

Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103 (1985)
Heft: 3: Pierre Dubas zum 60. Geburtstag

Artikel: Der Druckstab mit Querbelastrung: Theorie des geraden, unverschieblich gelagerten, elastisch eingespannten Druckstabes mit Querbelastrung
Autor: Valtinat, Günther
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-75711>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Druckstab mit Querbelastung

Theorie des geraden, unverschieblich gelagerten, elastisch eingespannten Druckstabes mit Querbelastung

Von Günther Valtinat

Es werden Hilfsmittel erarbeitet, die es gestatten, die bei einem einfeldrigen Stab mit definierten Belastungs- und Verformungszuständen nach Theorie I. Ordnung infolge zusätzlichen Aufbringens einer Druckkraft an den elastisch eingespannten Stabenden auftretenden Zusatzmomente einfach und schnell zu errechnen. Auf diese Weise könnte der Effekt aus Theorie II. Ordnung bei Rahmentragwerken näherungsweise über die elastische Einspannung der Stiele in die Riegel erfaßt werden.

Ableitung aus Grundbelastungs- und Verformungszuständen

Die Theorie des geraden, unverschieblich gelagerten, elastisch eingespannten Druckstabes unter Querbelastung (Bild 1) wird für folgende Grundbelastungs- und Verformungszustände abgeleitet:

1. Querbelastung q ,
2. Belastungsmoment M_{il} am linken Auflager, Stabende i ,
3. Belastungsmoment M_{kl} am rechten Auflager, Stabende k ,
4. Ungewollte Imperfektion (mit Parabelform), Mittenauslenkung u_0 ,
5. Konstante Drucknormalkraft.

Die Widerstände sind gegeben durch:

1. eine konstant durchlaufende Biegesteifigkeit EI ,
2. elastische Einspannungen an den Stabenden mit linearen Federn, Kennwerte k_i und k_k .

Dieser Stab könnte als ein aus einem seitlich unverschieblichen Rahmen geschnittener Stiel gedacht sein, der die obengenannten Belastungen erfährt, der aber auch durch seine biegesteife Verbindung mit den angrenzenden Riegeln von hier aus Reserven mobilisieren kann.

Für q , M_{il} und M_{kl} werden im ersten Teil der Ableitungen die Durchbiegungen ohne federnde Einspannung berechnet und um die Vorauslenkung u vergrößert. Für den zweiten Teil wird die Normalkraft N aufgebracht, gleichzeitig hiermit, aber erst jetzt, werden die elastischen Federeinspannungen als wirksam angesetzt. Es ergeben sich aus den Verdrehungen dieser Federn infolge N zusätzliche Endmomente ΔM_i und ΔM_k . Mit Aufbringen der Normalkraft verändern sich die Verformungs- und Schnittgrößenzustände y_i , y'_i , M_i , Q_i und q_i nach der Theorie I. Ordnung (ohne Normalkrafteinfluß) sowie u , u' , Nu , Nu' und Nu'' mit den Zuwächsen Δy , $\Delta y'$, ΔM , ΔQ und Δq zu denjenigen nach Theorie II. Ordnung y_{ii} , y'_{ii} , M_{ii} , Q_{ii} und q_{ii} (Bild 3) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (1 \text{ a-c}) \quad y_{ii} &= y_i + u + \Delta y &&= y + \Delta y \\
 &= y_i + u' + \Delta y' &&= y' + \Delta y' \\
 M_{ii} &= -EI y''_i + Nu - EI \Delta y'' &&= M + \Delta M \\
 Q_{ii} &= -EI y'''_i + Nu' - EI \Delta y''' &&= Q + \Delta Q \\
 q_{ii} &= +EI y''''_i - Nu'' + EI \Delta y'''' &&= q + \Delta q.
 \end{aligned}$$

Die Verformungen und Schnittgrößen nach I. Ordnung ohne Normalkrafteinfluß können in allgemeiner Form

$$\begin{aligned}
 y_i &= \sum_0^n a_j \left(\frac{x}{\ell}\right)^j = \frac{M}{N_{Ez}} A \sum_0^n A_j \left(\frac{x}{\ell}\right)^j \\
 y'_i &= \frac{1}{\ell} \sum_1^n a_j j \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-1} = \frac{M}{N_{Ez} \ell} A \sum_1^n A_j j \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-1} \\
 (2 \text{ a-e}) \quad M_i &= -EI y''_i = -\frac{EI}{\ell^2} \sum_2^n a_j j(j-1) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-2} = \\
 &= -\frac{M}{\pi^2} A \sum_2^n A_j j(j-1) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-2} \\
 Q_i &= -EI y'''_i = -\frac{EI}{\ell^3} \sum_3^n a_j j(j-1)(j-2) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-3} = \\
 &= -\frac{M}{\pi^2} \frac{A}{\ell} \sum_3^n A_j j(j-1)(j-2) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-3} \\
 q_i &= EI y''''_i = \frac{EI}{\ell^4} \sum_4^n a_j j(j-1)(j-2)(j-3) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-4} = \\
 &= \frac{M}{\pi^2} \frac{A}{\ell^2} \sum_4^n A_j j(j-1)(j-2)(j-3) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{j-4}
 \end{aligned}$$

angesetzt werden, bei Belastung des Stabes durch eine Gleichstreckenlast $q = \text{konst}$ ist n höchstens gleich 4, bei Endmomenten ist n höchstens gleich 3. Teilt man die Durchbiegung – wie im rechten Teil der Gleichung (2a) geschehen – auf die einzelnen Einflüsse auf und zieht ferner den Faktor $\ell^2/(\pi^2 EI) = 1/N_{Ez}$ heraus, so ergibt sich für

$$\begin{aligned}
 (3 \text{ a-d}) \quad q: \quad y_{i,q} &= \frac{q \ell^2 \pi^2}{N_{Ez} 24} \sum_0^4 A_{j,q} \left(\frac{x}{\ell}\right)^j \\
 M_{ii}: \quad y_{i,M_i} &= \frac{M_{ii} \pi^2}{N_{Ez} 6} \sum_0^3 A_{j,M_i} \left(\frac{x}{\ell}\right)^j
 \end{aligned}$$

$$M_{ki} \cdot y_{i, Mk} = \frac{M_{ki} \pi^2}{N_{E2}} \sum_0^3 A_{j, Mk} \left(\frac{x}{l}\right)^j$$

Die Vorverformung lautet analog zu (2a)

$$u_0: u = \frac{M}{N_{E2}} A \sum_0^2 A_j \left(\frac{x}{l}\right)^j$$

Die Größen M , A , und die dimensionslosen Vorzahlen A_j aus (2a) rechts sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Es bedeutet keine Schwierigkeit, Querlasten q allgemein anzusetzen.

Anstelle der Gleichung (3d) kann die Gleichung (3a) verwendet werden, die Vorauslenkung u_0 wird dann durch eine äquivalente Gleichstreckenlast $q = q_u$ mit gleicher Mitteldurchbiegung ersetzt

$$(3e) \quad u = \frac{q_u \cdot l^2 \pi^2}{N_{E2} \cdot 24} \sum_0^4 A_{j, q} \left(\frac{x}{l}\right)^j$$

mit

$$(3f) \quad q_u = \frac{384 EI u_0}{5 l^4}$$

Der Einfluß der dann vorliegenden Durchbiegung als Parabel 4. Ordnung gegenüber derjenigen 2. Ordnung ist vernachlässigbar.

Es ist auch möglich, die Gleichung (3d) durch ein konstantes Moment, d. h. eine Kombination der Gleichungen (3b, c) zu ersetzen; dann bleibt die Durchbiegung in Form einer Parabel 2. Ordnung erhalten. Es ergäbe sich

$$(3g) \quad u = y_{i, M_{ii}} + y_{i, M_{ki}} = \frac{M_{ii} \pi^2}{N_{E2}} \sum_0^3 A_{j, M_i} \left(\frac{x}{l}\right)^j + \frac{M_{ki} \pi^2}{N_{E2}} \sum_0^3 A_{j, M_k} \left(\frac{x}{l}\right)^j$$

mit

$$(3h) \quad M_{ii} = -M_{ki} = u_0 N_{E2} \frac{8}{\pi^2}$$

Lösungen

Für die Zuwächse bei den Verformungen und Schnittgrößen ist neben der Stablänge, der Biegesteifigkeit, den Einspanngraden und der Normalkraft nur noch der Biegeverlauf $y = y_j + u$ maßgebend, deshalb wird am verformten System nach Bild 3 das Zusatzmoment

$$(4) \quad \Delta M(x) = -(\Delta M_i + \Delta M_k) \left(\frac{x}{l}\right) + \Delta M_i + N(y + \Delta y)$$

ermittelt, und aus $-EI \Delta y'' = \Delta M$ folgt die Differentialgleichung für Zusatzbiegeline

$$(5) \quad \Delta y'' + \frac{N}{EI} \cdot \Delta y = -\frac{\Delta M_i}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{\Delta M_k}{EI} \left(\frac{x}{l}\right) - \frac{N}{EI} y.$$

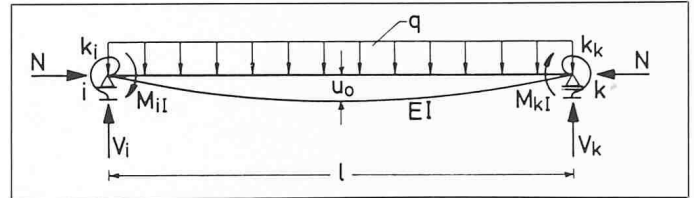


Bild 1. Unverschieblich gelagerter elastisch eingespannter Druckstab mit den Grundlastzuständen: 1. Querbelastung q ; 2. Belastungsmoment M_{ij} am linken Auflager, Stabende i ; 3. Belastungsmoment M_{ki} am rechten Auflager, Stabende k ; 4. Ungewollte Vorverformung in Parabelform, Mittelauslenkung u_0 ; 5. konstante Drucknormallast

Bild 2. Schnittgrößen und Biegelinien-Verlauf nach Theorie I. Ordnung ohne Normalkrafteinfluß. Positive Drehrichtung für M und y' im Uhrzeigersinn

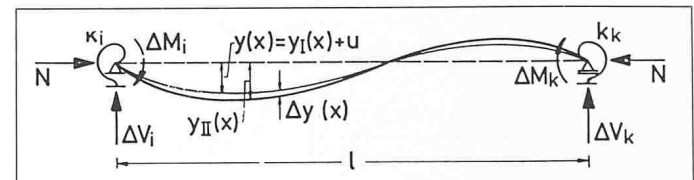
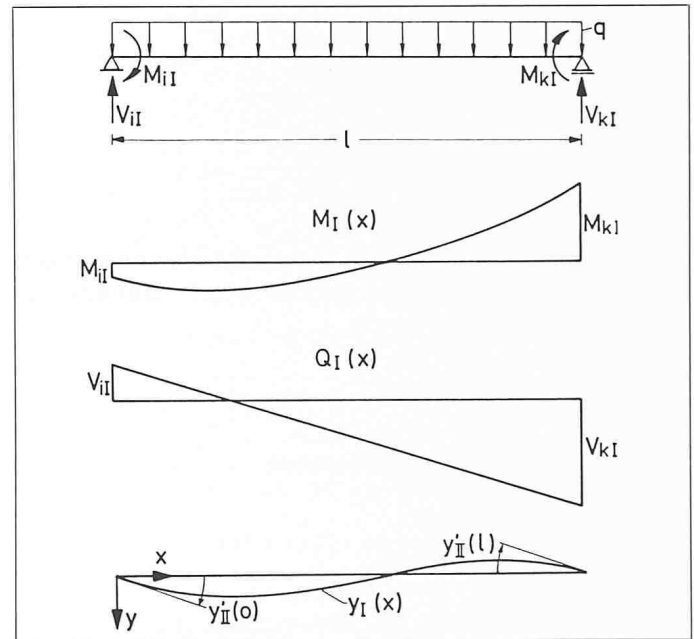


Bild 3. Aufbringen der Last N auf den Ausgangsverformungszustand (= Biegezustand I. Ordnung nach Bild 2 und Imperfektion) und gleichzeitiges Anbringen der Federeinspannungen. Resultierende Zusatzschnittgrößen ΔM_i , ΔM_k , ΔV_i , ΔV_k Zusatzverformung $\Delta y(x)$

Tabelle 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr	Fall	M	N_{E2}	A	$\left(\frac{x}{l}\right)^0$ A_0	$\left(\frac{x}{l}\right)^1$ A_1	$\left(\frac{x}{l}\right)^2$ A_2	$\left(\frac{x}{l}\right)^3$ A_3	$\left(\frac{x}{l}\right)^4$ A_4
1		$q l^2$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2}{24}$	0	1	0	-2	1
2		M_{ii}	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	0	2	-3	1	0
3		M_{ki}	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	0	-1	0	1	0
4a		$u_0 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	4	0	1	-1	0	0
4b		$q_n l^2 = \frac{384 EI}{5l} \frac{1}{n}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2}{24}$	0	1	0	-2	1
4c		$M_{iu} = u_0 N_{E2} \frac{8}{\pi^2}$ $M_{ku} = -u_0 N_{E2} \frac{8}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	0	2	-3	1	0

Die allgemeine Lösung

$$(6) \quad \Delta y = B_1 \sin \varepsilon \frac{x}{\ell} + B_2 \cos \varepsilon \frac{x}{\ell} + \sum_0^n c_j \left(\frac{x}{\ell}\right)^j \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \ell \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

führt nach Differentiation und Einsetzen in die Differentialgleichungen über den Koeffizientenvergleich zu den Größen c_j bzw. d_j

$$(6 \text{ a-c}) \quad \begin{aligned} c_n &= d_n & n \geq 2 \\ c_1 &= \frac{\Delta M_i}{N} + \frac{\Delta M_k}{N} + d_1 \\ c_0 &= -\frac{\Delta M_i}{N} + d_0 \end{aligned}$$

mit

$$(7) \quad d_n = -\left[a_n + \frac{1}{\varepsilon^2} (n+2)(n+1) d_{n+2} \right]$$

bzw. getrennt nach den ersten vier Grundbelastungszuständen mit den dimensionslosen Größen A_j nach (2a) bzw. Tabelle 1 und

$$(8) \quad d_n = \frac{M}{N \varepsilon^2} A D_n$$

zu den dimensionslosen Koeffizienten

$$(9) \quad D_n = -\left[A_n + \frac{1}{\varepsilon^2} (n+2)(n+1) D_{n+2} \right]$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung (5)

$$(10) \quad \Delta y = B_1 \sin \varepsilon \frac{x}{\ell} + B_2 \cos \varepsilon \frac{x}{\ell} - \frac{\Delta M_i}{N} + \left(\frac{\Delta M_i}{N} + \frac{\Delta M_k}{N} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) + \sum_0^n d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^j$$

Die noch offenen Konstanten B_1 und B_2 können mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden. Es folgen aus

$$(11 \text{ a}) \quad \Delta y(x=0) = 0 : B_2 = \frac{\Delta M_i}{N} - d_0$$

$$(11 \text{ b}) \quad \Delta y(x=\ell) = 0 : B_1 = -\frac{1}{\sin \varepsilon} \left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right]$$

und damit die vollständige Lösung und ihre Ableitungen:

Bei der Lösung und ihren Ableitungen handelt es sich ausschließlich um die jeweiligen Zuwächse, die, zu den Verläufen aus I. Ordnung und der Vorverformung addiert, die Verläufe II. Ordnung ergeben.

Die Biegemomente ΔM_i und ΔM_k in den Gleichungen (12 a–e) entstehen dadurch, daß gleichzeitig mit dem Aufbringen der Druckkraft N auf das System Federgelenke in i und k angebracht werden, die die den zusätzlichen Verformungen entgegenwirkenden Momente erzeugen. Ihre Größe ist über die Federwerte k_i und k_k mit den Stabendverdrehungen $\Delta \varphi_i$ und $\Delta \varphi_k$ verknüpft. Berücksichtigt man die in den Bildern 2 und 3 festgelegten positiven Richtungen, so ergeben sich folgende Bedingungen zwischen ΔM_i und $\Delta \varphi_i$ bzw. ΔM_k und $\Delta \varphi_k$

$$(13 \text{ a, b}) \quad \begin{aligned} \Delta M_i &= -k_i \Delta \varphi_i = -k_i \Delta y'(x=0) \\ \Delta M_k &= -k_k \Delta \varphi_k = -k_k \Delta y'(x=\ell) \end{aligned}$$

Die Momente können jeweils durch die zweite Ableitung $\Delta y''$ ausgedrückt werden, hierbei ist zu beachten, daß zur Einhaltung der festgelegten Vorzeichen $\Delta M_k = +EI \Delta y''$ ist. Es ergibt sich nach Umformung

$$(14 \text{ a, b}) \quad \begin{aligned} EI \Delta y''(x=0) &= +k_i \Delta y'(x=0) \stackrel{!}{=} -\Delta M_i \\ EI \Delta y''(x=\ell) &= -k_k \Delta y'(x=\ell) \stackrel{!}{=} +\Delta M_k \end{aligned}$$

Nebenüberlegungen unter Berücksichtigung der Gleichung (2a) führen zu

$$(15 \text{ a-d}) \quad \begin{aligned} EI \Delta y''(x=0) &= -\Delta M_i - a_0, \text{ d. h. } a_0 \stackrel{!}{=} 0; \\ EI \Delta y''(x=\ell) &= \Delta M_k - N \sum_0^n a_j, \text{ d. h. } \sum_0^n a_j \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Nach Umformung ergibt sich aus den Gleichungen (14 a, b) das Gleichungssystem zur Bestimmung von ΔM_i und ΔM_k

$$(16 \text{ a}) \quad \Delta M_i \left[\frac{k_i}{N \ell} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] + \Delta M_k \left[\frac{k_k}{N \ell} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right] = k_i \left[\frac{1}{\ell} \left(-d_0 \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon - d_1 + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sum_0^n d_j \right) \right] + \left[d_0 N + 2 \frac{EI}{\ell^2} d_2 \right],$$

$$(16 \text{ b}) \quad \Delta M_i \left[\frac{k_k}{N \ell} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right] + \Delta M_k \left[\frac{k_k}{N \ell} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] = k_k \left[\frac{1}{\ell} \left(-d_0 \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon \sum_0^n d_j - \sum_0^n j d_j \right) \right] + \left[-N \sum_0^n d_j - \frac{EI}{\ell^2} \sum_2^n j(j-1) d_j \right].$$

$$(12 \text{ a}) \quad \Delta y = -\left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right] \frac{\sin \varepsilon \frac{x}{\ell}}{\sin \varepsilon} + \left[\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right] \cos \varepsilon \frac{x}{\ell} - \frac{\Delta M_i}{N} + \left(\frac{\Delta M_i}{N} + \frac{\Delta M_k}{N} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) + \sum_0^n d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^j$$

$$(12 \text{ b}) \quad \Delta y' = -\left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right] \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right) \frac{\cos \varepsilon \frac{x}{\ell}}{\sin \varepsilon} - \left[\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right] \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right) \sin \varepsilon \frac{x}{\ell} + \frac{\Delta M_i}{N \ell} + \frac{\Delta M_k}{N \ell} + \frac{1}{\ell} \sum_1^n j d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^{j-1}$$

Wegen der Gleichungen (15 c, d) sind die jeweils zweiten Klammern auf der rechten Seite Null, sie wurden hier nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Mit Einführung folgender Abkürzungen

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{N}{N_{E2}} \\ \varepsilon &= \pi \cdot \sqrt{\chi} \\ (17 \text{ a-e}) \quad \beta_i &= \frac{k_i}{N_{E2} \ell}, \quad \beta_k = \frac{k_k}{N_{E2} \ell}, \\ \frac{\beta_i}{\chi} &= \frac{k_i}{N \ell}, \quad \frac{\beta_k}{\chi} = \frac{k_k}{N \ell}, \\ \Delta m_i &= \frac{\Delta M_i}{M}, \quad \Delta m_k = \frac{\Delta M_k}{M} \end{aligned}$$

ferner unter Berücksichtigung der Kenngröße A und der Bezugsgröße M (Tabelle 1) für Δm_i und Δm_k sowie unter Einführung der Schreibweise mit den Koeffizienten A_j nach (2 a) und D_j nach (9) kann das Gleichungssystem getrennt nach den Einzelbelastungen q , M_{iI} , M_{kI} bzw. der Vorverformung u_0 allgemein geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta m_i \left[\frac{\beta_i}{\chi} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] + \Delta m_k \left[\frac{\beta_k}{\chi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right] &= \\ = \beta_i A \left[-D_0 \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon - D_1 + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sum_0^n D_j \right] \end{aligned}$$

(18 a, b)

$$\begin{aligned} \Delta m_i \left[\frac{\beta_k}{\chi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right] + \Delta m_k \left[\frac{\beta_k}{\chi} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] &= \\ = \beta_k A \left[-D_0 \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon \sum_0^n D_j - \sum_1^n j D_j \right] \end{aligned}$$

oder mit

$$G_{ii} = G_{kk} = \frac{1}{\chi} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon)$$

(19 a, b)

$$G_{ik} = G_{ki} = \frac{1}{\chi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right)$$

und

$$G_i = -D_0 \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon - D_1 + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sum_0^n D_j$$

(19 c, d)

$$G_k = -D_0 \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \sum_0^n D_j \cdot \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon - \sum_1^n j D_j$$

in der abgekürzten Form

$$\begin{aligned} (\beta_i G_{ii} + 1) \Delta m_i + \beta_i G_{ik} \Delta m_k &= \beta_i A G_i \\ (\beta_k G_{ki} \Delta m_i + (\beta_k G_{kk} + 1) \Delta m_k &= \beta_k A G_k \end{aligned}$$

(20 a, b)

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} \Delta m_i &= A \beta_i \frac{G_i (\beta_k G_{kk} + 1) - \beta_k G_k G_{ik}}{(\beta_i G_{ii} + 1) (\beta_k G_{kk} + 1) - \beta_i \beta_k G_{ik} G_{ki}} \\ \Delta m_k &= A \beta_k \frac{-\beta_i G_i G_{ki} + G_k (\beta_i G_{ii} + 1)}{(\beta_i G_{ii} + 1) (\beta_k G_{kk} + 1) - \beta_i \beta_k G_{ik} G_{ki}} \end{aligned}$$

(21 a, b)

Die über M auf die einzelnen Belastungen bezogenen Zusatzstabendmomente Δm_i und Δm_k sind von A , über die G -Werte von den D_j - und diese wieder von den A_j -Werten sowie über die β -Werte von den elastischen Federkonstanten k_i , k_k und schließlich über χ von der Druckkraft abhängig, deshalb ist im Gegensatz zu dem Gleichungssystem (16 a, b) die Lösung nach den Gleichungen (21 a, b) für jeden Belastungszustand einzeln auszuwerten und zu superponieren. Von den ersten vier Grundbelastungszuständen q , M_{iI} , M_{kI} bzw. der Vorauslenkung u brauchen nur zwei weiterhin betrachtet zu werden: nämlich q und M_{iI} ; die Lösungen für M_{kI} ergeben sich natürlich aus denjenigen für M_{iI} , die Lösungen für u_0 können entweder aus denen für q nach den Gleichungen (3 e, f) oder aus denen für M_{iI} nach den Gleichungen (3 g, h) abgeleitet werden.

Eine Auswertung von Lösungen für Δm_i und Δm_k für die beiden Grundbelastungszustände q und M_{iI} wurde mit folgenden Varianten

$$(12 \text{ c}) \quad \Delta M = -EI \Delta y'' = - \left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right] N \frac{\sin \varepsilon \frac{x}{\ell}}{\sin \varepsilon} + \left[\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right] N \cos \varepsilon \frac{x}{\ell} - \frac{EI}{\ell^2} \sum_2^n j(j-1) d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^{j-2}$$

$$(12 \text{ d}) \quad \Delta Q = -EI \Delta y''' = - \left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right] N \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right) \frac{\cos \varepsilon \frac{x}{\ell}}{\sin \varepsilon} - \left[\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right] N \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right) \sin \varepsilon \frac{x}{\ell} - \frac{EI}{\ell^3} \sum_3^n j(j-1)(j-2) d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^{j-3}$$

$$(12 \text{ e}) \quad \Delta q = EI \Delta y^{IV} = - \left[\left(\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right) \cos \varepsilon + \frac{\Delta M_k}{N} + \sum_0^n d_j \right] N \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right)^2 \frac{\sin \varepsilon \frac{x}{\ell}}{\sin \varepsilon} + \left[\frac{\Delta M_i}{N} - d_0 \right] N \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right)^2 \cos \varepsilon \frac{x}{\ell} + \frac{EI}{\ell^4} \sum_4^n j(j-1)(j-2)(j-3) d_j \left(\frac{x}{\ell} \right)^{j-4}$$

$$10^{-3} \leq \beta_i = \frac{k_i}{N_{E2}} \leq 10^6,$$

$$(22 \text{ a-c}) \quad \gamma \geq \frac{\beta_k}{k_i} = \frac{k_k}{k_i} = 0 \text{ und } 1,$$

$$0,1 \leq \alpha = \frac{N}{N_{E2}} \leq 3,9$$

durchgeführt und in den Kurventafeln Bild 4 für $\Delta m_{i,q}$, $\Delta m_{k,q}$ und Bild 5 für $\Delta m_{i,M}$, $\Delta m_{k,M}$ dargestellt. Die endgültigen

Stabendfedermomente errechnen sich durch Überlagerung der Einzelzustände unter konstant gehaltener Druckkraft

$$(23 \text{ a, b}) \quad \begin{aligned} \Delta M_i &= q\ell^2 \Delta m_{i,q} + M_{il} \Delta m_{i,M} + M_{kl} \Delta m_{k,M} + q\ell^2 \Delta m_{i,q} \\ \Delta M_k &= q\ell^2 \Delta m_{k,q} + M_{il} \Delta m_{k,M} + M_{kl} \Delta m_{i,M} + q\ell^2 \Delta m_{k,q} \end{aligned}$$

Sie sind dann entweder in die Gleichungen (12 a-e) einzubringen, und diese ergeben mit den Gleichungen (1 a-e) die endgültigen Verformungs- und Schnittgrößenverläufe

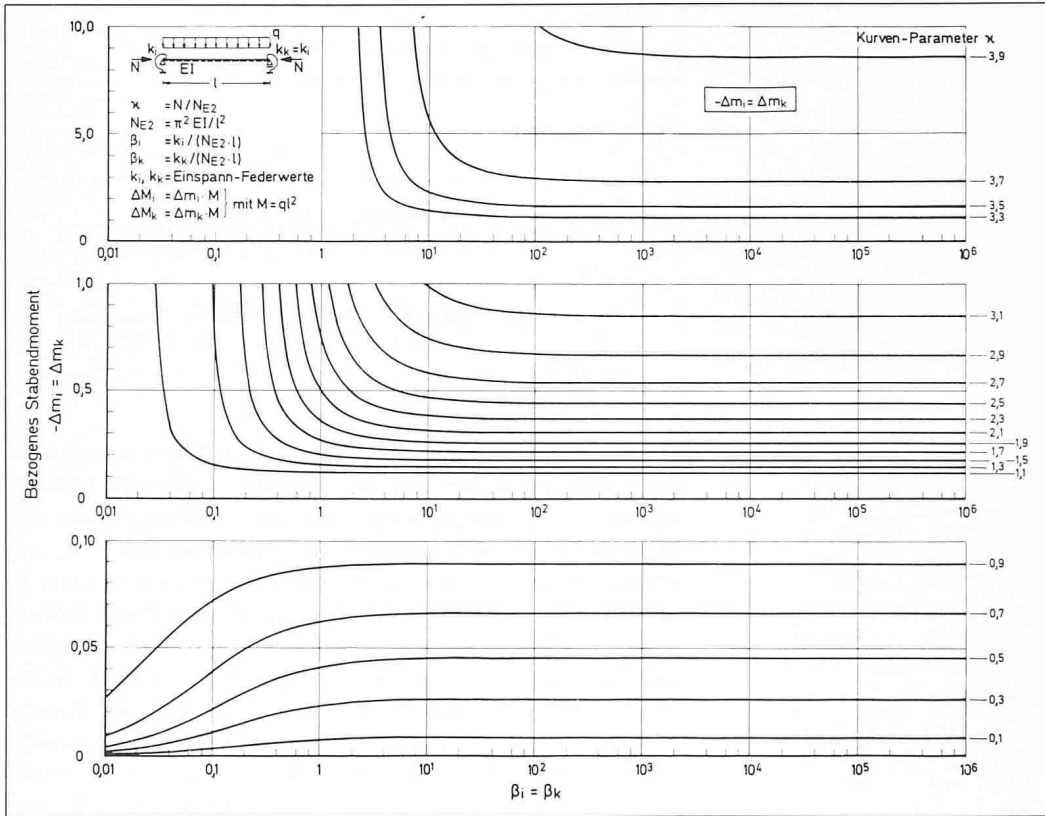


Bild 4 a. Zusätzliche Stabmomente für den mit $q = \text{const.}$ belasteten Balken bei Aufbringen von N und elastischer Stabeinspannung

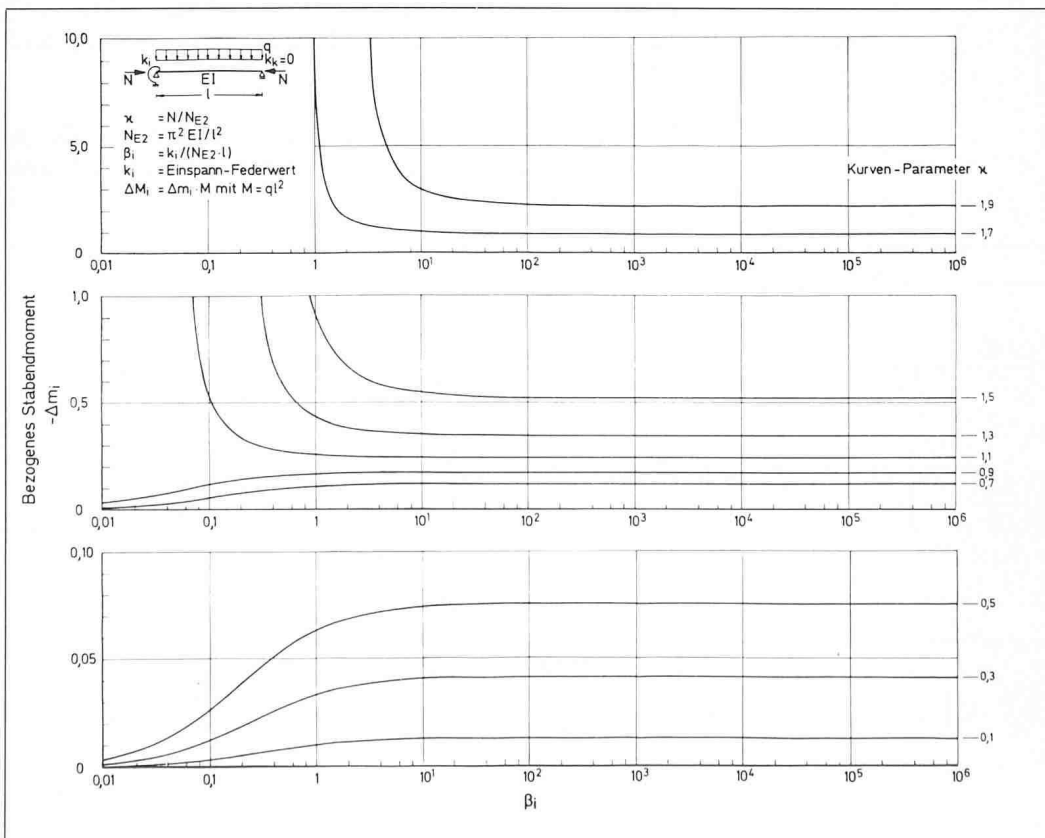


Bild 4 b. Zusätzliches Stabmoment für den mit $q = \text{const.}$ belasteten Balken bei Aufbringen von N und elastischer Stabeinspannung

II. Ordnung, oder sie können, zu den Stabendmomenten M_{iI} und M_{kI} addiert, direkt in den Gleichungen (3 b, c) benutzt werden und entfallen dann in den Gleichungen (12 a – e).

Bei statisch unbestimmt gelagerten Einfeldstäben – und das sind praktisch alle mit einem oder zwei Federgelenken – sind die aus (12 d) für $x = 0$ bzw. $x = 1$ errechneten Querkräfte

nicht gleich den Auflagerkräften, sondern sie können erheblich davon abweichen; die Auflagerkräfte selbst errechnen sich entweder aus (2 d) unter Benutzung von $M_{iII} = M_{iI} + \Delta M_i$ und $M_{kII} = M_{kI} + \Delta M_k$

$$(24 \text{ a, b}) \quad V_{iII} = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_{iII} + M_{kII}}{\ell}, \quad V_{kII} = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{iII} + M_{kII}}{\ell}$$

Bild 5 a. Zusätzliche Stabendmomente für den mit M_{iI} belasteten Balken bei Aufbringen von N und elastischer Stabeinspannung

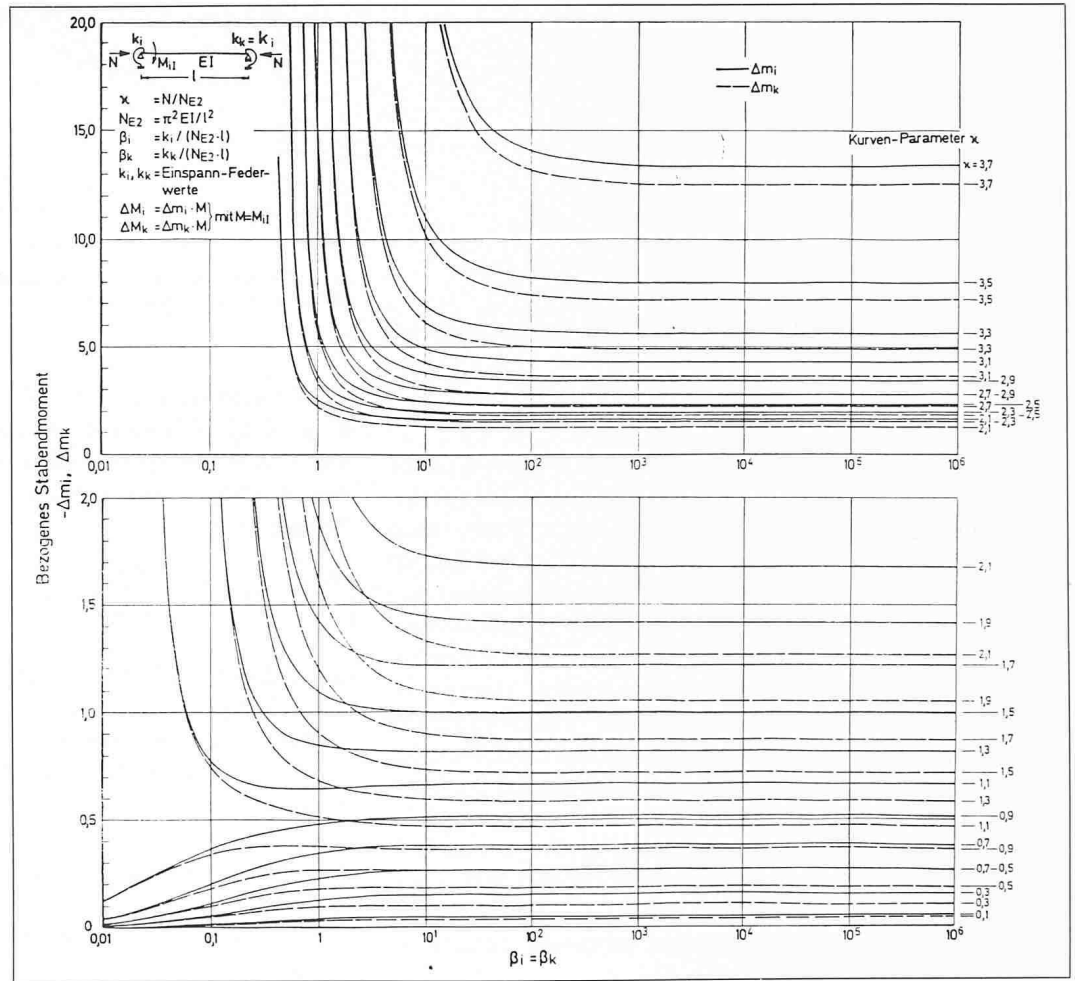
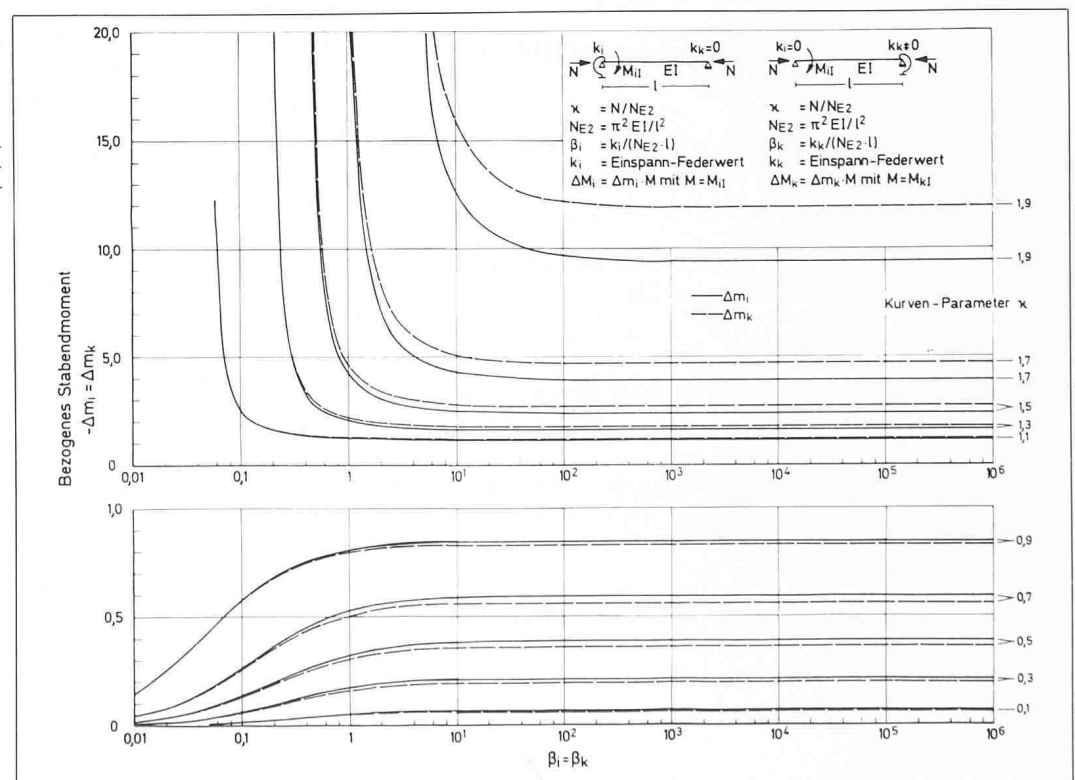


Bild 5 b. Zusätzliche Stabendmomente für den mit M_{iI} belasteten Balken bei Aufbringen von N und elastischer Stabeinspannung



oder unter Benutzung der Biegelinie­neigungen y'_{II} und Quer­kräfte Q_{II}

$$V_{III} = + \frac{1}{\cos y'_{II}(x=0)} \left[Q_{II}(x=0) - N \sin y'_{II}(x=0) \right] \simeq Q_{II}(x=0) - N y'_{II}(x=0)$$

(25 a, b)

$$V_{kII} = - \frac{1}{\cos y'_{II}(x=l)} \left[Q_{II}(x=l) - N \sin y'_{II}(x=l) \right] \simeq -Q_{II}(x=l) + N y'_{II}(x=l).$$

Entsprechend enthält (1e)

(1 e) $q_{II} = EI y'''' - Nu'' + EI \Delta y''''$

neben der eigentlichen Querbelastung q auch die Abtriebs­kräfte Δq aus $N y''_{II}$ oder $\frac{1}{EI} N M_{II}$.

In Vorschlägen zum Abschnitt «Stäbe» der E-DIN 4114 hat Rubin [1] Formeln zur elastischen Berechnung von Biegemoment- und Querkraftverlauf innerhalb eines Stabes nach Theorie II. Ordnung vorgelegt, für die neben den Stabquerlasten und der Normalkraft die Stabendmomente bekannt sein müssen. Letztgenannte sind im Falle eines nennenswerten Einflusses der Theorie II. Ordnung im System natürlich nicht-linear zu berechnen. Mit den obengenannten Ableitungen genügen die Verläufe aus I. Ordnung und Imperfektion; der Zuwachs in den Endmomenten mit Aufbringen der Normalkraft kann abhängig von den Drehfederkonstanten der Stabknoten mit Hilfe der Kennzahlen κ , β_i und β_k bzw. $\gamma = \beta_k/\beta_i$ aus Kurventafeln entnommen werden. Für den kompletten Verformungs- und Schnittgrößenverlauf benutzt man dann die obengenannten Gleichungen, oder es können lastfallgetrennt auch die Formeln nach Rubin verwendet werden, sie führen zum gleichen Ergebnis.

Die Berechnung ist in mehreren Schritten auf HP67 programmierbar.

Sonderfälle

Aus den Lösungen (21 a, b) für Δm_i und Δm_k können je nach Wahl von β_i bzw. k_i und β_k bzw. k_k für

$\beta_i = 0, \beta_k = 0$ der beidseitig gelenkig gelagerte Stab mit $\Delta m_i = \Delta m_k = 0$,

$\beta_i = \infty, \beta_k = 0$ der einseitig gelenkig gelagerte, anderseitig $\beta_i = 0, \beta_k = \infty$ voll eingespannte Stab mit $\Delta m_k = 0$ bzw. $\Delta m_i = 0$,

$\beta_i = \infty, \beta_k = \infty$ der beidseitig voll eingespannte Stab

als Sonderfälle berechnet werden.

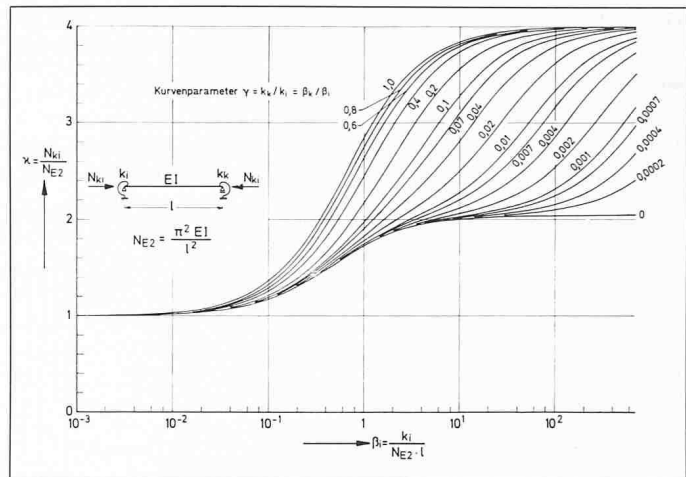


Bild 6. Verhältnis der idealen Knicklast N_{ki} eines elastisch eingespannten Stabes zur Eulerknicklast N_{E2}

Die Gleichungen (21 a, b) können ferner über die Knickbedingung zur Ermittlung der idealen Knicklast des beidseitig unverschieblich gelagerten, elastisch eingespannten Stabes dienen. Diese ergibt sich aus der Forderung $\det = 0$ bzw. Nenner = 0:

$$\left[\frac{\beta_i}{\kappa} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] \left[\frac{\beta_k}{\kappa} (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon) + 1 \right] - \beta_i \beta_k \left[\frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right]^2 = 0$$

und bedeutet, daß keine Auslenkung stattfindet und also auch keine Momente auftreten. Im Sonderfall $k_i \neq 0, k_k = 0$ stimmt sie mit den Angaben von Bürgermeister/Steup/Kretschmar [2] überein. Allgemein liegt die ideale Knicklast zwischen

$$N_{E2} \leq N_{ki} \leq N_{E4} \text{ oder } \pi \leq \varepsilon_{ki} \leq 2\pi.$$

(N_{E2} bzw. N_{E4} Eulerlast für den 2. bzw. 4. Eulerfall)

Sie kann für alle praktisch vorkommenden Fälle elastischer Einspannung aus Bild 6 entnommen werden. Bei $\varepsilon \rightarrow \pi$ bzw. $\varepsilon \rightarrow 2\pi$ besitzt die Determinante ∞ -Sprünge, bei $\varepsilon = \varepsilon_{ki}$ findet ein «weicher» Nulldurchgang von minus nach plus statt.

Literatur

- [1] Rubin, H. Arbeitsunterlagen zu den Sitzungen der AG Stäbe im DAST-Unterausschuss Stabilität zur Neubearbeitung der DIN 4114.
- [2] Bürgermeister, G., H. Steup und H. Kretschmar. Stabilitätstheorie I. 3. Auflage, Berlin 1966.
- [3] Vogel, U.: Amerikanische Fortschritte auf dem Gebiet der Bemessung von Stockwerkrahmen nach der Plastizitätstheorie. Der Stahlbau 1966, H. 11, S. 347 – 351.
- [4] Profanter, H.: Der querbelastete Druckstab mit Vorkrümmung und nicht beidseitig gelenkiger Lagerung. Der Bauingenieur 51 (1976), H. 2, S. 65 – 69.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. Günther Valtinat, Universität Fridericia-na Karlsruhe, Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe