

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 47 (1960)
Heft: 10: Anregungen zum Mathematik- und Physikunterricht in der Sekundarschule

Artikel: Einige Gedanken zum Arithmetikunterricht auf der Sekundarschulstufe
Autor: Ineichen, Robert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-532225>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

wässerung des exakten Schließens, wie gelegentlich behauptet wird, ist keineswegs die Rede. Der Gegensatz zur traditionellen euklidischen Methode ist vielmehr darin zu suchen, daß das *dynamische Element gegenüber dem statischen dominiert*. Die Figuren leben; sie können gedreht, verschoben und später sogar deformiert werden.

Für den systematischen *Geometrieunterricht auf der Grundlage der Bewegung* (allgemeiner der *Abbildung*) bestehen schon recht brauchbare Lehrmittel und Publikationen; auf einige davon sei am Schlusse dieses Abschnittes hingewiesen. Am besten wird man sich wohl dort ausführlich orientieren. Es sei hier nur das Wesentliche des neuen Unterrichtsstiles hervorgehoben. Er ist aus der Absicht herausgewachsen, durch eine handgreiflichere Behandlungsweise den Schülern die Geometrie schmackhafter zu machen, und zwar vor allem auf jener Stufe, auf der mit den euklidischen Gedankengängen nur schwerlich eine Resonanz zu erzielen war. Fast noch wichtiger scheint aber, daß dadurch ein viel stärkeres Eindringen in das Wesen geometrischer Zusammenhänge möglich wird. Der Aufbau im modernen Stile beginnt mit Bewegungsexperimenten und festigt zunächst die Begriffe *Spiegelung an einer Achse*, *Verschiebung in einer Richtung* und *Drehung um einen Punkt*. Auf ihnen baut sich nachher das Gebäude der Geometrie auf.

Beim systematischen Geometrieunterricht besteht die Gefahr, daß man – vielleicht von Euklid unbewußt dazu verleitet – Satz an Satz aneinanderzureihen beginnt und in gerader Linie durch den Stoff hindurchrast. Es ist zu empfehlen, gelegentlich einen Streifzug einzuschalten, indem man von einem bestimmten Problem aus nach verwandten Fragestellungen Ausschau hält und diese diskutieren läßt. Man könnte etwa den Vergleich ziehen mit einer Autofahrt; ab und zu wird die Fahrt auf der Autobahn unterbrochen, der Wagen in einem Seitensträßchen parkiert und in aller Ruhe die Gegend besichtigt. Wer schon solche Streifzüge unternommen hat, wird bestätigen, daß sie zu den interessantesten Geometriestunden führen, wenn sie sauber vorbereitet sind. Ein Thema hat dann eingeschlagen, wenn die Schüler selber Probleme aufwerfen und Fragen stellen wie etwa die folgenden: Was passiert in diesem und jenem Spezialfall? Wie muß man die Aufgabe lösen, wenn eine bestimmte andere Situation von Gegebenheiten vorliegt? Nicht das, was am Schluß einer Stunde im Heft steht, ist maßgebend,

sondern das, was die Schüler als bleibendes Erlebnis an Geometrie mitnehmen. Als Ausgangspunkte für derartige Streifzüge sind Hindernisaufgaben, Minimal- oder Maximalprobleme und dergleichen besonders geeignet.

Literatur für weitere Anregungen und zur genaueren Orientierung:

Hofmann J. E.: Streifzug durch die Entwicklungsgeschichte der Elementarmathematik. Frankfurt 1959.

Denk-Hofmann: Ebene Geometrie. Eine Einführung zum Gebrauch an den mittleren Klassen höherer Lehranstalten. München 1957.

Lambacher-Schweizer: Mathematisches Unterrichtswerk. Geometrie A₁ und A₂. Stuttgart 1956.

Reidt-Wolff: Die Elemente der Mathematik. Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten. Band 2. Paderborn 1954.

Einige Gedanken zum Arithmetikunterricht auf der Sekundarschulstufe¹⁾

Dr. Robert Ineichen, Luzern

«Man kann ein großer Rechner sein, ohne die Mathematik zu ahnen»

(Novalis, Fragmente)

Es sollen in den folgenden Zeilen einige Gedanken geäußert werden, um von den verschiedenen Aspekten des Arithmetikunterrichtes einen, nämlich den *mathematischen*, etwas zur Geltung zu bringen und die damit verbundenen methodischen Fragen kurz zu erörtern. Dies geschieht aus der Überzeugung, daß der Arithmetikunterricht nur dann in vollem Maße bildend und damit fruchtbar werden kann, wenn er als Teil des mathematischen Unterrichtes

¹⁾ Nach Referaten des Verfassers an der Konferenz des Kant. Lehrervereins Uri (28. 10. 59) und an einem Mathematikkurs des Sekundarlehrervereins des Kantons Luzern (10. 12. 59).

neben den rechnerischen Fertigkeiten auch eigentliches *mathematisches Denken* vermittelt. Daß dies heutzutage, da immer mehr Menschen mit solider mathematisch-naturwissenschaftlicher Grundschulung benötigt werden, auch von erheblicher ‚praktischer‘ Bedeutung ist, sei nur nebenbei erwähnt.

1. *Pflegen wir eine vernünftige Rechentechnik!*

Man wird sich fragen, ob diese Pflege der Rechentechnik heute noch von irgendwelcher Bedeutung sei: Rechenschieber und Rechenmaschinen werden in immer stärkerem Maße verwendet, und Rechenautomaten sind im Bau, die in einer Sekunde 800 000 (!) zehnstellige Zahlen multiplizieren werden! – Nun, man wird trotzdem nicht darum herum kommen, die Grundoperationen im Unterricht so zu üben, daß sie schriftlich und – in passendem Umfange – auch mündlich beherrscht werden und weitgehend *mechanisch* angewendet werden können. Dieses Einüben ist sicher notwendig, ein großer Bildungswert dürfte ihm jedoch kaum innewohnen. Aber wir meinen, die Rechentechnik könnte in einer Art verfeinert werden, die ihren Bildungswert wesentlich steigern würde und außerdem auch für die Praxis von beachtlichem Interesse wäre. Dazu folgende Anregungen:

a) *Das Individualisieren der Zahlen*

C. F. Gauß, einer der größten Mathematiker der Neuzeit, hat sich in sehr vielen seiner Arbeiten auch über eine ganz außerordentliche Rechenfertigkeit ausgewiesen. Es mag in diesem Zusammenhang interessieren, was er über diese Gewandtheit im Zahlenrechnen schreibt: «Meine jetzt fast fünfzigjährigen Beschäftigungen mit der höhern Arithmetik haben allerdings insofern einen großen Anteil (an der mir zugeschriebenen Fertigkeit im numerischen Rechnen), als dadurch von selbst vielerlei Zahlenrelationen in meinem Gedächtnis hängen geblieben sind, die beim Rechnen oft zu statten kommen.» (Brief an Schuhmacher, 6. Jan. 1842) Und diese Zahlenrelationen, die er im Gedächtnis behielt, waren ihm beim Rechnen deshalb von so großem Nutzen, weil es ihm gelang, an den auftretenden Zahlen die besondern Eigenschaften zu erkennen, also die *Zahlen zu individualisieren*, eine Fähigkeit, die auch bei verschiedenen andern virtu-

osen Rechnern festgestellt werden kann.²⁾ Ein ganz einfaches Beispiel zur Erläuterung: Es soll das Produkt $159 \cdot 119$ berechnet werden. Man sieht sofort: $119 = 7 \cdot 17$. Also heißt unsere Aufgabe $159 \cdot 7 \cdot 17$. Davon wird zunächst $59 \cdot 17$ gebildet; das Ergebnis ist offensichtlich 1003 (man denke an $60 \cdot 17 = 1020$). Somit ist noch zu rechnen: $119 \cdot 100 + 7 \cdot 1003 = 18921$. Mit diesem Beispiel möchten wir nun nicht etwa anregen, in Zukunft dreistellige Zahlen auf diese Art im Kopf berechnen zu lassen. Aber wir möchten darauf hinweisen, daß im Unterricht auch reine Zahlenaufgaben, die für den praktischen Rechner zunächst nutzlos scheinen, eine große Bedeutung haben, wenn sie sinnvoll behandelt werden, also zum Beispiel dazu verwendet werden, die individuellen Eigenschaften von Zahlen zu erkennen. Wir denken dabei vor allem an die sogenannte *Zahlenlehre*, also an Zerlegung in Primzahlen, Fragen der Teilbarkeit, größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfach. Die entsprechenden Aufgaben dürfen nicht nur eine mehr oder weniger zweckmäßige Einleitung ins Bruchrechnen bilden; sie sollen den Schüler vor allem mit den *Zahlen und ihren Eigenschaften vertraut* machen. Wird dieses Ziel erreicht, so ist gerade für das praktische Rechnen sehr viel gewonnen. Von ähnlicher Bedeutung für die Pflege der Rechentechnik sind in diesem Zusammenhang zum Beispiel an passender Stelle eingeschaltete Denk- und Scherzaufgaben oder etwa Aufgaben, wie sie bei der Behandlung von *Quadratzahlen und Quadratwurzeln* zwanglos gestellt werden können.³⁾ Manche Aufgabe, die auf den ersten Blick nur von ‚theoretischem‘ Interesse ist, erhält so auch eine vorzügliche praktische Bedeutung.

b) *Das Rechnen mit sachgemäßer Genauigkeit*

Man kann mit guten Gründen darüber streiten,

²⁾ Vergl. z. B. R. In./Wim Klein, Wie arbeitet ein virtuoser Zahlenrechner, ‚Schweizer Schule‘ Nr. 5, 44. Jg. (1957) und R. Ineichen, Aus Leben und Werk von C. F. Gauß, ‚Schweizer Schule‘ Nr. 9, 42. Jg. (1955).

³⁾ Reiche Anregungen für solche Übungen bieten z. B. W. Lietzmann, Sonderlinge im Reiche der Zahlen (Bonn 1954) und K. Menninger, Rechenkniffe (Stuttgart 1953). – In V. Kopp und R. Ineichen, Aufgaben für das schriftliche Rechnen an Gymnasien, Real- und Sekundarschulen (3. Auflage 1959, Verlag E. Haag, Luzern) haben wir versucht, zahlreiche derartige Aufgaben an geeigneten Stellen in den üblichen Übungsstoff einzubauen.

ob die Verfahren der abgekürzten Multiplikation und Division – früher oft Paradestücke des Réchens der dritten Sekundarklasse – ausführlich behandelt werden sollen oder nicht. Was wir aber in keiner Klasse unterlassen dürfen, sind Hinweise und Überlegungen zur sachgemäßen Genauigkeit von Rechenergebnissen. Ein Beispiel: Die Fläche eines quadratischen Gartenbeetes von 23,75 m Seitenlänge soll berechnet werden. Zum Ergebnis führt die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r}
 23,75 \cdot 23,75 = \\
 \hline
 475 \ 0 \\
 71 \ 25 \\
 16 \ 625 \\
 1 \ 1875 \\
 \hline
 564,0625
 \end{array}$$

Und nun wird oft – und das selbst in Schulbüchern! – als Ergebnis ‚Fläche des Gartens = 564,0625 m²‘ angegeben. Dabei ist doch die gegebene Seitenlänge des Gartens, 23,75 m, ein Näherungswert. Die Ziffern 2, 3 und 7 werden exakt sein, die Ziffer 5 hingegen nicht; die ‚wahre‘ Länge wird vielleicht 23,748 m oder 23,751 m betragen. Das heißt aber doch, daß alle Ziffern rechts des vertikalen Striches nicht mehr zuverlässig angegeben werden können. Die vernünftige Angabe des Ergebnisses ist somit 564,1 m²; jede weitere Angabe von Dezimalstellen ist falsch und spiegelt eine Genauigkeit vor, die gar nicht erreicht werden kann. Uns scheint, daß derartige Betrachtungen über die einer Rechenaufgabe angemessene Genauigkeit für die mathematische Ausbildung sehr wertvoll sind: Sie führen zu einer *ehrlichen Bewertung* eines Ergebnisses (die zuviel angegebenen Stellen sind ja nicht Luxus, sondern Schwindel!), sie verlangen vom Schüler *Überlegung* statt bloß Anwendung eines eingedrillten Verfahrens, und sie sichern eine *intensive Verbindung des Rechnens mit der Wirklichkeit*. Diese Betrachtungen lassen sich nicht nur bei Aufgaben anstellen, bei denen Meßresultate mitspielen, sondern auch wenn Zahlen verwendet werden, die an sich genau sind, aber nur angenähert in die Rechnung eingehen: Wenn für π einer der Näherungswerte $3\frac{1}{7}$ oder 3,14 oder 3,1416 eingesetzt wird, oder wenn mit $\sqrt{2} \approx 1,41$ gerechnet wird. So dürfte es gelingen, dem Schüler *nach und nach* die folgenden Kenntnisse zu vermitteln:

– Unterscheidung zwischen den in einer Aufgabe auftretenden *Näherungswerten und exakten Werten*.

– Näherungswerte in der Regel so angeben, daß *alle Ziffern mit Ausnahme der letzten als ziemlich zuverlässig angesehen werden können; die letzte Ziffer ist gerundet*.

– Beim *Addieren und Subtrahieren* zweier Näherungswerte sollen im Ergebnis nicht mehr Ziffern nach dem Komma angegeben werden, als der Wert mit der *kleineren Anzahl Kommastellen* aufweist. (An Beispielen illustrieren!)

– Beim *Multiplizieren und Dividieren* zweier Näherungswerte sollen im Ergebnis nicht mehr Ziffern angegeben werden, als der Wert mit der *kleineren Zifferanzahl* aufweist. (Beispiele! Man beachte, daß für diese Regel die Kommastellung belanglos ist.)

Ähnliche Überlegungen können auch dann angestellt werden, wenn eine genaue Angabe des Ergebnisses zwar möglich wäre, aber nicht nötig ist. Beispiel: 100 österreichische Schillinge entsprechen Fr. 16.35. Wieviele Franken erhält man für 231,65 Schillinge? Man wird im Ergebnis kaum alle 6 Kommastellen benötigen; wird die Rechnung entsprechend eingerichtet, so kann wieder unnötige Arbeit erspart werden.

c) Die Verwendung zweckmäßiger Hilfsmittel

Jeder Praktiker – ob Kaufmann oder Techniker – bedient sich beim Rechnen geeigneter *Tafeln*. Wir sind der Ansicht, eine einfache Tafel etwa der *Quadrate und Kuben, der Quadrat- und Kubikwurzeln und der reziproken Werte der Zahlen von 1 bis 100* sollte auch jedem Sekundarschüler zur Verfügung stehen und deshalb in den Aufgabensammlungen für diese Stufe enthalten sein. Diese Tafel wird ihn zunächst von einiger *Rechenarbeit entlasten* und so den mathematischen Gehalt mancher Aufgabe besser hervortreten lassen. Man denke in diesem Zusammenhang vor allem an die geometrischen Aufgaben: wie oft verschwindet das ‚Geometrische‘ hinter dem manchmal so unfruchtbaren Rechnen! Die Tafeln werden ihm ferner helfen, seine *Rechnungen überschlagsmäßig zu prüfen* und vor allem werden sie ihn oft zum Versuch zwingen, eine Rechnung durch *geschickte Umformung möglichst auf seine Tabellen zurückzuführen*. (‚Mathematik ist die Kunst, Rechnungen zu vermeiden!‘) Er wird zum Beispiel bei der Aufgabe $\sqrt[5]{\frac{5}{12}}$ erkennen, daß $\sqrt[5]{\frac{5}{12}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt[5]{60}$ ist. $\sqrt[5]{60}$ findet er aber in seiner Tabelle, also kann

er sofort das Ergebnis hinschreiben: $\sqrt[5]{12} = 7,7460 : 12 = 0,6455$. – Bekommt er in der Physik die Aufgabe, nach dem Ohm'schen Gesetz $U = R \cdot I$ bei einer gegebenen Spannung $U = 220$ Volt die zu den Widerständen $R = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ 20 Ohm gehörenden Stromstärken auszurechnen, so wird er feststellen, daß er die meisten der hier auftretenden Divisionen viel leichter als *Multiplikationen mit dem reziproken Wert* ausführt. Die reziproken Werte entnimmt er wieder seiner Tabelle: zum Beispiel $220 : 13 = 220 \cdot \frac{1}{13} = 220 \cdot 0,0769 = \dots$ Wir glauben nicht, daß dadurch das schriftliche Rechnen zu stark zurückgedrängt wird; sicher aber wird das Rechnen bei Verwendung solcher Hilfsmittel nicht nur praktischer, sondern auch bildender, weil an Stelle der mechanischen Ausführung einer Rechenoperation etliche wertvolle Überlegungen treten. – Es sei übrigens angemerkt, daß an verschiedenen deutschen Schulen dieser Stufe bereits auch ernsthaft die *Benützung eines einfachen Rechenschiebers* – er kann auch ohne Kenntnis der Logarithmen eingeführt werden – diskutiert und erprobt wird.

d) Die Kontrolle des Ergebnisses

Wir haben oben bereits auf die Untersuchung des Resultates in bezug auf die mögliche Genauigkeit hingewiesen und ferner auf die Verwendung der *Tafeln zur überschlagsmäßigen Prüfung* aufmerksam gemacht: Wurde etwa $\sqrt{207\,936} = 456$ berechnet, so kann eine einfache Tafel der Quadratwurzeln (z. B. der Zahlen von 1 bis 100) zur raschen Kontrolle des Resultates verwendet werden. $\sqrt{207\,936}$ liegt sicher zwischen $100 \cdot \sqrt{20}$ und $100 \cdot \sqrt{21}$, also muß das Ergebnis zwischen $100 \cdot 4,4721$ und $100 \cdot 4,5826$ liegen, und zwar näher bei der obern Schranke. – Weiter sei die Möglichkeit erwähnt, ein Rechenresultat durch eine *im Kopf ausgeführte Überschlagsrechnung* zu prüfen; eine sinnvollere Anwendung des Kopfrechnens läßt sich wohl schwer finden! Schließlich gehört natürlich die *Neunerprobe* hieher: In den ersten Klassen wird man sich auf die Feststellung beschränken, daß der Rest bei der Division durch 9, der sogenannte Neunerrest, gleich der einziffrigen Quersumme ist, und daß zur Probe die *Addition* oder die *Multiplikation* einfach mit den Neunerresten, statt mit den gegebenen Zahlen selbst, auszuführen sind. Gerade die Möglichkeit, auch größere Additionen durch die Neunerprobe

in einfacher Weise zu prüfen, wird wohl eher zu wenig verwendet:

85924	Neunerreste:	1	}	Summe = 21, Neunerrest 3; stimmt überein mit dem Neunerrest des Resultates.
+ 4253		5		
+ 6274		1		
+ 308		2		
+ 2135		2		
+ 6423		6		
+ 6428		2		
+ 54371		2		
166116				

In der zweiten und dritten Klasse wird man bei einer Wiederholung diese Tatsachen kurz begründen und dabei ganz einfach etwa von einer Zerlegung der folgenden Art ausgehen: z. B. $3476 = 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + (3 + 4 + 7 + 6)$. Daraus ist ersichtlich, daß für die Teilbarkeit durch 9 nur die in der Klammer notierte Quersumme maßgebend ist, da alle andern Summanden sowieso durch 9 teilbar sind. Von Anfang an wird man auch darauf hinweisen, daß die Neunerprobe auch stimmen kann, wenn das Ergebnis falsch ist (z. B. Kommafehler, vertauschte Ziffern usw.), daß aber diese Fälle meist durch eine Überschlagsrechnung erkannt werden können.

e) Die Verwendung von Näherungsverfahren

Auf die abgekürzte Multiplikation und Division und auf Überschlagsrechnungen wurde bereits oben hingewiesen. Es sei hier noch auf ein Näherungsverfahren hingewiesen, das in den Sekundarschulen kaum verwendet wird, obwohl es *viel einsichtiger* ist, als das in der Regel eingeübte ‚genaue‘ Verfahren; es betrifft das *Quadratwurzelziehen*. Dieses Näherungsverfahren – es ist so einfach, daß es auch noch vorhanden sein könnte, wenn das übliche Schulverfahren längst vergessen ist – läuft wie folgt: Es sei etwa $\sqrt{98}$ zu bestimmen. Durch Schätzen stellen wir einen Näherungswert fest, hier z. B. $\sqrt{98} \approx 10$. Ist nun dieser geschätzte Wert zu groß (wie in unserem Falle), so wird die Division $98 : 10 = 9,8$ einen zu kleinen Wert liefern. Die gesuchte Wurzel liegt also zwischen 10 und 9,8; als verbesserten Näherungswert nehmen wir deshalb $(10 + 9,8) : 2 = 9,9$. Wollen wir noch weitere Stellen bestimmen, so fahren wir analog weiter: $98 : 9,9 = 9,899$; als verbesserten Näherungswert nehmen wir also (9,9

+ 9,899) : 2 = 9,8995; auch das Schulverfahren führt bei vier Dezimalen zu diesem Ergebnis.

2. *Lassen wir in den Anwendungen die wenigen grundlegenden Methoden deutlich hervortreten!*

a) *Klare Unterscheidung von Lösungsmethode und Anwendung*

Oft wird zuwenig Wert auf die Feststellung gelegt, daß die *große Mehrzahl aller Aufgaben* des bürgerlichen Rechnens mit einer *einzigsten Methode*, mit der des *Dreisatzes* (oder, was damit gleichwertig ist, mit einer Proportion) gelöst werden kann. In diesem Sinne sollte nicht zwischen ‚Dreisatzrechnung‘ und z. B. einer auf gleicher Ebene stehenden ‚Prozentrechnung‘ unterschieden werden. Zutreffender könnte dieser Zusammenhang etwa durch ‚Dreisatz und Vielsatz und ihre Anwendung in der Prozent- und Zinsrechnung‘ umschrieben werden. Und zum mindesten beim schriftlichen Rechnen sollte die Methode des Dreisatzes als *Normalverfahren* den Vorrang haben und in allen Anwendungen (auch in den ferner liegenden, wie z. B. beim Rechnen mit fremder Währung und fremden Maßen) deutlich zum Ausdruck kommen.

Eine *kleine Minderheit von Aufgaben*, nämlich etwa solche aus dem Gebiet der Teilungs- und Mischungsrechnungen, muß mit einer andern grundlegenden Methode, mit der *Gleichung*, gelöst werden. Sollen 5540 Franken so unter A, B und C verteilt werden, daß B 470 Fr. mehr als A und C 350 Fr. weniger als B erhält, so wird man dem A 1 Teil geben, dem B 1 Teil + 470 Franken und dem C 1 Teil + 470 Franken — 350 Franken. Das führt zwanglos auf die Gleichung

3 Teile + 940 Franken — 350 Franken = 5540 Franken.

Scheuen wir uns nicht, diese etwas umständliche Schreibweise mit den ‚Teilen‘ bald zugunsten der kurzen und trotzdem leicht verständlichen Schreibweise als Gleichung mit der einen Unbekannten x zu verlassen. Um solche Gleichungen wie $3x + 940 - 350 = 5540$ zu lösen, bedarf man keiner Theorie; man führt aber dabei einige für die mathematische Ausbildung wichtige Überlegungen aus. Zugleich wird mit Buchstaben gearbeitet, was sehr nützliche Vorarbeit für Algebra und Geometrie darstellt. — Schließlich sei unter den Lösungsmethoden noch die *Proportion* erwähnt. Sie darf im Rechenunter-

richt nicht fehlen, denn Geometrie und Physik benötigen den wichtigen Begriff der *Verhältnismöglichkeit* zur Formulierung verschiedener Gesetze. Endlich sei noch der *Kettensatz* angeführt, der bei gewissen Rechnungen das Aufstellen mehrerer Dreisätze überflüssig macht.

b) *Entsprechendes ist von den einfacheren kaufmännischen Anwendungen zu sagen*

Die Rabatt-, die Skonto-, die Gewinn- und die Verlustrechnung haben mit andern Anwendungsgebieten ihren Platz bei den Prozentrechnungen und werden analog gelöst. Sie verdienen höchstens deshalb eine besondere Erwähnung und Behandlung, weil mit ihnen einige wichtige *sachliche Kenntnisse* vermittelt werden müssen. Daraus ein Dutzend verschiedene Rechnungsarten zu machen, wie das in einzelnen Schulbüchern geschieht, halten wir für verfehlt. Ähnliches ist von den Anwendungen zu sagen, die im Stoff der dritten Sekundarklasse vorkommen: Effektenrechnung, Diskontrechnung, Warenrechnung, Zinseszinsrechnung. Es sind Anwendungen der Prozent- und der Zinsrechnung; sie sollten vor allem der Vertiefung und der Wiederholung dienen. — Bei weitem Anwendungen, wie Kontokorrentrechnung und Terminrechnung kann man sich füglich fragen, ob sie wirklich immer noch in den Lehrplan einer dritten Sekundarklasse gehören, oder nicht zugunsten einer vertieften Behandlung der Algebra daraus verschwinden könnten.⁴⁾

3. *Pflegen wir die Querverbindungen zur Algebra und zur Geometrie!*

a) *Frühzeitige gelegentliche Verwendung von Buchstaben im Rechenunterricht*

In Geometrie und Physik lernt der Schüler schon früh *Formeln* kennen. Um sie richtig verstehen zu können, muß er nach und nach auf die Darstellung von Zahlen durch Buchstaben und damit auf den *Begriff der allgemeinen Zahl* geführt werden. Mit diesem Heranführen kann schon recht früh, beispielsweise bei der wohl notwendigen Repetition der Grund-

⁴⁾ Eine Darstellung, die zu diesen und andern hier geäußerten Gesichtspunkten Rechnung trägt, versuchten wir in R. Ineichen, Arithmetik (Leitfaden des Rechnens) zu geben (Verlag E. Haag, Luzern 1957).

operationen mit ganzen Zahlen begonnen werden: Feststellungen, wie $5 + 2 = 2 + 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ usw., führen zwanglos⁵⁾ auf die allgemeinen Formulierungen $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$.

Schließlich bieten im bereits fortgeschrittenen Unterricht die *zusammenfassenden Repetitionen* ähnliche Möglichkeiten: Die verschiedenen Fälle der Prozentrechnung lassen sich z. B. aus den Formeln $w = \frac{g \cdot p}{100}$ oder $g : w = 100 : p$ entwickeln.

Auf das ganz natürliche Auftreten von *Gleichungen* bei der Behandlung von Teilungs- und Mischungsrechnungen wurde bereits oben hingewiesen. Einfache Gleichungen von der Art wie $25 + x = 37$ können schon sehr früh eingeführt werden; sie wurden ja durch die Aufgaben der Primarschule vom Typ $25 + ? = 37$ bestens vorbereitet. Wichtig erscheint uns dabei, daß *nicht bereits eigentliche ‚Algebra‘ getrieben wird*; es geht nur darum, gelegentlich Buchstaben zu verwenden, um eine Zahl darzustellen, die verschiedene Werte annehmen kann, und mit diesen allgemeinen Zahlen einfache Rechnungen so durchzuführen, wie sie mit den dem Schüler längst vertrauten speziellen Zahlen durchgeführt werden.

b) Betonung des funktionellen Denkens

Sehr viele geometrische und physikalische, vor allem aber auch technische und wirtschaftliche Zusammenhänge lassen sich nur mit Hilfe des Begriffes der *Funktion* beschreiben. Natürlich läßt sich der Funktionsbegriff auf dieser Stufe noch nicht ausdrücklich einführen. Aber er kann auf mannigfache Weise vorbereitet werden: Man stellt Tabellen auf, die einerseits Mengen in kg und andererseits die zugehörigen Preise in Franken enthalten; man berechnet zu verschiedenen Längen die zugehörigen Breiten, wenn die Fläche stets 12 m^2 betragen soll, oder man überblickt das Anwachsen eines Kapitals im Laufe der Jahre usw. Alle diese Beispiele haben die folgende Struktur: Eine erste veränderliche Größe kann verschiedene Werte annehmen, und jedem dieser Werte ist ein bestimmter Wert einer zweiten veränderlichen Größe zugeordnet; außerdem sind noch unveränderliche oder konstante Größen vorhanden. – Das funktionale Denken führt notwendigerweise zu:

⁵⁾ Vergleiche die entsprechenden Kapitel in V. Kopp und R. Ineichen, a. a. O. z. B. S. 14, 18, 24 usw.

c) oftmalige Verwendung von graphischen Darstellungen

Man beginnt etwa mit der Darstellung von Zahlen durch einzelne Strecken oder durch Abschnitte eines Zahlenstrahls und kommt schließlich zur graphischen Darstellung von Beziehungen, wie sie im obigen Abschnitt erwähnt worden sind, d. h. also zur *Darstellung von Funktionen durch Kurven*. Typische Bilder, die behandelt werden sollten, sind etwa die *Gerade als Bild der direkten Proportionalität* („Je mehr, desto mehr“) und die *Hyperbel als Bild der indirekten Proportionalität* („Je mehr, desto weniger“). – Daneben verdienen natürlich auch andere graphische Veranschaulichungen (Stäbe, Rechtecke, Kreise) eine gewisse Pflege; die Schüler finden auf solchen Gebieten manchmal erfreulich phantasievolle und originelle Darstellungen und tragen auch gerne das erforderliche Zahlenmaterial zusammen.

d) *Hinweise auf Begriffe, die in den verschiedenen mathematischen Fächern gemeinsam vorkommen*. Es sei hier nur einer dieser zentralen Begriffe gestreift, der Begriff des *Grenzwertes*. Natürlich kann es sich nicht darum handeln, diesen Begriff ausdrücklich einzuführen. Aber der Schüler müßte doch beispielsweise bei der Umformung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche auf den Sinn einer Gleichheit von der Art $\frac{5}{6} = 0,83333\dots$, oder $0,999\dots = 1$ usw. aufmerksam gemacht werden. Nicht etwa so, daß ihm gesagt wird, diese Gleichheit stimme halt nur, wenn man „unendlich viele“ Stellen nehme. Denn mit „unendlich viel“ kann der Schüler sicher nichts anfangen. Aber, indem man ihm sagt, die Gleichheit $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$ bedeute einfach, daß man der Zahl $\frac{5}{6}$ durch $0,8333\dots$ so nahe kommen kann, wie man will, wenn man nur genügend viele Stellen nach dem Komma nimmt. Damit ist eine Formulierung gegeben, die auch in der Geometrie verwendet werden kann: Dem Kreisumfang kann man durch Bestimmung des Umfangs eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks so nahe kommen, wie man will, wenn man nur ein Vieleck mit genügend großer Eckenzahl nimmt; ähnliches kann beim Bestimmen des Kugelinhaltes mit Hilfe einer Zerlegung in eine Anzahl Pyramiden mit der Spitze im Kugelzentrum gesagt werden. In diesen und in manchen andern Fällen geht es nicht ohne Grenzwert. Der Ausdruck „Grenzwert“ und seine Problematik gehört indessen nicht auf diese Stufe, der Begriff kann aber durch die oben genannte Formulierung in durchaus verständlicher

Art eingeführt und zu willkommenen Querverbindungen benützt werden. – Ein weiterer zentraler Begriff, der in den verschiedenen mathematischen Fächern auftritt, ist – wie oben bereits ausgeführt – der der *Funktion*.

*

Die hier niedergelegten Gedanken sind fragmentarisch und könnten noch in sehr verschiedenen Richtungen ergänzt werden. Eine dieser Richtungen mag noch kurz angedeutet werden: Gerade der Arithmetikunterricht, in dem für das Lösen von Aufgaben ja relativ viel Zeit zur Verfügung steht, ist sehr geeignet, den Schüler eigentlich in die *Kunst und die Technik des AufgabenlöSENS* systematisch einzuführen. Leider ist diese schon von den Alten gepflegte *Heuristik* oder ‚ars inveniendi‘, deren Ziel es ist, Regeln und Methoden von Entdeckung und Erfindung zu studieren, ein heute fast vergessener Wissenszweig. Und doch wäre es für uns Lehrer und unsere Schüler so wichtig, den Vorgang des AufgabenlöSENS zu verstehen, d. h. zu erkennen, welche Denkopoperationen bei diesem Prozeß in typischer Weise von Nutzen sein können. Reiche Anregung zu solchen Überlegungen liefert das in der Sammlung DALP im Francke-Verlag erschienene Bändchen von Prof. G. Polya, ‚Schule des Denkens (Vom Lösen mathematischer Probleme)‘; wir möchten nachdrücklich auf dieses originelle und sehr kurzweilige Büchlein hinweisen.⁶⁾

Von Schopenhauer stammt das für den Mathematiker nicht sehr schmeichelhafte Zitat: «Phantasiose Köpfe werden nie etwas Großes leisten – es sei denn in der Mathematik.» Wir sind natürlich nicht dieser Meinung! Im Gegenteil, wir meinen, es brauche in der Mathematik und im Mathematikunterricht recht viel Phantasie, Intuition, Freude am schöpferischen Tun und am Erfinden, Erforschen und Entdecken. Und wir glauben, auch der Arithmetikunterricht könnte in dieser Hinsicht mancherorts noch viel gewinnen, wenn in ihm das Mathematische noch etwas stärker in den Vordergrund treten würde. Dazu einige Hinweise zu geben, war das Ziel dieser Zeilen.

⁶⁾ In diesem Zusammenhang sei noch auf die sehr lesenswerte kleine Schrift von F. Denk, *Die mathematische Erfindung* (mit Ausblicken auf die allgemeine Heuristik) hingewiesen (Regensburg 1951) und auf das Buch von M. Wertheimer, *Produktives Denken* (Frankfurt a. M. 1957).

Zum Problem «Mädchen und Mathematik»

Meinrad Hensler, Luzern

In letzten Jahrbuch der Neuen Helvetischen Gesellschaft, das den Titel trägt: *Gehen wir mit der Zeit?* wird die Forderung erhoben, es solle jedem jungen Menschen *die* Bildung ermöglicht werden, die seinen Fähigkeiten und Neigungen entspreche.

Es ist für unser Land eine Schicksalsfrage, ob es gelingt, den empfindlichen Mangel an qualifizierten Fachleuten, vor allem für die technischen Berufe, zu beheben. Die Schweiz lebt seit ihrer Industrialisierung von einem anerkannten Vorsprung in der Forschung und der technischen Entwicklung. Von einer ausgedehnten geistigen Vorarbeit und der durch sie ermöglichten intensiven Qualitätsproduktion hängt es ab, ob unser rohstoffarmes Land den internationalen Leistungswettbewerb auf den Weltmärkten auszuhalten vermag. Immer ernster und besorgter sind deshalb die Rufe nach technisch-naturwissenschaftlich geschultem Nachwuchs, fehlt es doch jährlich an 500 Spezialisten, um die großen Aufgaben unserer Wirtschaft erfüllen zu können. Mit allen Mitteln wird versucht, auch minderbegüterten Eltern die Möglichkeit zu geben, ihre begabten Kinder studieren zu lassen. Ein gut ausgebautes Stipendienwesen soll es verhindern, daß wertvolle Kräfte unserer Forschung und Industrie nur aus finanziellen Gründen verloren gehen. Mit Dankbarkeit möchte ich die großen Anstrengungen, die auf diesem Gebiet unternommen werden, anerkennen, doch glaube ich nicht, daß es auf diese Weise allein gelingen wird, die bestehenden Lücken auszufüllen. Wir müssen verhindern, daß durch verlockende Angebote von seiten der Technik junge Leute Berufen entzogen werden, die ihrer ebenso sehr bedürfen. Nicht eine Verlagerung der Berufswünsche darf unser Ziel sein, sondern eine Förderung brachliegender Begabungen. Ich denke da ganz besonders an unsere Mädchen. Die Tatsache, daß auf 10000 Frauen in der Schweiz nur 64 Studentinnen fallen, muß aufhören lassen und berechtigt sicher zur Frage: «Gehen wir in unserer Mädchenbildung mit der Zeit?» Nur selten finden wir in den Schülerverzeichnissen unserer Oberrealschulen Mädchen, und es ist eine große Ausnahme, daß eine Abiturientin des Gymna-