung entwickelt, der 2800 kW bei 110 U/min und einem Wirkungsgrad von 97 % leistet. Vorteilhaft ist diese Bauart für Maschinen grosser Leistung und niedriger Drehzahl, da sie geringes Gewicht und kleine Abmessungen ergibt und daher wirtschaftlich überlegen sein kann. Um die Spulen in supraleitendem Zustand zu erhalten, genügt deren Kühlung auf 4,4 K, wozu nur ein sehr geringer Leistungsaufwand erforderlich ist. Man hofft bis zum Jahre 2000 Generatoren für Leistungen von 10 000 MW bauen zu können.