

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 44 (1957)
Heft: 5

Artikel: Wie arbeitet ein virtuoser Zahlenrechner?
Autor: [s.n.]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-530230>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

R. In. – Die Geschichte der Mathematik kennt eine Reihe von eigentlichen «Rechenkünstlern», d. h. von Menschen, deren Rechenfertigkeit weit über das durchschnittliche Maß hinausragt und vom gewöhnlichen Rechner fassungslos bestaunt wird. Mit dieser großen Rechenfertigkeit braucht nicht unbedingt ein großes mathematisches Wissen und Können verbunden zu sein; vom berühmten Hamburger Rechenmeister Dase (1824–1861) wird etwa behauptet, er habe bei den einfachsten angewandten Aufgaben versagt. Dabei war seine Rechengewandtheit außergewöhnlich; unter anderem berechnete er in relativ kurzer Zeit π auf 206 Stellen. – Andererseits finden sich unter den vorzüglichen Zahlenrechnern auch geniale Mathematiker, wie zum Beispiel Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß oder Paul Gordan. Wohl bis heute unübertroffen steht an ihrer Spitze der princeps mathematicorum C. F. Gauß. Sein außerordentlich gewandtes Zahlenrechnen wurde vor allem von Ph. Maennchen (Gauß als Zahlenrechner. Gauß' Werke, Bd. X, 2) untersucht und als «*individualisierendes*» Rechnen charakterisiert. Gauß rechnete also nicht mechanisch, sondern versuchte bei jeder Rechnung einen Weg einzuschlagen, der den Besonderheiten der gegebenen Zahlen entsprach, oder, wie er selbst schreibt, «*artificia specialia*» anzuwenden. Er schreibt darüber in einem Brief an Schuhmacher vom 6. Januar 1842: «Meine jetzt fast fünfzigjährigen Beschäftigungen mit der hohen Arithmetik haben allerdings insofern einen großen Anteil (an der mir zugeschriebenen Fertigkeit im numerischen Rechnen), als dadurch von selbst vielerlei Zahlenrelationen in meinem Gedächtnis unwillkürlich hängengeblieben sind, die beim Rechnen oft zustatten kommen. Zum Beispiel solche Produkte wie $13 \times 29 = 377$, $19 \times 53 = 1007$ und dergleichen... Übrigens habe ich die Rechnerfertigkeit niemals absichtlich kultiviert...» Aus dieser Tatsache darf der Lehrer wohl sicher schließen, daß im Mathematikunterricht, speziell im Rechnungsunterricht, auch vernünftig behandelte reine Zahlenaufgaben, ohne direkten Zusammenhang mit dem praktischen Leben, Sinn

und Wert haben. Dabei denken wir etwa an die sogenannte Zahlenlehre (Primzahlen, Teilbarkeit, Zerlegung in Primfaktoren, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches), an Aufgaben über merkwürdige Zahlen oder an eigentliche kleine Zahlenkunststücke. Gerade solche Aufgaben lehren den Schüler, Zahlen als «Individuen» mit besondern Eigenschaften zu erkennen und entsprechende Rechenvorteile anzuwenden, eine Fähigkeit, die auch bei den heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln (Tabellen, Rechenschieber, Rechenmaschine) immer noch sehr wertvoll ist, oft sogar erst den sinnvollen Einsatz dieser Hilfsmittel gestattet.

Es ist nun immer sehr reizvoll, einen Blick in die Arbeit eines virtuoseren Zahlenrechners zu tun, falls seine Rechnungen auf wohl begründeten mathematischen Überlegungen, gepaart mit großer Gewandtheit und mit einem verblüffenden Zahlengedächtnis, beruhen. Solche Arbeit ist dann für den Zuschauer nicht Schaubudenbelustigung, sondern ernsthafte Instruktion. – Zur Zeit führt in der Schweiz Herr *Wim Klein*, ein gebürtiger Holländer, der in Amsterdam Mathematik studierte und am dortigen Mathematischen Zentrum arbeitete, derartige, auf wissenschaftlichen Grundlagen aufbauende Rechenmethoden in Mittelschulen und mathematischen Vereinigungen vor. Wir haben ihn nach einer gelungenen Vorführung in Luzern ersucht, unsern Lesern einige Einblicke in seine Arbeitsweise (wir glauben in ihr u. a. auch das individualisierende Rechnen zu erkennen) zu geben.

Herr *Wim Klein* schreibt:

«Schon als ich in die Primarschule kam, hatte ich viel Interesse am Rechnen. Nachdem ich dann als Acht- bis Neunjähriger die Grundlagen der Zerlegung in Primzahlen erlernt hatte, packte mich diese Seite des Rechnens, und mit wahrer Leidenschaft begann ich, alle Zahlen von 1 bis etwa 15 000 in Primzahlen zu zerlegen. Dabei kam mir mein angeborenes erstaunliches Zahlengedächtnis zu Hilfe, das sich mit meinen fortschreitenden Studien

entwickelte und, zusammen mit der rein geistigen Arbeit, die Grundlage für meine spätere Entwicklung bot. Bald war ich mit den Primzahlen völlig vertraut, und so benützte ich dieses Wissen, um *Multiplikationen* im Kopf auszurechnen. Ich rechne auch heute noch so, wie folgendes Beispiel zeigen mag:

$368 \times 783 = 288\ 144$ (Antwort in $2\frac{1}{2}$ Sek.). Während dieser $2\frac{1}{2}$ Sekunden habe ich mir überlegt: $368 = 2^4 \times 23$; $783 = 3^3 \times 29$; also habe ich zu multiplizieren: $2^4 \times 3^3 \times 23 \times 29 = (2^4 \times 3^2) \times (3 \times 23 \times 29) = 144 \times 2001 = 288\ 144$. Nun möchten Sie vielleicht gerne wissen, wie ich eine Multiplikation mit zwei Primzahlen vornehme, zum Beispiel 349×523 . Ich habe den Vorteil, alle Quadrate bis 1000 auswendig zu kennen:

$$349 \times 523 = (436 - 87) \times (436 + 87) = 436^2 - 87^2 = 190\ 096 - 7569 = 182\ 527.$$

Bei einer *Addition* summiere ich entweder in Zweier- oder Dreiergruppen.

Beim *Wurzelziehen* verfare ich wie folgt:

a) *Quadratwurzeln*: Da ich die Quadratzahlen bis 1000^2 auswendig kenne, kenne ich auch sofort die ersten drei Stellen der Antwort und fahre dann fort mit der Iteration von Newton.

b) *Kubikwurzeln*: Da ich hier die Kubikzahlen auswendig kenne bis 100^3 , sind mir sofort die ersten zwei Stellen der Antwort bekannt, und dann gehe ich weiter durch Ausprobieren.

c) Von den *vierten Wurzeln* an arbeite ich stets mit Hilfe der Logarithmen, denn ich kenne die Tafel bis 150 mit fünf Dezimalen auswendig.

Beispiel: $\sqrt[7]{389} = ?$

389 ist eine Primzahl, aber 3888 ist $2^4 \times 3^5$, und $3894 = 2 \times 3 \times 11 \times 59$. Also alle Zahlen unter 150, deren Logarithmen ich auswendig weiß und nur zu addieren habe. Anschließend finde ich den Logarithmus von 389 durch eine einfache Interpolation. Den gefundenen Logarithmus dividiere ich durch 7, habe dann den Logarithmus von der siebenten Wurzel und soll dann, wieder mit Primzahlzerlegung, den Numerus zurückfinden.

Sie sehen, daß die *Zerlegung in Primzahlen* eine außerordentlich wichtige Rolle für meine Arbeit spielt. Schon als ich mich als Schuljunge mit den

Primzahlen beschäftigte, habe ich *Teilbarkeitsregeln* gefunden, die ich noch immer und in genau derselben Form benütze.

Beispiel: Zerlegung von 2956811 in Primfaktoren.

Ich sehe sofort: kein Faktor 2, kein Faktor 3, kein Faktor 5. Die Zahl ist aber teilbar durch 11 und 13, denn $2956 - 811 = 2145 = 3 \times 5 \times 11 \times 13$. Diese Teilbarkeitsregel¹ basiert auf der Tatsache, daß $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ist und sich deshalb die zu zerlegende Zahl so umformen läßt: $2956811 - 811 \times 1001 = 2956811 - 811811 = 2145000$. Diese 2145000 kann ich bei dieser Untersuchung ruhig durch 1000 teilen, denn 1000 ist teilerfremd mit 7, 11 und 13.

Nun ist diese Zahl 2145 für mich eine alte Bekannte, in der ich sofort $3 \times 5 \times 11 \times 13$ erkenne. (Mit 1000 multipliziert, bleiben diese 11 und 13 noch immer darin, und weil 811811 selbstverständlich 11 und 13 enthält, ist ihre Summe 2956811 auch teilbar durch 11 und 13.)

Anstatt zuerst durch 11 und dann durch 13 zu teilen, oder durch ihr Produkt 143, multipliziere ich 2956811 mit 7 und teile dann durch 1001. $7 \times 2956811 = 20697677$, und weil $20 + 677 = 697$ ist, ist der Quotient 20677.

Nun ist $20677 - 20020 = 657 = 3^2 \times 73$, also gibt es in 20677 keine 11 und keine 13 mehr. Sehen wir, ob die Zahl 20677 sich durch 23 und 29 teilen läßt ($3 \times 23 \times 29 = 2001$): $20677 - 10 \times 2001 = 20677 - 20010 = 667$, und diese Zahl kenne ich als 23×29 . Also ist $20677 = 23 \times 29 \times \dots$
 $20677 : 667 = 62031 : 2001 = 31$.

Unsere Zahl 2956811 ist also $11 \times 13 \times 23 \times 29 \times 31$. Diese Überlegungen und besonders ihre Erklärung scheinen vielleicht kompliziert; ich habe aber dieses Resultat auf Grund dieses Verfahrens innerhalb von *acht Sekunden* gefunden.

Dann gibt es noch interessante *Probleme aus der Zahlentheorie*, etwa die Untersuchung, ob eine bestimmte Zahl, z. B. 28289, Primzahl ist oder nicht. Auf die übliche Weise sollte man alle Primzahlen unter der Quadratwurzel dieser Zahl, also bis 167, ausprobieren, d. h. 36 Teilungen vornehmen.

Nun ist $28289 = 4n + 1$.

¹ Sie ist mit der folgenden, gelegentlich in der Literatur angegebenen Teilbarkeitsregel verwandt: Man teilt die Zahl von rechts nach links in Gruppen von je 3 Ziffern und summiert die erste, dritte, fünfte usw., sowie die zweite, vierte, sechste usw., dieser dreistelligen Zahlen. Die Differenz dieser beiden Summen ist dann und nur dann durch 7, 11 oder 13 teilbar, wenn es auch die ursprüngliche Zahl ist. (R. In.)

Wenn eine solche Zahl sich nun eindeutig in $a^2 + b^2$ schreiben läßt, ist sie eine Primzahl². Da sollte man aber alle Quadrate der Zahlen bis 168 von 28 289 abziehen, in der Hoffnung, daß es irgendwo einen Rest gibt, der ein Quadrat ist. Aber das ist nicht notwendig:

Die einzigen zweistelligen Quadratzahlen, deren Summe ...89 gibt, sind entweder ...89+...00 oder ...64+...25. Diejenigen Zahlen, deren Quadrat auf 89 endigt, sind selbst $50n \pm 17$, und diejenigen, deren Quadrat auf 64 endigt, sind $50n \pm 8$. Es kommen also in Frage 17, 33, 67, 83, 117, 133, 167, 8, 42, 58, 92, 108, 142 und 158, insgesamt nur noch 14 Zahlen, anstatt 36. Nach einer kleinen theoretischen Überlegung kann man von diesen 14 Zahlen noch einige fallenlassen:

a) weil 28 289 auch noch $8m + 1$ ist, sind nur gerade Zahlen $\equiv 0 \pmod{4}$ gestattet für a und b , und es verschwinden 42, 58, 142, 158. Es bleiben also nur noch zehn Zahlen;

b) weil $28\,289 \equiv 2 \pmod{3}$ ist, können a und b nicht durch 3 teilbar sein; demnach kann man auch 33, 117 und 108 weglassen.

Somit bleiben also nur noch 7 Zahlen übrig, anstatt der 36 nach dem üblichen Verfahren.

Mit Ausprobieren zeigt es sich, daß nur $28\,289 - 167^2$ ein Quadrat ist, und damit ist bewiesen, daß 28 289 eine Primzahl ist. (Hätte man nirgendwo ein Quadrat als Rest erhalten, so wäre 28 289 keine Primzahl, und seine Faktoren wären $4n - 1$. Hätte man zwei oder mehr Quadrate erhalten als Rest, so ist die Zahl auch keine Primzahl, aber jetzt würden die Faktoren $4n + 1$ sein.)

Bei meinen Rechnungen stehen mir also die folgenden Zahlenwerte fertig im Kopf zur Verfügung:

1. das große Einmaleins bis 100×100 ,
2. die Quadrate von allen Zahlen bis 1000^2 ,
3. die Kuben von allen Zahlen bis 100^3 ,
4. die Primzahlen bis rund 10 000,
5. die Potenzen von 2 bis 2^{40} und von 3 bis 3^{20} ,
6. die Logarithmen bis 150 mit fünf Dezimalen,
7. 50 Stellen von π ,
8. die natürlichen Logarithmen der Primzahlen unter 100 mit 12 bis 18 Dezimalen.

Es handelt sich hier um ein „mechanisches“ Gedächtnis. Was die Sache aber sowohl für Mathe-

² Nach folgendem Satz aus der Zahlentheorie: Die Primzahlen der Form $4n + 1$ sind dadurch gekennzeichnet, daß sie genau eine Darstellung der Form $a^2 + b^2$ besitzen und dabei a und b teilerfremd sind. (R. In.)

matiker wie für Psychologen interessant macht, ist die Tatsache, daß ich diese Kenntnisse benütze, um im einzelnen Falle innerhalb kürzester Frist herauszufinden, welchen „Schlüssel“ ich für die Lösung einer bestimmten Aufgabe anzuwenden habe.

Mancher Leser wird sich nun fragen, worin der *praktische Nutzen* für die Schüler liegt, die meinen Vorführungen beiwohnen. Selbstverständlich kann ich keine „Rechenkünstler“ am laufenden Band produzieren. Zweck meiner Vorführungen ist es auch nicht, die Schüler nur zu verblüffen. Vielmehr möchte ich ihnen zunächst zeigen, was man mit *Übung, Ausdauer und Geduld* auf dem Gebiet der Zahlen erreichen kann, ihr Interesse wecken und ihnen beweisen, daß *die Welt der Zahlen keineswegs eine „trockene Materie“ ist, sondern faszinierende, uner-schöpfliche Möglichkeiten in sich birgt*. Außerdem benütze ich jeweils die Gelegenheit, um meine Zuhörer mit einer schon sehr alten Multiplikationsmethode bekannt zu machen, die unter verschiedenen Namen immer wieder neu propagiert worden ist. Es handelt sich um die alte indische „Kreuzmethode“³:

Beispiel: Um zwei zweistellige Zahlen zu multiplizieren, rechnet man einfach:

1. Einer mal Einer,
2. Zehner mal Einer,
3. Zehner mal Zehner.

Zum Beispiel 43×62 gleich:

1. $2 \times 3 = 6$, schreibe 6;
2. $4 \times 2 = 8$, plus
 $6 \times 3 = 18$, zusammen 26,
schreibe 6, behalte 2;
3. $4 \times 6 = 24 + 2 = 26$;

Antwort: 2666.

Bei drei-, vier- und mehrstelligen Zahlen verfährt man immer nach dem gleichen Grundsatz, Schritt für Schritt, von rechts nach links.

Auf meine Anregung hin haben die Mathematik-

³ Die Methode wird z. B. bei *Pb. Maennchen*, «Geheimnisse» der Rechenkünstler (Leipzig 1951) für Multiplikation und Division ausführlich dargelegt. – Auch die zur Zeit viel propagierten Multiplikations- und Divisionsverfahren von *J. Trachtenberg* beruhen auch auf solchen Überlegungen. (R. In.)

lehrer in verschiedenen französischen Mittelschulen diese Methode systematisch ihren Schülern beigebracht und schon nach kurzer Zeit erstaunliche Resultate beobachten können. Es ist schade, daß die Kreuzmethode noch nicht in den Rechenunterricht der Primarschulen aufgenommen worden ist, da sie, von Anfang an gelehrt, eine vortreffliche Multiplikationsmethode ist und den Schüler zwingt, sich ans Kopfrechnen zu gewöhnen. Die hauptsächlichsten drei Multiplikationsverfahren möchte ich wie folgt charakterisieren:

1. die schriftliche Schulmethode: sicher, aber etwas langsam;
2. der Rechenschieber: schnell, aber nicht genau;
3. die Kreuzmethode: rasch und sicher.

Nach einer fast vierjährigen Tournee in Frankreich mit einigen hundert Vorführungen an dortigen Mittelschulen habe ich nun seit Mai 1956 auch schon an vielen Schweizer Mittelschulen (ungefähr 120) Vorlesungen gehalten. Zahlreiche kompetente Stellen haben den *bildenden und anregenden* Wert dieser Vorlesungen spontan anerkannt. Es freut mich, feststellen zu dürfen, daß sich immer mehr Schulleiter und Mathematiklehrer entschließen, mich zu Vorlesungen an ihren Schulen einzuladen.»

(Eigentumsvorbehalt für die obige Arbeit Wim Klein, Thunstraße 37, Bern. Abdruck nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verfassers.)

Gymnasium und Hochschule:¹ Der Physikunterricht für angehende Mediziner, Zahnärzte, Veterinäre und Pharmazeuten an unseren Universitäten

Prof. Dr. O. Huber, Physikalisches Institut der
Universität Freiburg

Technik und Industrie haben dank der guten Resultate der Grundlagenforschung vor allem in Phy-

¹ Man vergleiche auch den Artikel von Prof. Dr. A. Pflüger in Nr. 2 dieses Jahrganges. (Anm. d. Red.)

sik und Chemie große Erfolge errungen und starke Fortschritte zu verzeichnen. Unsere ganze Wirtschaft profitiert davon in erheblichem Maße, und die zunehmende Automatisierung ist imstande, den Lebensstandard jedes Einzelnen zu garantieren und weiter zu heben. Überall werden neue Methoden und moderne Maschinen und Werkzeuge verwendet, welche die Genauigkeit der Produkte erhöhen und die Produktion steigern helfen. Jeder fortschrittliche Kleinbetrieb, ja sogar oft jeder selbständige Handwerker, wie Mechaniker, Spengler, Schuhmacher oder Maler, benützt neuzeitliche Methoden für sein Handwerk.

Aber nicht nur die technischen Wissenschaften, sondern auch die Medizin und die Biologie benötigen für ihre Forschungen und Anwendungen im Alltag immer raffiniertere Instrumente und Apparate. Erkenntnisse der medizinischen Forschung werden alsbald vom praktizierenden Arzt übernommen. Das bedeutet für ihn erhöhte Verantwortung und bedingt, daß er die Forschungsergebnisse verfolgt und studiert. So wird auch die Technik in den Dienst der Medizin gestellt, und die technischen Hilfsmittel, die dem Arzt zur Verfügung stehen, sind neben seinem Können und seiner ganzen Persönlichkeit, die Vertrauen ausstrahlt, ihm unentbehrliche Werkzeuge geworden. Besonders auffällig wird diese Entwicklung in medizinischen Forschungszentren oder guteingerichteten Kliniken, wo die jungen Ärzte, nach bestandem Staatsexamen, oft mehrere Jahre zu ihrer weiteren Ausbildung arbeiten. Dort stehen ihnen alle modernen Apparate zur erfolgreichen Anwendung zur Verfügung, wie Narkoseapparate, Hochfrequenzapparate, Ultraschallapparate, künstliche Niere, eiserne Lunge, EKG- und EEG-Apparate, Röntgenapparate und Betatron, und immer häufiger werden für alle Belange der Forschung und Therapie radioaktive Isotope und äußerst empfindliche Instrumente zu deren Nachweis verwendet.

Es ist offensichtlich, daß es dem heutigen Arzt nicht mehr möglich ist, alle Geheimnisse seiner technischen Hilfsmittel zu kennen, noch genauer zu verstehen, was bei einer radioaktiven Umwandlung vor sich geht und welche Gesetze dieselbe beherrscht. Doch ist es ebenso klar, daß seine Grundausbildung vielseitiger und tiefer sein muß als früher, und man darf mit Recht behaupten, daß hier auch die Physik keine untergeordnete Rolle spie-