

**Zeitschrift:** Schweizer Schule  
**Herausgeber:** Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz  
**Band:** 51 (1964)  
**Heft:** 14

**Artikel:** Archimedes, der grösste Mathematiker des Altertums [Fortsetzung]  
**Autor:** Hauser, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-534818>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dr. G. Hauser, Biel

II. Teil

3. Über Spiralen

a) Eine besonders originelle, ja merkwürdige Schrift des Archimedes über einen Gegenstand der ebenen Geometrie ist die schöne Abhandlung «Über Spiralen». Die *Archimedische Spirale* (= Schneckenlinie) ist die erste krumme Linie, welche durch eine doppelte Gattung von Bewegungen erzeugt worden ist.

b) *Definition:* Archimedes erzeugt seine Spirale durch die gleichförmige Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt O, auf dem sich gleichzeitig ein Punkt P mit gleichförmiger Geschwindigkeit von O entfernt (Fig. 7).

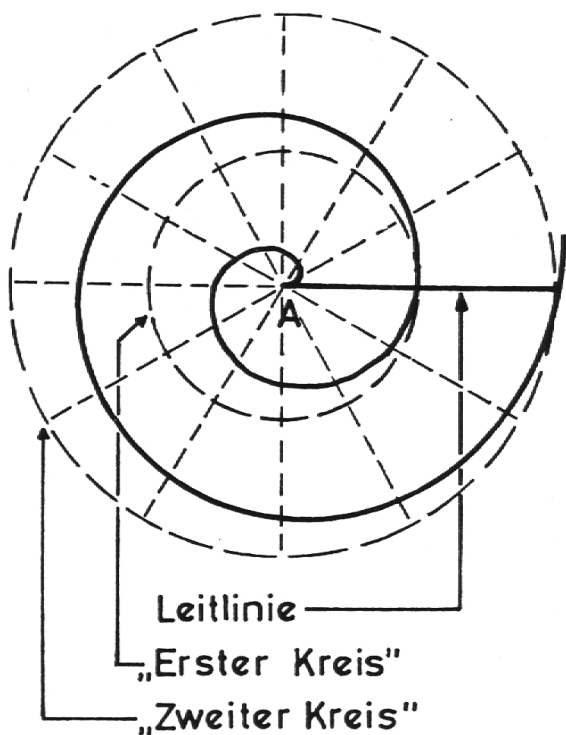


Fig. 7

c) Ein großer Fortschritt besteht in dem Umstand, daß Archimedes mit der *Bewegung* operiert, mit der stetigen Veränderlichkeit, mit der Kontinuität. Damit bricht Archimedes in entschiedener Weise mit der eleatischen Tradition, welche die Idee des reinen Seins ausgebildet hatte und die Veränderung für

\* Siehe «Schweizer Schule» Nr. 12 vom 15. Oktober 1964.

eine Täuschung hielt. Euklids Geometrie ist ausgesprochen eleatisch. In seinen «Elementen» ist jede Bewegung ausgeschlossen, sozusagen verpönt. Die euklidische Geometrie ist starr. Bei der Definition des Kreises zum Beispiel wird nicht das Veränderliche in den Vordergrund gerückt, sondern das Konstante: Der Kreis ist die Gesamtheit der Punkte, für die der Abstand von einem gegebenen Punkt gleich ist. Für Euklid stellt die Gerade keine Kontinuität dar, sondern sie besteht aus einer Reihe voneinander getrennter Punkte.

d) Archimedes gibt die Gleichung der Spirale in Polarkoordinaten an:  $r = a \cdot \varphi$ , genauer  $r = a \cdot \text{arc } \varphi$ , wobei a das konstante Verhältnis der Entfernungs- und der Drehgeschwindigkeit bedeutet.

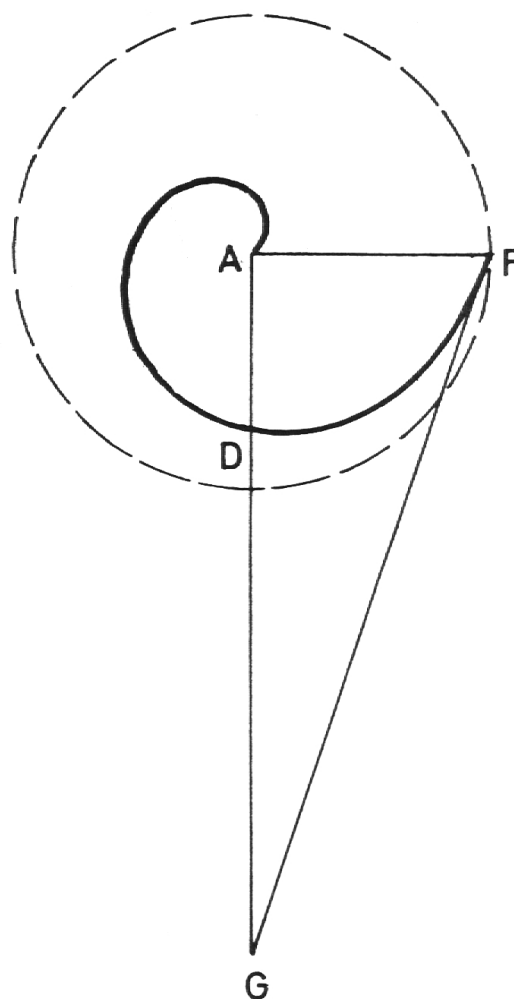


Fig. 8

$$\S 18. AG = AF \cdot \text{arc } 360^\circ = 2\pi AF$$

e) Die ganze Abhandlung enthält 28 Paragraphen, das heißt es werden 28 Sätze formuliert und bewiesen. Die Hauptprobleme sind in den Differentialsätzen 18 bis 20 über die *Bestimmung der Spiralentangente* sowie in den Integralsätzen 24 bis 28 über die *Quadratur der Spiralenfläche* enthalten.

Der Inhalt der drei *Differentialsätze*, die von Archimedes indirekt in ziemlich komplizierten Erörterungen bewiesen werden, lassen sich in einen einzigen Satz zusammenfassen, der wie folgt lautet: Die Subtangente zu irgend einem Punkt der Spirale ist gleich dem Produkte aus dem Radius Vektor und der Anomalie (= arc des Winkels zwischen der Tangente und dem Radius vektor) (siehe Fig. 8, 9).

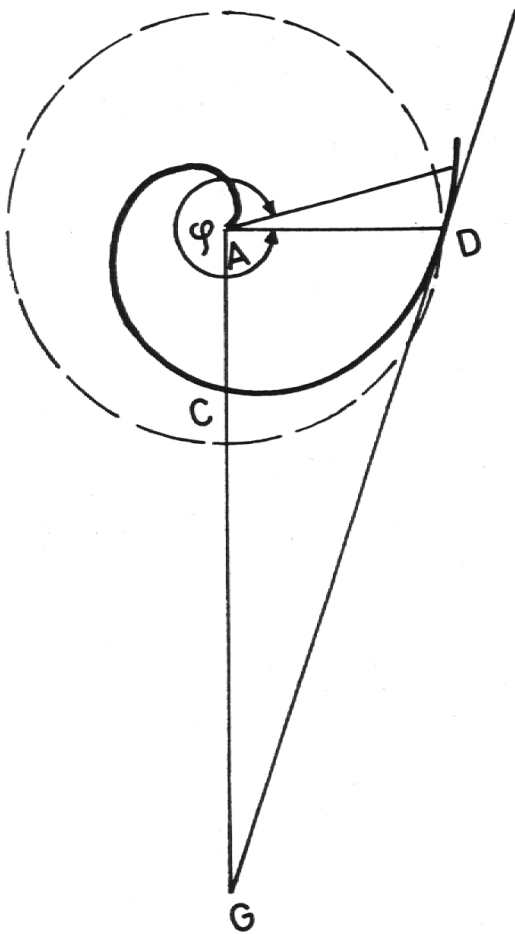


Fig. 9

§ 20.  $AG = AD \cdot \text{arc } \varphi$

Man erkennt, daß diese Eigenschaft der Spirale unmittelbar die Rektifikation des Kreisbogens liefert. Von den fünf *Integralsätzen* erwähne ich nur die zwei ersten und wichtigsten, nämlich *Satz 24*: Die Fläche, die gebildet wird von der Spirale erster Umdrehung und der ersten Strecke auf der Leitlinie, ist gleich dem *dritten Teil* des Inhalts des ersten Kreises (Fig. 10).

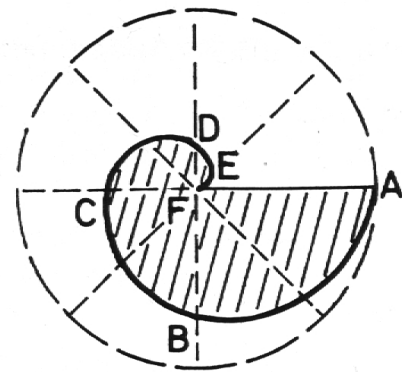


Fig. 10

§ 24. Flächeninhalt der Spirale erster Umdrehung

$$F_1 = \frac{1}{3} \pi \overline{AF}^2$$

*Satz 25*: Die Fläche, die begrenzt wird von der Spirale zweiter Umdrehung und der zweiten Strecke auf der Leitlinie, hat zum Inhalt des zweiten Kreises das Verhältnis 7:12 (Fig. 11).

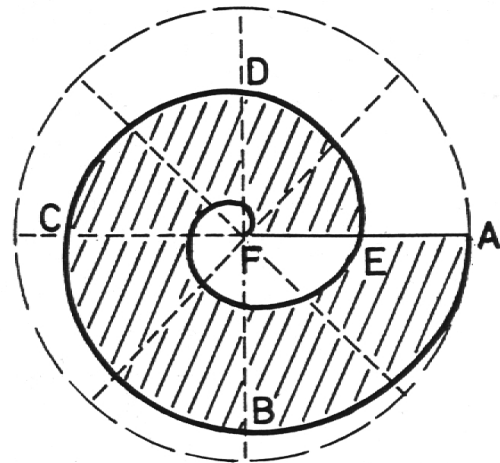


Fig. 11

§ 25. Flächeninhalt der Spirale zweiter Umdrehung

$$F_2 = \pi \left[ r_2 \cdot r_1 + \frac{1}{3} (r_2 - r_1)^2 \right] = \frac{7}{12} \pi \cdot r_2^2$$

Allgemein  $F_n = \pi \left[ r_n \cdot r_{n-1} + \frac{1}{3} (r_n - r_{n-1})^2 \right]$

Df.  $F_3 = \frac{19}{27} \pi \cdot r_3^2, F_4 = \frac{37}{48} \pi \cdot r_4^2, \text{ usw.}$

#### 4. Weitere planimetrische Leistungen

##### a) Wahlsätze

Geometrisch interessant sind ferner einige Sätze, die in einem (in arabischer Sprache erhaltenen und ins Lateinische übertragenen) Werk mit dem Titel *«Liber Assumptorum»* enthalten sind. In der Literatur wird dieses Werk auch unter dem Namen *«Buch der Wahlsätze»* oder *«Buch der Lemmata»*, das heißt *«Buch der Hilfssätze»* erwähnt. Es besteht aus

15 Sätzen der ebenen Geometrie, die mindestens teilweise auf Archimedes zurückgehen. Man nimmt an, daß insbesondere der 4., 5., 6., 8. und 14. Satz wirklich auf Archimedes selbst zurückzuführen sind.

1. Die Sätze 4-6 beschäftigen sich mit einer Figur, welche *Arbelos* oder «Sattlermesser» genannt wird, weil sie ungefähr die Form eines Sattler- oder Schustermessers hat (Fig. 12).

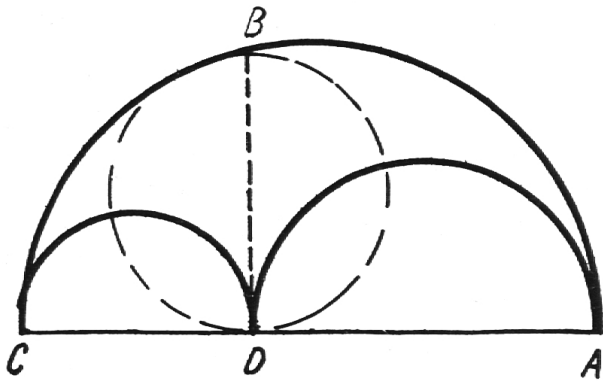
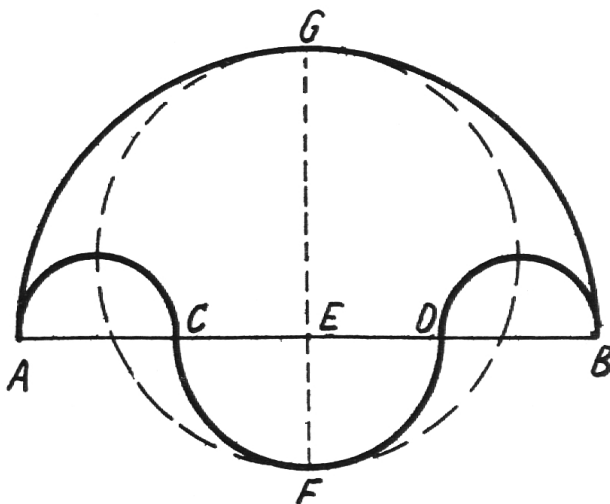


Fig. 12

Diese Figur besteht aus einem Halbkreis, über dessen Durchmesser zwei aneinanderstoßende, verschieden große Halbkreise in das Innere des umschließenden Halbkreises eingeschrieben sind. Es wird bewiesen, daß die Arbelosfigur flächengleich mit dem Kreis über dem Durchmesser BD ist.

2. Der 14. Satz bezieht sich auf den Flächeninhalt einer Figur mit dem Namen *Salinon*, der «Wogengestalt», wie man diesen griechischen Ausdruck etwa ins Deutsche übertragen darf (von *σαλος* = «das Schwanken des Meeres»? (siehe Fig. 13).

Fig. 13



Diese Figur entsteht, wenn über und unter derselben Geraden als Richtung des Durchmessers vom gleichen Mittelpunkte aus, aber mit verschiedenen in beliebigem Verhältnis zueinander stehenden Radien Halbkreise beschrieben werden, zu welchen noch zwei weitere kleine Halbkreise treten, die nach der Seite des größeren Halbkreises über den frei gelassenen Teilen des Durchmessers konstruiert sind. Wird durch den Mittelpunkt der beiden zuerst gezeichneten Halbkreise und senkrecht zu deren Durchmesser die Strecke FG gezeichnet, so ist der um diese Strecke als Durchmesser konstruierte Kreis dem Salinon flächengleich.

3. Der 8. Satz. Schließlich ist noch der 8. Satz erwähnenswert, weil er von besonderer Tragweite ist. Denn die betreffende Aufgabe geht darauf aus, einen gegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, und zwar mit Hilfe der *Einschiebung einer Strecke*, der sogenannten «Neusis»-Konstruktion oder «Papierstreifenkonstruktion» (Fig. 14).

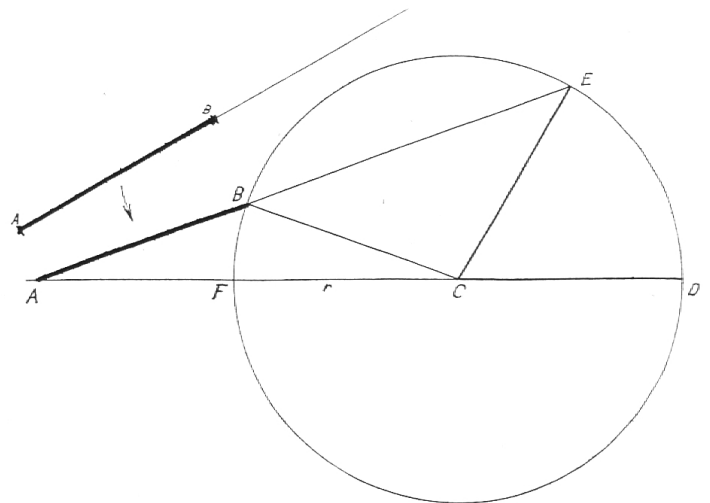


Fig. 14

$$\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \sphericalangle CBE = \frac{1}{2} \sphericalangle BEC = \frac{1}{3} \sphericalangle DCE$$

$$AB = CD = r$$

Solche «Neusis»-Konstruktionen, bei denen eine Strecke bestimmter Länge so zwischen zwei Linien gelegt wird, daß die Verlängerung dieser Strecke durch einen bestimmten Punkt geht, haben die Griechen oft angewendet, so schon Hippokrates bei seinen «Möndchen»-Quadraturen.

b) Die Flächenformel  $F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$   
 $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$

Nach einer arabischen Überlieferung ist Archime-

des auch der Entdecker der bekannten Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, die gewöhnlich *Heron* zugeschrieben wird, weil sie zuerst in dessen Werk *«Metrika»* auftritt.

c) *Die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks*

Diese Konstruktion ist ebenfalls nur arabisch überliefert. Mit Rücksicht auf die Beschränkung des mir zur Verfügung stehenden Raumes muß ich auf die Darstellung dieser speziellen Leistung von Archimedes verzichten. Sie würde mehr als eine ganze Druckseite beanspruchen. Wer sich für diese originale Konstruktion interessiert, kann sie zum Beispiel in folgender Literatur nachlesen:

1. *J. Tropfke*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 59 (1928), S. 195.
2. *J. Tropfke*, Die Siebeneckabhandlung des Archimedes, *Osi- ris* I, 636 ff.
3. *O. Becker*, Das mathematische Denken der Antike, S. 90 ff.
4. *B. L. van der Waerden*, Erwachende Wissenschaft, S. 378 ff.

V. *Die stereometrischen Leistungen des Archimedes*

1. *Über Kugel und Zylinder*

Ich komme nun zur Besprechung der stereometrischen Arbeiten von Archimedes. Unter ihnen ist die schöne Abhandlung über *«Kugel und Zylinder»* wohl die wichtigste. Schon der Anfang dieser vollständig erhaltenen Schrift ist von besonderem Interesse. Denn hier stellt Archimedes nicht bloß die übliche Reihe der notwendigen Definitionen (es sind im ganzen sechs) auf, sondern ausnahmsweise auch fünf Postulate.

Es ist nicht verwunderlich, daß der geniale Archimedes die große Lückenhaftigkeit des Euklidischen Axiomensystems empfunden hat und es zu ergänzen suchte. Die erste seiner Forderungen ist einfach und sehr bekannt. Sie lautet:

1. Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die *gerade* Linie die kürzeste.

Ganz besondere Berühmtheit hat aber sein *fünftes* Postulat erlangt:

5. Die größere von zwei gegebenen Größen, seien es Linien, Flächen oder Körper, übertrifft die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden Größen übertrifft.

Das ist nämlich nichts anderes als das sogenannte *Archimedische Axiom des Messens*, welches erst in neuerer Zeit wieder in seiner vollen Bedeutung gewürdigt worden ist. Es tritt als erstes Stetigkeits-

axiom im modernen Axiomensystem von *David Hilbert* auf, und zwar in folgendem Wortlaut:

«*Es ist stets möglich, jede beliebige Strecke  $\overline{AB}$  durch entsprechende Vervielfachung einer kleineren Strecke  $\overline{CD}$  zu übertreffen.*»

Somit hat schon Archimedes vollständig erkannt, daß dieses Axiom jedem Meßvorgang als unentbehrliche Forderung zugrunde liegen muß. (Es wird von Archimedes auch in der Abhandlung *«Über Spiralen»* verwendet.) Tatsächlich ist zwar der in diesem Axiom ausgesprochene Gedanke schon von *Eudoxos* zur Definition des Begriffes des Verhältnisses verwendet und von *Euklid* als 4. Definition in den Anfang des 5. Buches seiner *«Elemente»* aufgenommen worden. Es ist aber ein wesentlicher Unterschied, ob man eine gewisse Eigenschaft zur Definition eines neuen Begriffes benützt, oder ob man einsieht, daß der betreffende Sachverhalt beim Messen *stets* erfüllt sein muß und damit als unentbehrliches Postulat zu gelten hat.

Im *ersten Buch* der Abhandlung über *«Kugel und Zylinder»* werden vor allem die drei folgenden neuen und wichtigen Sätze bewiesen:

1. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Vierfachen ihres größten Kreises:  $O = 4\pi r^2$ .
2. Die (gekrümmte) Oberfläche eines Kugelabschnittes (Kugelkalotte) ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius gleich der Verbindungsstrecke des Scheitels des Abschnittes mit einem Punkt seines Begrenzungskreises ist:  $O_{ksg} = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot (2r \cdot h) = 2\pi r h$  (Fig. 15).

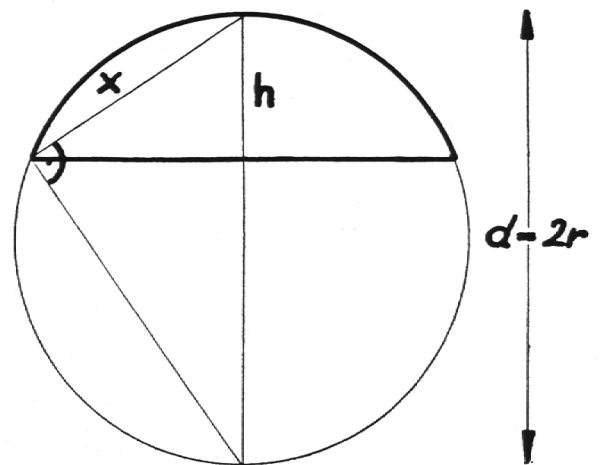


Fig. 15

3. Der Zylinder, der gleiche Grundfläche besitzt mit dem größten Kreise einer Kugel, dessen Höhe aber gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl

seinem Inhalte als auch seiner Oberfläche nach anderthalbmal so groß wie die Kugel:

a)  $V_z = \frac{3}{2} V_k$ , woraus folgt:

$$V_k = \frac{2}{3} \cdot V_z = \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad (\text{Fig. 16})$$

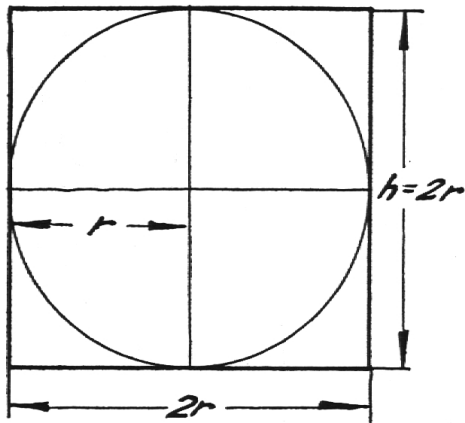


Fig. 16

b)  $O_z = \frac{3}{2} O_k$ , woraus folgt:

$$\begin{aligned} O_k &= \frac{2}{3} O_z = \frac{2}{3} \cdot (2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r) = \frac{2}{3} \cdot 6\pi r^2 \\ &= 4r^2\pi \end{aligned}$$

Daß Archimedes gerade auf diesen letzten Satz einen wohlberechtigten Stolz empfand, geht daraus hervor, daß er die Kugel mit dem sie umgebenden Zylinder auf seinem Grabstein eingemeißelt wünschte, und daß es gerade diese Figur war, an welcher Cicero das Grabmal des großen Mannes erkannte.

#### Kurze Übersicht über den Aufbau des ersten Buches

1. *Leitgedanke*: Der ganze Aufbau des ersten Buches ist getragen von dem leitenden Gedanken, daß die Kugel in *Elementarkegel* zerlegt werden kann, deren jeder seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel hat. Dieser Leitgedanke wird aber nirgends ausdrücklich erwähnt. Denn es entspricht nicht der Art des Archimedes, den leitenden Gedanken in den Vordergrund zu rücken. Er dient vielmehr stillschweigend nur ihm selbst als roter Faden der Beweisführung (Fig. 17).

2. Aus dem Prinzip, das eben als Leitgedanke bezeichnet wurde, ergibt sich ferner, daß der Rauminhalt der Kugel gleich dem Produkt aus der Oberfläche und dem dritten Teil des Radius ist:

$$V = O \cdot \frac{r}{3}$$

3. Diese Gleichung stimmt aber nur dann genau, wenn die Kugel in so viele Kegel zerlegt wird, daß

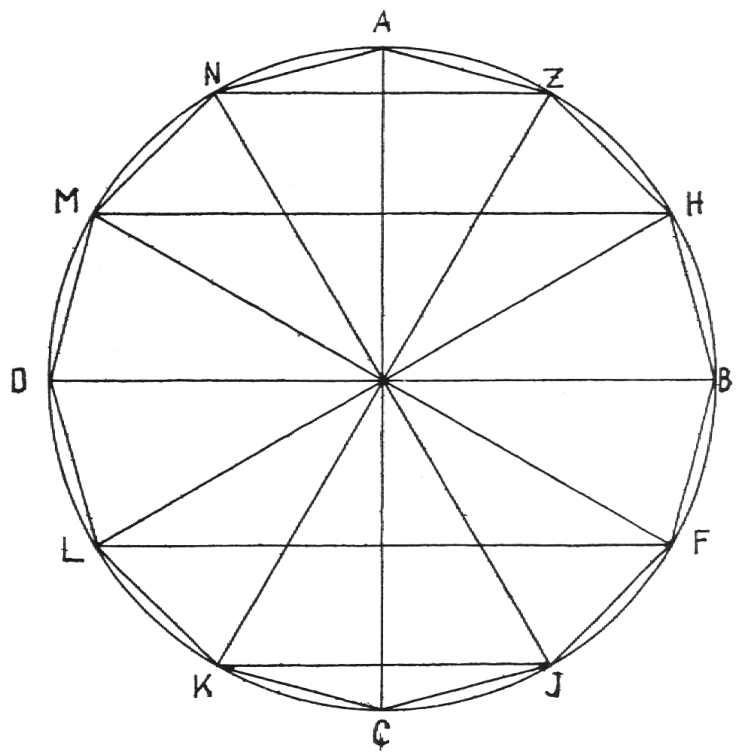


Fig. 17

die Krümmung vernachlässigt werden darf oder ganz beseitigt wird. Dazu sind unzählig viele Kegel notwendig (bis jede Grundfläche dieser Kegel zu einem Punkt zusammenschrumpft). *Die Kugeloberfläche ist somit die Summe der Grundflächen von unendlich vielen, unendlich dünnen Kegeln.* Sie ergibt sich also erst durch eine richtige *Integration*.

4. Diese Integration konnte Archimedes jedoch, dem Stand der Mathematik seiner Zeit entsprechend, nicht leisten. Den angedeuteten Grenzprozeß muß er umgehen, und zwar tut er es durch einen langen, mühsamen, aber einwandfreien Beweisgang, der drei Viertel des ganzen Werkes beansprucht und die Paragraphen 1 bis 33 umfaßt. Auch hier wird jeder Paragraph der Formulierung und dem Beweis eines einzigen Satzes gewidmet.

5. In einem *ersten Abschnitt* werden nach einer Reihe von einleitenden Sätzen zuerst in Paragraph 13 und 14 die Mantelfläche eines geraden Zylinders und eines geraden Kreiskegels bestimmt, beide durch Einschließung zwischen einem einbeschriebenen und einem umbeschriebenen Prisma bzw. zwischen zwei ebensolchen Pyramiden. Diese beiden Beweise werden indirekt geführt. Es wird zum Beispiel beim Zylinder angenommen, die Mantelfläche sei größer als das Produkt  $2\pi rh$  und gezeigt, daß diese Annahme zum Widerspruch führt, daß ein unechter

Bruch gleich einem echten sein müßte. Dasselbe gilt für die Annahme, daß der Zylindermantel kleiner sei als das Produkt  $2\pi rh$ .

Bei diesem und den andern indirekten Beweisen, welchen man in der Abhandlung über «Kugel und Zylinder» begegnet, stützt sich Archimedes auf den schon in Paragraph 2 bewiesenen Satz: Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, so ist es möglich, zwei ungleiche Strecken so zu finden, daß das Verhältnis der größeren zur kleineren Strecke kleiner ist als das Verhältnis der größeren zur kleineren der gegebenen Größen.

In Paragraph 16 wird alsdann die Formel für den Kegelstumpfmantel auf direktem Wege bewiesen.

6. Im *zweiten Abschnitt* werden 16 weitere Sätze bewiesen, die schließlich die Herleitung der Formel für die *Kugeloberfläche* ermöglichen, was in Paragraph 33 tatsächlich durch einen indirekten Beweis geschieht. Die Kugeloberfläche wird in folgender Weise in zwei Grenzen eingeschlossen: Einem größten Kugelkreis wird ein regelmäßiges Vieleck einbeschrieben und ein dazu ähnliches umbeschrieben, dessen Seitenzahl durch vier teilbar ist. Durch Rotation der entstandenen Figur um einen Kreisdurchmesser beschreibt der Kreis selbst eine Kugelfläche und das einbeschriebene sowie das umbeschriebene Vieleck je eine Rotationsfläche, die von Kegelflächen begrenzt wird. Nun wird zunächst die Oberfläche und der Inhalt dieser einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen Rotationsfläche bestimmt.

Die Oberfläche des einbeschriebenen Rotationskörpers zum Beispiel, setzt sich aus Mantelflächen von Kegelstümpfen und von zwei Kegeln zusammen, so daß also die Summe  $2\pi s(r + \rho)$  zu bilden ist, wobei  $s$  die Seitenlinie,  $r$  und  $\rho$  die Radien der Kegelstümpfe bezeichnen. Da  $s$  bei allen Kegelstümpfen die gleiche Größe hat, so reduziert sich das Problem darauf, die Summe aller Diagonalen eines regelmäßigen Vielecks zu bestimmen, die einer zwei Seiten überspannenden Diagonale parallel sind. Zu diesem Zweck wird in Paragraph 21 der folgende Satz bewiesen: Wenn einem Kreise ein regelmäßiges  $2n$ -Eck einbeschrieben wird und alle jene Diagonalen konstruiert werden, die einer zwei Seiten überspannenden Diagonalen parallel sind, so verhält sich die Summe aller dieser Parallelen zum Durchmesser wie die Diagonale, die  $n-1$  Seiten überspannt, zur Seite des Vielecks (Fig. 18).

$$\frac{EQ}{QA} = \frac{KQ}{QO} = \frac{ZU}{UD} = \frac{LU}{UP} = \frac{BS}{SP} = \frac{DS}{ST} = \frac{HY}{YT} = \frac{NY}{YV} =$$

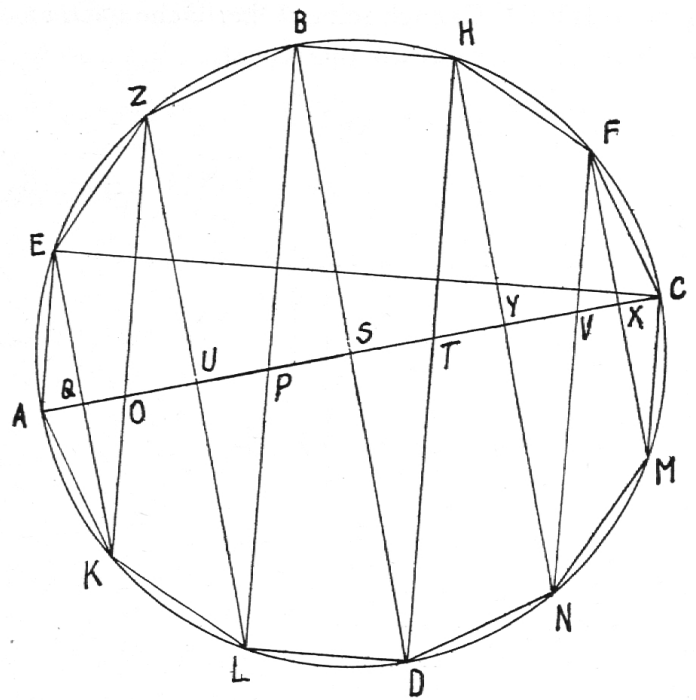


Fig. 18

$$\frac{FX}{XV} = \frac{MX}{XC}$$

$$\frac{EQ}{QA} = \frac{EK + ZL + BD + HN + FM}{AC}$$

$$\frac{EQ}{QA} = \frac{CE}{EA}$$

$$(EK + ZL + BD + HN + FM) : AC = CE : EA$$

Algebraisch ausgedrückt, bedeutet dies die Summierung der Folge  $\sin a + \sin(2a) + \sin(3a) + \dots + \sin(na)$ .

Dieses Problem löst Archimedes auf elegante, elementare Weise in den Paragraphen 21 und 22, die gewissermaßen den Kernpunkt des ganzen Werkes darstellen.

In Paragraph 34 wird alsdann, ebenfalls indirekt, der Satz bewiesen: *Der Inhalt der Kugel* ist viermal so groß wie der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Fläche des größten Kugelkreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

$$\text{In Zeichen: } V = 4 \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

7. In einem *dritten und letzten Abschnitt* wird noch die Mantelfläche und der Inhalt eines *Kugelsegments* und eines *Kugelsektors* hergeleitet.

#### Über den Inhalt des zweiten Buches

Im zweiten Buch löst Archimedes Aufgaben, die mit Hilfe von Sätzen aus dem ersten Buch mit Erfolg behandelt werden können. In Paragraph 1 zum Bei-

spiel wird das Problem gelöst: Es ist eine Kugel zu finden, deren Inhalt einem gegebenen Zylinder oder Kegel gleich ist. Diese Aufgabe erfordert die Lösung einer kubischen Gleichung. Dies gilt insbesondere auch von der Aufgabe von Paragraph 4: Eine gegebene Kugel ist so zu schneiden, daß die Segmente zueinander ein gegebenes Verhältnis haben.

In Paragraph 9 wird auf elementare Weise die folgende Extremwertaufgabe gelöst: Von allen Kugelsegmenten mit gleicher Kalotte ist die Halbkugel das größte.

2. Über Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoide (siehe die Figuren 19–21)

Im zweiten vollständig erhaltenen und ebenfalls wichtigen stereometrischen Werk werden die *Rotationskörper zweiter Ordnung* eingehend behandelt, welche durch Umdrehung einer Parabel, einer Hyperbel oder einer Ellipse um ihre Achsen entstehen. Bei den Hyperboloiden wird nur dasjenige in Betracht gezogen, welches durch Rotation einer Hyperbel um ihre reelle Achse erhalten wird und das wir heute das zweischalige Rotationshyperboloid nennen.

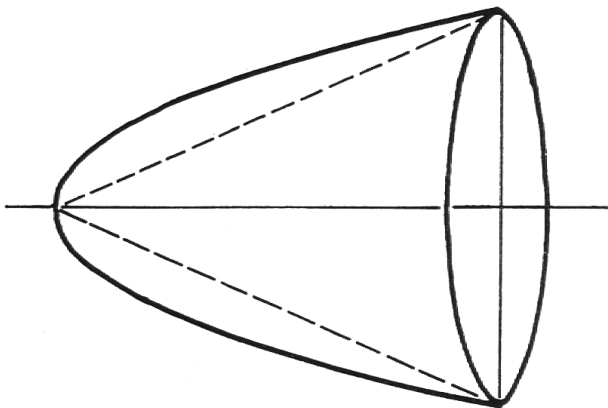


Fig. 19

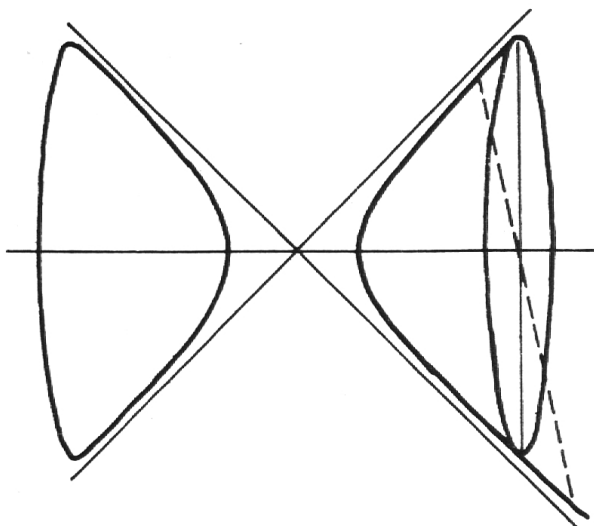


Fig. 20

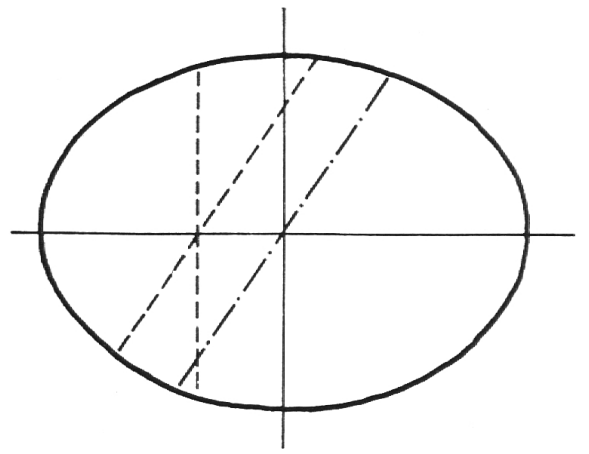


Fig. 21

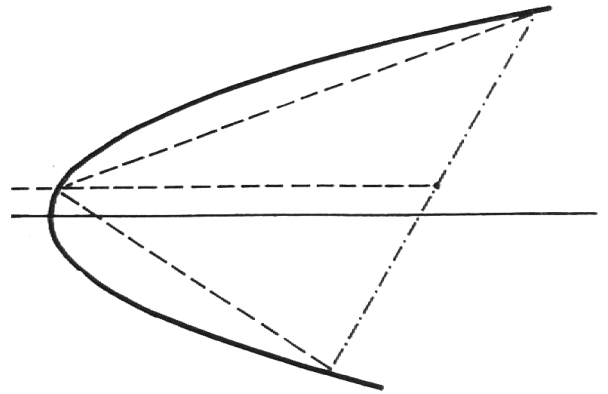


Fig. 22

Es handelt sich dabei vor allem um die Lösung folgender *Hauptprobleme*: Es wird bewiesen, daß der Rauminhalt jedes Paraboloidsegments, dessen Basisebene senkrecht auf der Achse des Paraboloids steht, anderthalbmal so groß wie der Kreiskegel von gleicher Grundfläche und Höhe ist. Dasselbe wird auch bewiesen für ein durch eine zur Achse schiefe Ebene abgeschnittenes Paraboloidsegment (Fig. 22). Ein solches ist nämlich ebenfalls anderthalbmal so groß wie das zugehörige Kegelsegment. Es werden ferner die entsprechenden Kubaturen für ein Hyperboloid- sowie für ein Ellipsoidsegment durchgeführt.

Zu diesem Zweck teilt Archimedes die Umdrehungskörper durch einander parallele und gleich weit voneinander entfernte ebene Schnittflächen (Fig. 23, 24). Auf diese Weise erhält er zwischen je zwei Schnittebenen ein Körperelement, das von einem Zylinder eingeschlossen ist und einen andern in sich enthält. Die Summierung von sämtlichen größeren Zylindern nebst der Summierung von sämtlichen kleineren Zylindern wird somit zwei Grenzen liefern, zwischen welchen der Rauminhalt des gegebenen Rotationskörpers enthalten ist und welche bei



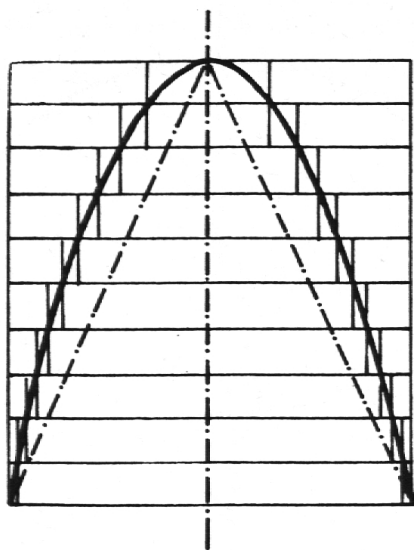


Fig. 23

gegenseitiger Annäherung der Schnittebenen beliebig wenig voneinander unterschieden sind. Einige auf Widersprüche führende Ungleichungen vollenden wieder die Exhaustion, und so wird die Kubatur der genannten Körper gefunden.

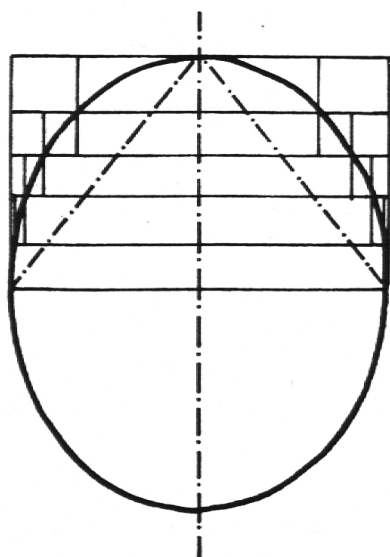


Fig. 24

In Paragraph 5 wird nebenbei der folgende Satz über den *Flächeninhalt der Ellipse* bewiesen: Die Fläche der Ellipse hat zu der eines Kreises dasselbe Verhältnis wie das Produkt aus ihren beiden Achsen zum Quadrat des Kreisdurchmessers.

In Zeichen:  $F_E : F_K = a \cdot b : a^2$

### 3. Über den Integralbegriff bei Archimedes

Archimedes bestimmt also den Rauminhalt der Konoide durch Einschließung zwischen einer «Obersumme» und einer «Untersumme». Trotzdem kann man nicht behaupten, daß er den eigentlichen

Integralbegriff gekannt habe. Denn seine Integrale bleiben stets an eine ganz bestimmte geometrische Deutung gebunden: als Flächeninhalt oder als Volumen. Nirgends sieht man, daß er erkannte, daß allen diesen geometrischen Interpretationen ein einziger Begriff zugrunde liegt. Er behandelt zum Beispiel die Quadratur der Parabel einerseits und die Inhaltsbestimmung der Kugel andererseits in seinen strengen Beweisen mit ganz verschiedenen Methoden, obschon beide Probleme nach heutiger Einsicht auf dasselbe Integral führen und also jede Methode zur Behandlung des einen auch für das andere brauchbar gewesen wäre.

Dennoch ist Archimedes durch seine strengen Flächen- und Inhaltsbestimmungen «zum Vorläufer der modernen Integralrechnung» geworden.

### 4. Verlorenes Werk über die dreizehn halbregelmäßigen Körper

Nach dem Zeugnis von *Pappos* (griechischer Mathematiker von Alexandrien, 3. Jahrhundert n. Chr.) hat Archimedes die Stereometrie schließlich auch noch durch die Feststellung und Durchforschung der sogenannten 13 *archimedischen oder halbregelmäßigen Polyeder* gefördert. Zehn dieser Vielfache werden von je zwei und die drei übrigen von je drei Arten von regelmäßigen Vielecken begrenzt, und zwar wie folgt:

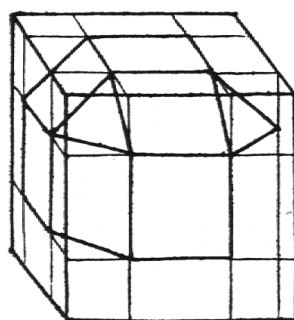


Fig. 25

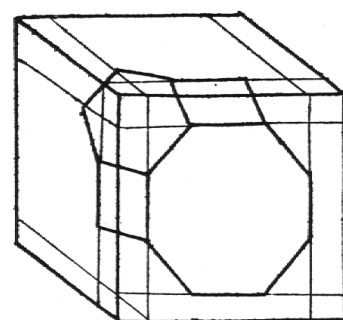


Fig. 26

1. 4 regelmäßige Dreiecke und 4 regelmäßige Sechsecke
- oder 2. 8 Dreiecke und 6 Quadrate
- oder 3. 6 Quadrate und 8 Sechsecke
- oder 4. 8 Dreiecke und 6 Achtecke
- oder 5. 8 Dreiecke und 18 Quadrate (Fig. 25)
- oder 6. 12 Quadrate, 8 Sechsecke und 6 Achtecke (Fig. 26)
- oder 7. 20 Dreiecke und 12 Fünfecke
- oder 8. 12 Fünfecke und 20 Sechsecke
- oder 9. 20 Dreiecke und 12 Zehnecke
- oder 10. 32 Dreiecke und 6 Quadrate
- oder 11. 20 Dreiecke, 30 Quadrate und 12 Fünfecke

oder 12. 30 Quadrate, 20 Sechsecke und 12 Zehnecke  
oder 13. 80 Dreiecke und 12 Fünfecke

## VI. Arithmetische und algebraische Leistungen

### 1. Angenäherte Berechnung von irrationalen Quadratwurzeln

In seiner sehr gedrängt geschriebenen Abhandlung über *Die Ausmessung des Kreises* hat Archimedes die angenäherte Berechnung von irrationalen Quadratwurzeln zur Bestimmung der Zahl  $\pi$  durchgeführt und sich damit als ausgezeichnete Zahlenrechner ausgewiesen.

### 2. Summierung von aufeinanderfolgenden Quadratwurzeln

Archimedes hat zum Beispiel in seiner Schrift *Über Spiralen* die Summe der folgenden endlichen geometrischen Folge berechnet:

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

### 3. Lösung von kubischen Gleichungen

Im zweiten Buch über *«Kugel und Zylinder»* findet man genaue Lösungen von Gleichungen dritten Grades, zum Beispiel die Lösung der Gleichung  $x^2(a - x) = b \cdot c^2$ .

### 4. Die Sandzahl

In einer populären Abhandlung, die er dem König Gelon gewidmet hat, wird von Archimedes das *Problem der großen Zahl* zu lösen versucht. Sie trägt den Titel: *Über die Zahl des Sandes*. In Anknüpfung an die schon damals bekannte Redewendung *«zahllos wie der Sand am Meer»* hat Archimedes in dieser Schrift ein *System zur geeigneten Bezeichnung beliebig großer Zahlen* aufgestellt. Er wollte damit zeigen, daß auch dann, wenn man das ganze Weltall (mit dem angenommenen endlichen Durchmesser von etwa 347 Lichttagen) mit Sand ausfüllte, die Zahl der Sandkörner dennoch angegeben werden könnte.

### 5. Das Rinderproblem (*«Problema bovinum»*)

Archimedes scheint vom Universitätsbetrieb im *«Museion»* nicht immer besonders erbaut gewesen zu sein. Denn er spottet an einer Stelle über eingebildete alexandrinische Gelehrte, die so täten, als sei ihnen nichts neu. Er legte ihnen gelegentlich falsche

Sätze oder unlösbare Probleme vor, *«damit sie überführt würden, auch Unmögliches bewiesen (bzw. gelöst) zu haben»*. So wird zum Beispiel in einem Brief an Eratosthenes das folgende Problem zur Lösung unterbreitet:

*«Der Sonnengott (Helios) hatte eine aus Stieren und Kühen bestehende Rinderherde, von der ein Teil weiß, ein zweiter schwarz, ein dritter scheckig und ein vierter braun gefärbt war. Bei den Stieren war die Anzahl der weißen, bzw. schwarzen, bzw. scheckigen um ein halbes und ein drittel, bzw. ein viertel und ein fünftel, bzw. ein sechstel und ein siebentel der Anzahl der schwarzen, bzw. scheckigen, bzw. weißen größer als die Anzahl der braunen.*

*Die Anzahl der weißen, bzw. schwarzen, bzw. scheckigen, bzw. braunen Kühe war ein drittel und ein viertel, bzw. ein viertel und ein fünftel, bzw. ein fünftel und ein sechstel, bzw. ein sechstel und ein siebentel der schwarzen, bzw. scheckigen, bzw. braunen, bzw. weißen Rinder.*

*Wie setzte sich die Herde zusammen?»*

Diese Aufgabe führt auf ein System von 7 linearen Gleichungen zur Bestimmung von 8 Unbekannten. Demnach besitzt sie unendlich viele Lösungen, ist also unbestimmt.

### Schlußwort

Damit meine Ausführungen über Archimedes nicht ganz im Sande verlaufen, möchte ich zum Schluß noch eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Leistungen des Archimedes auf dem Gebiete der Mathematik geben.

Die Grenze, über die die griechische Mathematik bis zu Archimedes nicht hinaus kam, ist gekennzeichnet durch die Begriffe der *Unendlichkeit* und der *Stetigkeit*. Beides hängt ja aufs engste miteinander zusammen. Unter dem Einfluß der eleatischen Weltanschauung war in der Mathematik des ganzen vierten Jahrhunderts und insbesondere in den Werken Euklids jede Variabilität und Stetigkeit ausgeschaltet. Um zum Begriff der Kontinuität zu gelangen, mußte die Starrheit der Euklidischen Mathematik gelöst werden. Dies konnte nur geschehen, indem der Schritt in den Bereich der Unendlichkeit gewagt wurde. Und dieser große Schritt ist in bewußter und überaus erfolgreicher Weise von dem genialen Archimedes getan worden. Mit ihm setzt eigentlich die höhere Mathematik ein.

Archimedes hat sich vor allem zum *Meister des Exhaustionsbeweises* entwickelt. Wohl hat er die Grundidee dieser antiken Beweismethode nicht selber als erster konzipiert. Er ist aber der erste, der ihre

Tragweite und mannigfaltigen Anwendungsmöglichkeiten eingesehen hat. Er hat denn auch den Exhaustionsbeweis zur Lösung der verschiedensten Probleme verwendet, die zu seiner Zeit als die schwierigsten galten und vor denen die Elementarmathematik damals vorläufig hatte haltmachen müssen. Mit großem Geschick, elegant und auf ganz elementare Weise hat Archimedes die *Quadratur* von krummlinig begrenzten Flächen sowie die *Kubatur* der Rotationskörper zweiter Ordnung durchgeführt. Seinen genauen Untersuchungen liegt der exakte *Grenzbegriff* zugrunde, da verlangt wird, daß die endliche Annäherung so weit soll gebracht werden können, daß die Abweichung des Näherungswertes vom Grenzwert kleiner wird als jede gegebene Größe. Archimedes benützt insbesondere Summen von endlich vielen, aber beliebig kleinen Größen, deren Grenzwerte wir heute bestimmte Integrale nennen.

Archimedes hat sich ferner noch über die Bindungen einer anderen Tradition in entschiedener Weise hinweggesetzt, welche seit Plato jede Anwendung der Mathematik als eines wahren Gelehrten unwürdig verpönt hatte. Mit seiner ganzen Autorität und durch sein gutes Beispiel hat er dem *numerischen Rechnen*, oder der Logistik, wie man es damals nannte, und überhaupt der *angewandten Mathematik* wieder volle Geltung und Daseinsberechtigung verschafft.

In dieser Linie liegen seine schönen Anwendungen von mathematischen Methoden auf mechanische Probleme, wodurch sich Archimedes den Ruhm erworben hat, der *erste theoretische Physiker* zu sein.

Man weiß nicht, was man bei Archimedes mehr bewundern soll, seine Vielseitigkeit, seine Originalität, seinen schöpferischen Genius oder seine Kühnheit. Und wenn es auch nur eine Legende wäre, so wäre es doch eine gut erfundene Legende, wenn dem größten Mathematiker des Altertums überaus stolze Worte zugeschrieben werden, die er im Bewußtsein der großen Leistungsfähigkeit seiner Maschinen ausgesprochen haben soll. Denn auch in bezug auf seine mathematischen Werke wären die geflügelten Worte sehr bezeichnend: «*Gebt mir einen festen Standpunkt, und ich werde die ganze Erde in Bewegung setzen!*»

#### *Besonders empfohlene Literatur:*

1. A. Czwalina: Deutsche, mit Anmerkungen versehene Ausgabe. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Heft Nr. 201: Über Spiralen. Heft Nr. 202: Kugel und Zylinder. Heft Nr. 203: Die Quadratur der Parabel. Heft Nr. 210: Über Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoide. Heft Nr. 213: Über schwimmende Körper und die Sandzahl.
2. Th. Heath: A history of Greek mathematics. Vol. II, S. 16 bis 102. Oxford 1921.
3. B. L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, S. 344 bis 380. Birkhäuser Verlag, Basel 1956.

## Zweiter Einführungskurs in den programmierten Unterricht

## Umschau

Im September fand in der Handelshochschule St. Gallen der zweite Einführungs- und Orientierungskurs über die technischen und pädagogischen Fragen des <programmierten Unterrichts> und der sogenannten <Lehrmaschinen> statt. Die außerordentliche Vielfalt der behandelten Themenkreise – sie reichten von den lernpsychologischen und kybernetischen Grundlagen der Programmierung bis zu detaillierten Programmen – kann hier

nur angedeutet werden; der Bericht begnügt sich mit einigen für unsere Schule relevanten Gesichtspunkten. Außerdem ist die Literatur über dieses Thema, trotz seiner Neuheit, auch im deutschen Sprachbereich beträchtlich angewachsen; ein gutes Literaturverzeichnis findet sich in der SLZ vom 12. Juni 1964. Seit empirische, soziologische und lernpsychologische Untersuchungen über die Beziehung Lehrer-Schüler vorliegen,

treten einige vorher kaum erkannte Schwächen unseres Bildungssystems überraschend zu Tage:

- Im üblichen Frontalunterricht (der Lehrer steht vor der Klasse) antworten meistens die gleichen Schüler, ein Teil, je nach dem schwankenden Anteil der Klasse, vollzieht die einzelnen Denkschritte nicht mit.
- Ein Teil der Klasse vermag trotz Kontrollfragen an einzelne Schüler nicht