

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 1 (1910)
Heft: 4

Artikel: Calcul des tensions produites dans un circuit par suite de son ouverture sous courant
Autor: Montmollin, A. de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059684>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an die

Redaktion: Ing.-Consulent Dr. W. Kummer,
Mythenstrassé 15, Zürich II (Telephon 5806)

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag A.-G., Zürich
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Est publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement.

Toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ sont à adresser à la

Rédaction: Ing.-Conseil Dr. W. Kummer
Mythenstrasse 15, Zurich II (Téléphone 5806)

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les insertions sont à adresser à

l'éditeur: Fachschriften-Verlag A.-G., Zurich
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

I. Jahrgang
1^e Année

Bulletin No. 4

April 1910
Avril

Calcul des tensions produites dans un circuit par suite de son ouverture sous courant.

Lorsqu'on ouvre un circuit pendant qu'il est parcouru par le courant i_0 , on peut observer très peu de temps après l'ouverture une tension momentanée V entre les deux bornes de ce circuit, pour le calcul de laquelle on connaît la formule:

$$V = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

dans laquelle L représente le coefficient de self-induction du circuit et C sa capacité mesurée entre ses deux bornes pendant qu'il est ouvert en son milieu.

Cette formule n'est qu'approximative car elle ne tient pas compte de la résistance qu'elle suppose nulle. De plus, elle n'est commodément applicable sous cette forme qu'aux courants continus. Il est en effet facile de saisir que lorsqu'on ouvre un circuit parcouru par un courant alternatif d'intensité efficace donnée, le courant instantané existant au moment de la coupure effective peut varier entre zéro et un maximum positif ou négatif. Si l'on peut concevoir qu'avec certains systèmes d'interrupteurs la coupure effective ait lieu au moment où l'intensité du courant alternatif passe par zéro, on peut aussi imaginer d'autres appareils, à soufflage magnétique par exemple, dans lesquels le champ, croissant en même temps que le courant, opèrerait le soufflage de l'arc de rupture précisément au moment où le courant aurait sa plus grande intensité.

Si donc on voulait employer cette formule pour les courants alternatifs, on serait dans le vague le plus complet au sujet de la valeur à y introduire pour i_0 . Bien plus, on verra par la suite que, même si l'interrupteur employé coupe le courant au moment où il passe exactement par zéro, la tension consécutive V n'est en général pas nulle, de sorte que la formule ne peut plus être considérée comme utilisable.

Il est peut-être intéressant de chercher à établir une formule applicable aux courants alternatifs, ainsi qu'une construction géométrique capable d'être utilisée pratiquement pour l'étude des tensions consécutives à une rupture de circuit.

Tel est le but des considérations qui suivent.

Les prémisses admises sont celles que l'on adopte généralement dans l'étude élémentaire des courants alternatifs:

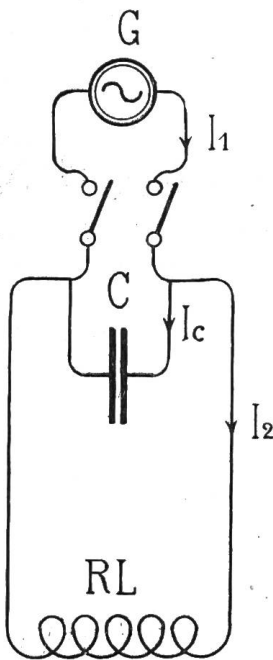


Figure 1. Schéma général d'un circuit à courant alternatif.

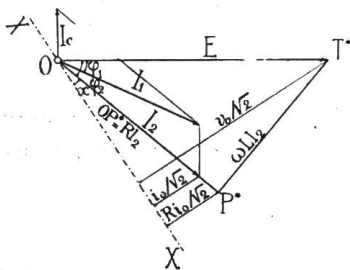


Figure 2. Diagramme de fonctionnement du circuit de la figure 1.

Les forces électro-motrices et les courants sont supposés sinusoïdaux.

Les résistances et les coefficients de self-induction sont supposés constants, quellesque soient la charge et la fréquence.

La capacité est envisagée comme concentrée en un point et l'isolation comme parfaite.

La figure 1 représente un circuit transportant de l'énergie et comprenant: une génératrice G à courant alternatif, un interrupteur placé dans son voisinage immédiat, un câble souterrain ou une ligne aérienne dont la capacité est représentée par le condensateur C , et des appareils d'utilisation dont on peut résumer les propriétés en leur attribuant simplement une résistance R , comprenant en même temps celle de la ligne ou du câble, et un coefficient de self-induction L . Soient:

- I_1 , l'intensité efficace du courant fourni par la génératrice et
- $I_1 \sqrt{2}$ son intensité maximum.
- I_c l'intensité efficace du courant de charge dû à la capacité C du circuit.
- I_2 l'intensité efficace du courant circulant dans le circuit d'utilisation et
- $I_2 \sqrt{2}$ son intensité maximum.
- E la tension efficace à la génératrice et
- $E \sqrt{2}$ sa valeur maximum.
- $\omega = 2 \pi n$ la pulsation, n étant le nombre de périodes par seconde.
- W la puissance transportée.

Le diagramme bien connu de la figure 2 donne les conditions de fonctionnement du transport d'énergie.

Si, la pulsation étant ω , on a mesuré une fois pour toutes I_c à la tension de régime E lorsque le circuit était ouvert en son milieu, et si l'on dispose à proximité de la génératrice d'un ampèremètre donnant I_1 , d'un voltmètre

donnant E et d'un wattmètre donnant W , on peut obtenir les valeurs suivantes:

La capacité de la ligne:

(1)
$$C = \frac{I_c}{\omega E}$$

Le décalage du courant I_1 par rapport à la tension E :

(2)
$$\cos \varphi_1 = \frac{W}{EI_1}$$

Le décalage du courant I_2 par rapport à la tension E :

(3)
$$\text{tg } \varphi_2 = \text{tg } \varphi_1 + \frac{I_c}{I_1 \cos \varphi_1}$$

Le courant I_2 lui-même:

(4)
$$I_2 = \frac{I_1 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

et enfin

(5)
$$R = \frac{E \cos \varphi_2}{I_2}$$

(6)
$$L = \frac{E \sin \varphi_2}{\omega I_2}$$

quantités définies plus haut.

Si maintenant on ouvre l'interrupteur au moment où le courant instantané dans le circuit d'utilisation a la valeur

$$i_0 = \sqrt{2} I_2 \sin x,$$

l'énergie potentielle emmagasinée dans le circuit fermé par la capacité C créera un courant de décharge qui persistera jusqu'à ce que cette énergie soit entièrement convertie en travail extérieur.

La tension oscillante qui peut intervenir alors est quelquefois assez élevée pour perforer les isolants. C'est le calcul de cette tension qui fait l'objet de la présente étude.

Deux forces électro-motrices agissent dans le circuit pendant la décharge. La première v , est égale à la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur de capacité C . Si q représente la quantité d'électricité que contient le condensateur à un instant donné de la décharge, on aura à ce même instant :

$$v = \frac{q}{C}$$

La seconde v_s est la f. e. m. de self-induction pour laquelle on a

$$v_s = -L \frac{di}{dt}$$

si i est le courant de décharge et dt l'élément de temps.

Comme dans tout circuit la somme des f. e. m. doit à chaque instant être égale au produit de l'intensité du courant par la résistance on doit avoir :

$$(7) \quad v + v_s - Ri = 0$$

ou bien :

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

Lorsque le courant de décharge est positif, il diminue la quantité d'électricité que contient le condensateur; on a donc entre ces deux quantités la relation :

$$i = -\frac{dq}{dt} \text{ d'où } \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

de sorte que (7) devient :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

La méthode de résolution de cette équation étant bien connue, il n'est pas nécessaire de s'y arrêter. Il suffit de rappeler que l'intégrale générale dépend quant à sa forme du signe de l'expression :

$$4L - CR^2$$

On peut se rendre compte que dans la pratique, les coefficients L , C et R sont ordinairement tels que l'expression ci-dessus est positive. Lorsqu'elle ne l'est pas, c'est que la décharge n'est pas oscillante, et par suite est beaucoup moins dangereuse.

Lorsque $4L - CR^2 > 0$, l'intégrale générale est :

$$q = e^{-\beta t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t)$$

lorsqu'on pose :

$$(8) \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

et

$$(9) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

ω_1 représente la pulsation du courant de la décharge oscillante et β représente sa constante d'amortissement.

A et B sont deux constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales de la décharge, soit de la tension et du courant instantanés régnant dans le circuit immédiatement avant sa coupure.

Les trois termes formant l'équation (7) sont maintenant :

$$(10) \quad v = \frac{q}{C} = e^{-\beta t} \left(\frac{A}{C} \sin \omega_1 t + \frac{B}{C} \cos \omega_1 t \right)$$

expression que l'on peut mettre sous la forme

$$(10 \text{ bis}) \quad v = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \sin (\omega_1 t - \alpha_1) \cdot e^{-\beta t}$$

en posant :

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{B}{A}$$

$$(12) \quad Ri = -R \frac{dq}{dt} = R e^{-\beta t} [(\beta A + \omega_1 B) \sin \omega_1 t + (\beta B - \omega_1 A) \cos \omega_1 t]$$

que l'on peut écrire :

$$(12 \text{ bis}) \quad Ri = R \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \sin (\omega_1 t - \alpha_2) \cdot e^{-\beta t}$$

en posant :

$$(13) \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\omega_1 A - \beta B}{\beta A + \omega_1 B}$$

$$(14) \quad v_s = L \frac{d^2 q}{dt^2}, \text{ que l'on peut transformer en}$$

$$(14 \text{ bis}) \quad v_s = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \sin (\omega_1 t - \alpha_3) \cdot e^{-\beta t}$$

en posant :

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{2 \beta \omega_1 A - (\beta^2 - \omega_1^2) B}{2 \beta \omega_1 B + (\beta^2 - \omega_1^2) A}$$

Les constantes d'intégration peuvent se déterminer comme suit :

v_0 et i_0 étant la tension et le courant instantanés régnant dans le circuit d'utilisation au moment de l'ouverture du circuit de la génératrice, moment pris comme point de départ de la mesure du temps, on a pour cet instant-là :

$$t = 0, \quad v = v_0 \quad \text{et} \quad i = i_0$$

En introduisant ces valeurs particulières dans (10) il vient :

$$(16) \quad v_0 = \frac{B}{C} \quad \text{d'où} \quad B = C v_0$$

En introduisant les mêmes valeurs dans (12), on a

$$R i_0 = R (\beta B - \omega_1 A)$$

d'où avec (16) :

$$(17) \quad A = \frac{\beta C v_0 - i_0}{\omega_1}$$

En remplaçant dans (10 bis) A et B par leurs valeurs dans (16) et (17), on connaîtra la tension à un moment quelconque de la décharge si l'on a des données sur v_0 et i_0 . Cette équation montre que la tension revêt l'allure d'une oscillation sinusoïdale amortie, et ce qui intéresse surtout c'est d'en connaître la valeur maximum.

L'instant auquel ce maximum est atteint sera donné par la plus petite valeur de t satisfaisant à l'équation $\frac{dv}{dt} = 0$. Mais comme $v = \frac{q}{C}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = -\frac{i}{C}$, on voit que cet instant sera le même que celui auquel le courant i s'annule. Or cela a lieu toutes les fois que dans (12 bis) : $\sin (\omega_1 t - \alpha_2) = 0$.

Puisque la tension est amortie, l'époque de son maximum t' sera la plus petite valeur positive de t qui annule l'expression précédente. On obtiendra cette valeur en posant :

$$t' = \frac{\alpha_2}{\omega_1}$$

En portant cette valeur dans l'équation (10 bis) et en désignant par V la tension maximum on aura :

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot e^{-\beta t'}$$

Faisant maintenant

$$(18) \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$$

et calculant la valeur de ce dernier angle au moyen de (11) et de (13) il vient :

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1}{\beta}$$

Il est important de remarquer que cet angle α est indépendant des conditions initiales de la décharge. Il est déterminé uniquement par les valeurs C , R et L du circuit, soit par les conditions de fonctionnement du transport d'énergie avant l'interruption.

C'est l'angle de décalage du courant en arrière de la tension pendant la décharge.

On trouvera plus loin la construction graphique de cet angle.

De (19), combiné à (8) et à (9) on tire :

$$(20) \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{CR^2}{4L}}$$

$$(21) \quad \sin \alpha = \omega_1 \sqrt{CL}$$

Si l'on remarque enfin que d'après (19)

$$\beta t' = \frac{\omega_1 t'}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ et que } \omega_1 t' = \alpha_2$$

il vient :

$$(22) \quad V = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \sin \alpha \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$(22 \text{ bis}) \quad V = \sqrt{v_0^2 - R i_0 v_0 + \frac{L}{C} i_0^2} \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha}$$

expression dans laquelle : [voir (13) et (19)].

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{i_0 \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{R i_0 - 2 v_0} \text{ et } \cot \alpha = \frac{R}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}$$

Si l'on suppose un instant qu'il s'agisse d'un circuit à courant continu que l'on interrompe sous un courant i_0 et une tension v_0 , on a toujours la relation $v_0 = R i_0$ et la tension maximum de la décharge V_c serait :

$$V_c = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha}$$

En observant encore que dans ce cas particulier $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\operatorname{tg} \alpha$ et que par suite $\alpha_2 = \pi - \alpha$, on a enfin :

$$V_c = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{-(\pi - \alpha) \cot \alpha}$$

et l'on voit que la formule mentionnée au début de cette étude en ne tenant pas compte de l'amortissement suppose bien $R = 0$.

La formule (22 bis) donne la tension maximum de la décharge lorsqu'on connaît la tension et le courant instantanés à l'instant de l'ouverture du circuit. Avec le courant alternatif la connaissance de ces deux quantités dépend d'une part des propriétés inductives de ce circuit et d'autre part de celles de l'appareil qui opère l'interruption.

Son utilité pratique n'est donc pas bien grande. Mais elle peut servir à déterminer quelle doit être l'intensité instantanée du courant dans le circuit d'utilisation au moment de l'interruption, pour créer dans ce circuit la tension maximale V la plus élevée possible, tension qui sera désignée par V_{max} .

En se reportant à la figure 2, on voit que si l'interruption a lieu au moment où l'angle de phase du courant I_2 est x , le courant i_o sera donné par :

$$i_o = \sqrt{2} I_2 \sin x$$

ou, en tenant compte de (5) :

$$(23) \quad i_o = \sqrt{2} \frac{E}{R} \cos \varphi_2 \sin x$$

et la tension v_o par :

$$(24) \quad v_o = \sqrt{2} E \sin (x + \varphi_2)$$

de sorte que la question revient à chercher l'angle x pour lequel V devient V_{max} .

En ne gardant dans le second membre de (22) que les facteurs variant avec x , la fonction à rendre maximum est :

$$(25) \quad U = \frac{C V}{\sin \alpha} = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha}$$

dans laquelle les variables sont A , B et α_2 . Mais [voir (13), (16), (17), (23) et (24)] ces trois variables dépendent de x et de x seul.

La condition du maximum sera $\frac{dU}{dx} = 0$ et, pour les valeurs de x satisfaisant à cette condition, la seconde condition: $\frac{d^2 U}{dx^2} < 0$.

En écrivant pour abrégier :

$$\frac{dA}{dx} = A', \quad \frac{dB}{dx} = B', \quad \frac{dv_o}{dx} = v_o' \quad \text{et} \quad \frac{di_o}{dx} = i_o'$$

on a :

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{d\alpha_2}{dx} \cot \alpha \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha} \sqrt{A^2 + B^2} + e^{-\alpha_2 \cot \alpha} \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

de 13 on tire :

$$\frac{d\alpha_2}{dx} = \frac{A'B - AB'}{A^2 + B^2}$$

d'où :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{e^{-\alpha_2 \cot \alpha}}{\sqrt{A^2 + B^2}} [(A'B' - A'B) \cot \alpha + AA' + BB'] = 0$$

Le facteur $\frac{e^{-\alpha_2 \cot \alpha}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ne pouvant pas s'annuler pour des valeurs finies de x , la condition $\frac{dU}{dx} = 0$ devient :

$$(A'B' - A'B) \cot \alpha + AA' + BB' = 0$$

En tenant compte de (19), en remplaçant A , B , A' , B' par leur valeur en v_o , i_o , v_o' , i_o' , et celles-ci par leur valeur en x [voir (23) et (24)]

$$(26) \quad v_o' = \sqrt{2} E \cos (x + \varphi_2)$$

$$(27) \quad i_o' = \sqrt{2} \frac{E}{R} \cos \varphi_2 \cos x$$

et en simplifiant on obtient :

$$(28) \quad \cos x \left[\frac{CR^2}{L} (\cos x \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \sin x \sin^2 \varphi_2) + \cos^2 \varphi_2 \sin x \right] = 0$$

à laquelle on satisfait soit par :

$$(29) \quad \cos x = 0 \text{ d'où } x = \frac{\pi}{2}$$

soit en annulant la quantité entre crochets que l'on peut écrire, en remplaçant C , R et L par leurs valeurs tirées de (1), (5) et (6) :

$$\cos^2 \varphi_2 \left[\frac{i_c}{i_2} (\cos x \cos \varphi_2 - \sin x \sin \varphi_2) + \sin x \right] = 0$$

Comme $\cos^2 \varphi_2$ n'est pas variable, il ne reste de nouveau que la quantité entre crochets qui donne comme seconde solution :

$$\operatorname{tg} x = \frac{i_c \cos \varphi_2}{i_c \sin \varphi_2 - i_2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\operatorname{tg} x = \frac{i_c \cos \varphi_2}{i_c \sin \varphi_2 - i_2 \sin^2 \varphi_2 - i_2 \cos^2 \varphi_2}$$

En faisant attention que d'après (4) $I_1 \cos \varphi_1 = I_2 \cos \varphi_2$ et que d'après (3)

$\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{I_c}{I_1 \cos \varphi_1}$, on arrive enfin à

$$(30) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\text{d'où :} \quad x = -(\varphi_2 - \varphi_1)$$

La solution géométrique du problème montrera que l'angle $x = \frac{\pi}{2}$ est celui qui correspond au maximum de la fonction U et par suite à V_{max} . Cela peut dispenser d'en rechercher la preuve analytique qui exigerait des calculs dépourvus d'intérêt.

En introduisant donc (29) dans (23) et (24) les conditions initiales donnant la tension maximum sont :

$$v_o = \sqrt{2} E \cos \varphi_2 \text{ et } i_o = \sqrt{2} \frac{E}{R} \cos \varphi_2$$

$$\text{d'où :} \quad v_o = R i_o$$

En remplaçant dans (22^{bis}) comme on l'a déjà fait pour établir la formule exacte applicable au courant continu, on obtient :

$$(31) \quad V_{max} = \sqrt{2} I_2 \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-(\pi - \alpha) \cot \alpha}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$(31 \text{ bis}) \quad V_{max} = \sqrt{2} \frac{E \cos \varphi_2}{2 \cos \alpha} e^{-(\pi - \alpha) \cot \alpha}$$

Telle est la valeur la plus élevée possible de la tension de décharge consécutive à la rupture d'un circuit parcouru par un courant alternatif. Pour que cette tension soit réellement observée, il faut que l'appareil servant à interrompre le circuit soit tel que l'arc de rupture du courant I_1 soit coupé juste au moment où le courant I_2 passe par sa valeur maximum. Si cette condition n'est pas remplie, et si l'interrupteur agit au moment où le courant I_2 a la valeur instantanée $i_o = I_2 \sqrt{2} \cdot \sin x$, la tension maximum réelle sera donnée par (22) ou (22^{bis}).

Si l'on a affaire à du courant continu, le mode d'interruption employé n'a plus d'influence sur la tension maximum subséquente, et cette tension :

$$V_c = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{-(\pi - \alpha) \cot \alpha}$$

est toujours observée dès que l'interruption peut être considérée comme brusque. En comparant cette formule avec (31), on remarque que le courant continu donne, avec les mêmes constantes du circuit, une tension maximum égale à celle que donnerait un courant alternatif de même intensité maximum, coupé dans les plus mauvaises conditions possibles.

La discussion des formules obtenues pour le courant alternatif peut être remplacée avec avantage pour la clarté, par la méthode graphique qui va être établie.

Il y a lieu d'observer avec Mascart (Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme, 2^{me} édition, Tome I^{er} p. 608) que les trois f.^oe. m. entrant dans la formule (7), peuvent se représenter par les trois côtés d'un triangle, l'expression de la longueur de chacun d'eux étant tirée des formules (10^{bis}), (12^{bis}) et (14^{bis}).

On aura donc, (voir fig. 3) :

$$\overline{OT} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} e^{-\beta t}$$

$$\overline{OP} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{A^2 + B^2} e^{-\beta t}$$

$$\overline{TP} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} e^{-\beta t}$$

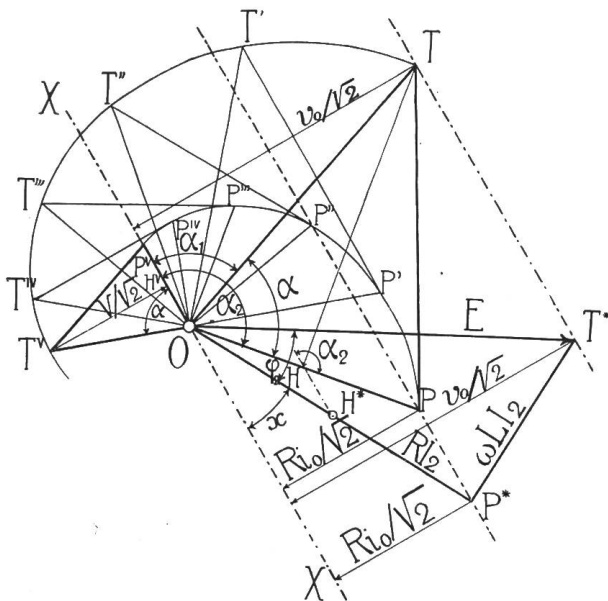


Figure 3. Diagramme du phénomène de la décharge oscillante.

les valeurs v , Ri , et v_s elles-mêmes étant données à un instant quelconque par les distances des sommets T et P à un axe XOX passant par O . Toutes les valeurs successives de v , de Ri et de v_s seront obtenues en faisant tourner ce triangle autour de O avec la vitesse angulaire ω_1 et en supposant que, pendant cette rotation les sommets

tournants T et P suivent chacun dans le sens décroissant une spirale logarithmique, et qu'ainsi, dans son mouvement ce triangle se rapetisse tout en restant semblable à lui-même. Ce triangle est isocèle puisque $\overline{OT} = \overline{TP}$. D'après les formules (11), (13) et (18), l'angle POT est égal à α ; il en résulte que \overline{OPT} est aussi égal à α .

La valeur de cet angle est donnée par (19), $\text{tg } \alpha = \frac{\omega_1}{\beta}$ expression que l'on peut écrire $\beta = \omega_1 \cot \alpha$, de sorte que $\beta t = \omega_1 t \cot \alpha$.

D'après les propriétés connues de la spirale logarithmique, la tangente en T à la spirale T, T', \dots, T^v , sera toujours parallèle au côté opposé du triangle, \overline{OP} , et la tangente en P à la spirale P, P', \dots, P^v sera le côté \overline{TP} du triangle.

Pour construire ces triangles et connaître en même temps les spirales le long desquelles ils se meuvent, ou les spirales d'amortissement, il s'agit premièrement d'obtenir l'angle α .

On a [voir formules (1), (5), (6) et (20)]:

$$(32) \quad 4 I_2 \cos^2 \alpha = I_c \cos \varphi_2 \cot \varphi_2$$

Or (fig. 4) $\overline{CM} = I_c \quad \overline{AM} = I_c \cos \varphi_2$
 $\overline{OA} = \overline{AM} \cot \varphi_2 = I_c \cos \varphi_2 \cot \varphi_2$

D'autre part:

$$\overline{OD} = 4 I_2 \quad \overline{OB} = 4 I_2 \cos \overline{AOB}$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} \cos \overline{AOB} = 4 I_2 \cos^2 \overline{AOB}$$

donc : $4 I_2 \cos^2 \overline{AOB} = I_c \cos \varphi_2 \cot \varphi_1$
 et (voir 32) : Angle $\overline{AOB} = \alpha$

La construction de l'angle α est donc la suivante :

Soit donné (fig. 4) le diagramme de la figure 2 qui représente les conditions de fonctionnement d'un transport d'énergie dans le circuit schématisé par la figure 1.

Prolongeons le vecteur I_2 jusqu'en O_1 de manière que $\overline{OO_1} = 2 I_2$. De O_1 comme centre traçons l'arc de cercle \overline{OB} . Par M , intersection du vecteur E avec la parallèle à I_2 passant par les extrémités de I_c et de I_1 , menons \overline{AB} perpendiculaire au vecteur I_c . Tirons \overline{OB} , \overline{AOB} sera l'angle α cherché.

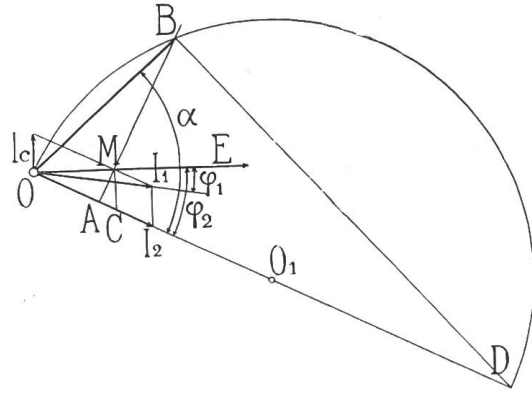


Figure 4. Construction graphique de l'angle α .

Si la décharge n'était pas oscillante, on en serait averti par le fait que le cercle \overline{OBD} ne rencontrerait pas la perpendiculaire \overline{AB} .

Les deux grandeurs v_o et Ri_o , conditions initiales de la décharge, sont déterminées

(fig. 2) par la position du triangle rectangle $\overline{OT^*P^*}$ par rapport à l'axe \overline{XOX} au moment de la rupture du circuit. $\overline{OT^*}$ est égal à E , $\overline{OP^*}$ est égal à Ri_2 et $\overline{T^*P^*}$ à ωLI_2 . Ce triangle tournant au tour de son sommet O avec la vitesse angulaire ω , peut être considéré comme caractérisant le régime de fonctionnement du transport d'énergie, l'interrupteur étant fermé. Si l'interruption a lieu au moment où son côté $\overline{OP^*}$ fait l'angle x avec \overline{XOX} , les grandeurs $\frac{v_o}{\sqrt{2}}$ et $\frac{Ri_o}{\sqrt{2}}$ sont en effet données par les distances de T^* et de P^* à cet axe.

Or v_o et Ri_o étant les conditions initiales de la décharge, le triangle isocèle d'angle α qui caractérisera celle-ci, accompagné de ses spirales, devra, dans sa position de début, avoir une grandeur telle et être tellement placé par rapport à \overline{XOX} (fig. 3) que ses sommets T et P soient à la même distance de cet axe que les sommets T^* et P^* du triangle rectangle.

Si donc on tire par T^* et par P^* des parallèles à \overline{XOX} , les sommets T et P du triangle isocèle doivent se trouver sur celles-ci.

A chaque valeur de v_o et de Ri_o , c'est-à-dire à chaque position du triangle rectangle $\overline{OT^*P^*}$ par rapport à l'axe, correspondra un autre triangle isocèle qu'il s'agit de construire.

Pour plus de simplicité, nous supposons à l'avenir que le triangle $\overline{OT^*P^*}$ reste immobile et que l'axe \overline{XOX} tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

Supposons (fig. 5) le problème résolu, et trois triangles semblables entre eux, $\overline{OT_1P_1}$, $\overline{OT_2P_2}$ et $\overline{OT_3P_3}$ correspondant à trois positions différentes de l'axe \overline{XOX} par rapport au triangle $\overline{OT^*P^*}$ (qui n'est indiqué que par ses sommets), c'est-à-dire à trois conditions initiales différentes pour la décharge.

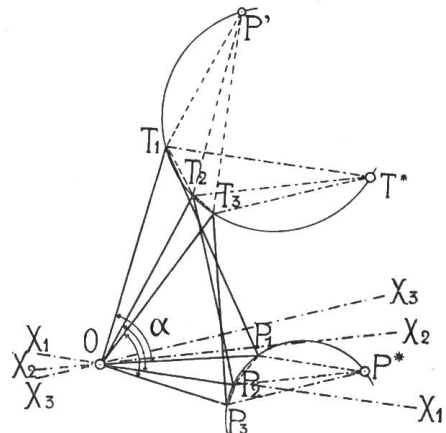


Figure 5. Lieu géométrique des sommets des triangles caractérisant le début de la décharge.

Les triangles $\overline{OT_1T_2}$, $\overline{OT_2T_3}$ sont respectivement semblables à $\overline{OP_1P_2}$, $\overline{OP_2P_3}$. Construisons sur T_1T_2 un triangle semblable à $\overline{P_1P_2P^*}$, il viendra en T_1T_2P' . Construisons de même sur T_2T_3 un triangle semblable à $\overline{P_2P_3P^*}$, il viendra en T_2T_3P' . Les deux quadrilatères $\overline{OP_1P^*P_3}$ et $\overline{OT_1P'T_3}$ sont semblables puisqu'ils ont toutes leurs parties constitutives semblables deux à deux. D'autre part l'angle $T_1T^*T_2$ est égal à l'angle $P_1P^*P_2$,

et ce dernier est aussi égal à $T_1 P' T_2$ donc les angles $T_1 T^* T_2$ et $T_1 P' T_2$ sont égaux entre eux. Il en est de même des angles $T_2 T^* T_3$ et $T_2 P' T_3$. Il en résulte que les points T_1, T_2, T_3 et par suite tous les autres points T que l'on pourrait construire sont sur une circonférence passant par T^* .

On démontrerait de la même façon que tous les points $P_1, P_2, P_3 \dots$ sont sur une circonférence passant par P^* .

Comme une circonférence est déterminée par trois points, et comme nous connaissons le point T^* pour celle des T et P^* pour celle des P , il reste deux autres points à déterminer pour chacune d'elles.

Or (fig. 6), connaissant l'angle α par la construction de la figure 4, qui est ici répétée, nous pouvons construire directement le triangle isocèle $OT_1 P^*$ construit sur OP^*

comme base. Il correspond à l'axe $X_1 O X_1$ dont la direction est donnée par $T^* T_1$.

En menant une parallèle à OP^* par T^* jusqu'à sa rencontre avec OT_1 , nous déterminerons un nouveau triangle isocèle $OT_2 P_2$ correspondant à un axe $X_2 O X_2$ se confondant avec OP^* . Nous avons maintenant tous les points nécessaires à la construction des deux cercles.

Si nous prolongeons $P^* T^*$ jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire $T_1 T_3$ sur OT_1 , et si nous joignons $T_2 T_3$, cette droite sera un diamètre du cercle des T , puisque l'angle $T_2 T^* T_3$ est droit de même que $T_2 T_1 T_3$.

Enfin tirons OT_3 , et par O élevons sur OT_1 une perpendiculaire OP_3 jusqu'à sa rencontre avec $T^* P^*$ prolongée; il est facile de voir que l'angle $P_3 O T_3$

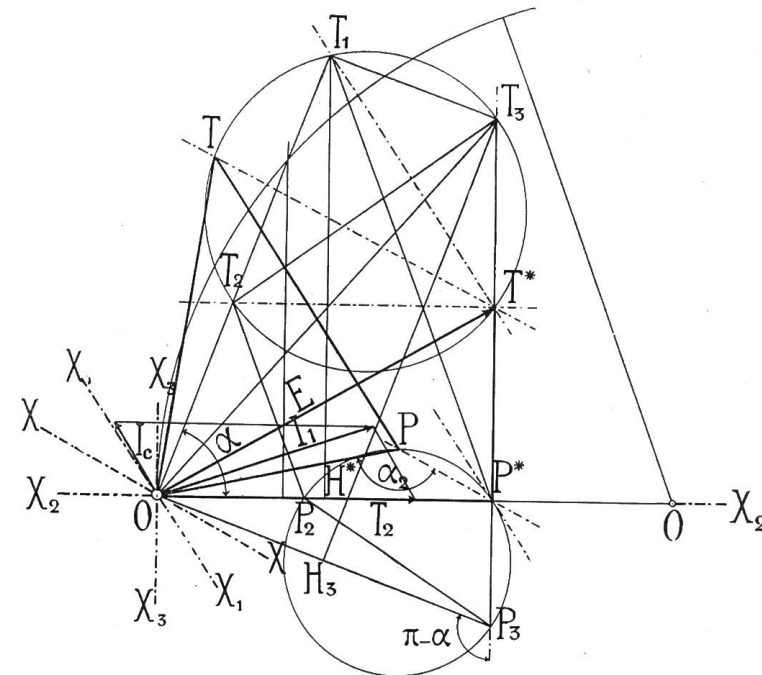


Figure 6. Construction du triangle caractérisant le début d'une décharge.

est égal à α , et que le triangle $OT_3 P_3$ correspond à l'axe $X_3 O X_3$ perpendiculaire à OP^* . Joignons $P_2 P_3$ nous avons le diamètre du cercle des P .

Pour obtenir le triangle isocèle correspondant à une position quelconque XOX de l'axe, il suffit de mener des parallèles à cet axe par T^* et P^* et de joindre OT, OP et TP, T et P étant les points d'intersection des parallèles avec leur cercle.

Maintenant que l'on sait construire pour toutes les conditions initiales possibles de la décharge le triangle isocèle qui la caractérise à son début et les spirales qui déterminent son amortissement, on peut se reporter à la figure 3.

Le triangle OTP en tournant autour de O le long des spirales indique que la tension instantanée de la décharge qui avait à son début la valeur v_0 , commence par diminuer, s'annule, puis augmente négativement pour arriver à sa valeur maximum lorsque le triangle a la position $OT^V P^V$. Dans cette position du triangle, la valeur de la tension (ou plutôt cette valeur divisée par $\sqrt{2}$, puisque les divers diagrammes sont construits sur les valeurs efficaces et non sur les valeurs maximum des courants et des tensions), est donnée par la hauteur $T^V H^V$ du triangle et l'on a [voir formule (22 bis)]:

$$V = \sqrt{2} \overline{T^V H^V} = \sqrt{v_0^2 - R i_0 v_0 + \frac{L}{C} i_0^2 \cdot e^{-a_2 \cot \alpha}}$$

Les triangles $OT^V P^V$ et OTP sont semblables, et leurs hauteurs sont proportionnelles à leurs côtés. Les dimensions linéaires de ces deux triangles sont entre elles comme

$e^{-a_2 \cot \alpha}$ est à l'unité. Pour avoir la tension $\frac{V}{\sqrt{2}}$, il suffit donc de mesurer la hauteur TH du triangle OTP et de multiplier le chiffre trouvé par le facteur d'amortissement $e^{-a_2 \cot \alpha}$. Les angles α et α_2 pouvant être mesurés sur le diagramme, le calcul de ce coefficient peut donc s'effectuer. Pour l'éviter, on peut employer l'abaque (fig. 7) qui

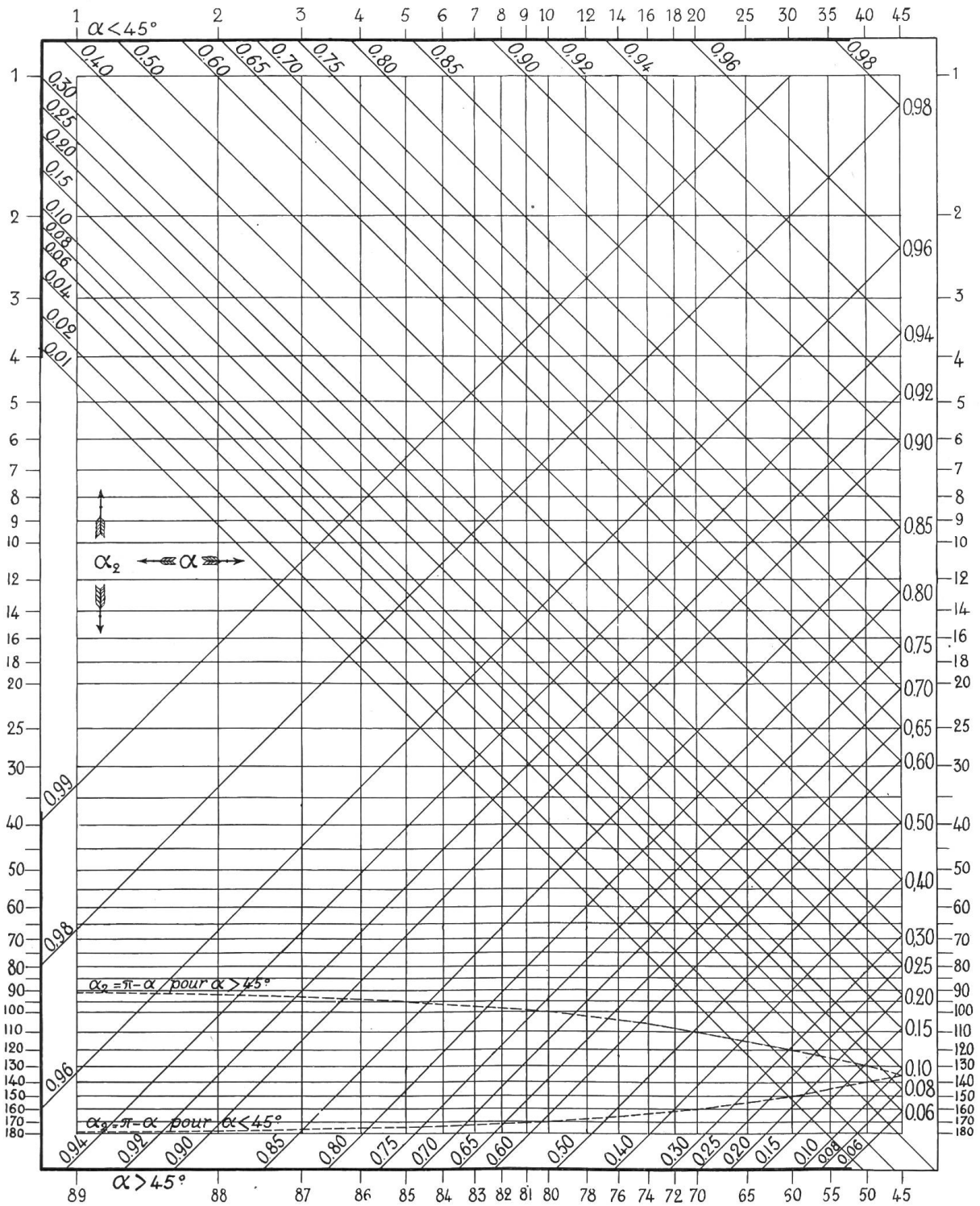


Figure 7. Abaque fournissant les valeurs de $e^{-a_2 \cot \alpha}$ pour α_2 compris entre 1° et 180° .
 Exemples: $\alpha = 75^\circ$; $\alpha_2 = 110^\circ$; $e^{-a_2 \cot \alpha} = 0,60$. $\alpha = 62^\circ$; $\alpha_2 = 37^\circ$; $e^{-a_2 \cot \alpha} = 0,71$.
 $\alpha = 28^\circ$; $\alpha_2 = 65^\circ$; $e^{-a_2 \cot \alpha} = 0,12$.

donne directement la valeur de ce coefficient d'amortissement pour tous les angles α_2 entre 1° et 180° et pour tous les angles α entre 1° et 89° .

Dans l'exemple de la figure 3, α étant égal à 70° et α_2 à 140° , α étant plus grand que 45° , on cherche sur l'abaque entre quelles obliques montant de gauche à droite se trouve l'intersection de l'abscisse 70° et de l'ordonnée 140° . On la trouve entre les obliques 0,40 et 0,50, tout près de 0,40, soit sur 0,408 environ, et l'on peut vérifier que dans la figure 3, $\overline{T^V H^V}$ est bien égal aux 40,8 % de TH .

Or, puisque ce sont les hauteurs des triangles qui donnent les tensions cherchées et non les côtés, il est inutile de chercher à construire autre chose que le triangle rectangle OTH dont l'angle en O est égal à α . Il est visible sur la figure 3 que l'angle α_2 est celui que fait $\overline{H^* H}$ avec \overline{OH} prolongé, H^* étant le point milieu de OP^* .

Les raisonnements qui ont permis de construire le triangle isocèle complet OTP permettent sans aucun changement de construire le triangle rectangle OTH .

On peut encore retirer les renseignements suivants de la construction de la figure 6 :

Le triangle $OT_3 P_3$ correspondant à un axe $X_3 O X_2$ perpendiculaire à OP^* ou à RI_2 , l'angle x est égal à 90° ; c'est celui pour lequel la tension consécutive à la rupture du circuit est la plus élevée possible. Cette tension V_{max} est égale à $\sqrt{2} \overline{T_3 H_3} \cdot e^{-\alpha_2 \cot \alpha}$.

Il est facile de voir sur la figure que l'angle α_2 relatif à ce triangle, qui n'est autre que l'angle obtus $X_3 O P_3$ est égal à $180^\circ - \alpha$, ce que du reste la formule (31) indiquait déjà. On remarque aussi que $\overline{H_3 T_3}$ est égal à $\overline{OT_1}$ comme parallèles entre parallèles, de sorte que la tension V_{max} est donnée dès que l'on connaît l'angle α .

Puisque dans la figure $\alpha = 70^\circ$, l'abaque (fig. 7) donne immédiatement le facteur d'amortissement. Il suffit de chercher le point d'intersection de l'abscisse 70° avec la courbe en pointillé $\alpha_2 = \pi - \alpha$ pour $\alpha > 45^\circ$. Ce point se trouve entre les obliques montant de gauche à droite 0,40 et 0,50, et près de la seconde. Le facteur d'amortissement est donc 0,49 de sorte que l'on a :

$$V_{max} = 0,49 \cdot \sqrt{2} \overline{OT_1}$$

On peut encore, d'après la construction de la figure 6, déterminer le nombre de périodes par seconde de la tension oscillante de la décharge, ou en d'autres termes, de l'oscillation propre du circuit. Si $\omega = 2\pi n$ est la pulsation du courant envoyé dans le circuit par la génératrice, on a d'après les formules (5) et (6) $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L}{R}$. D'autre part,

les formules (19) et (8) donnent $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1}{\beta} = \frac{2\omega_1 L}{R}$. Il vient donc :

$$(32) \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \varphi_2}$$

ce qui donne sur la figure 6 :

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\overline{T_1 H^*}}{\overline{T^* P^*}} = \frac{n_1}{n}$$

Un exemple d'application des constructions précédentes permettra en les récapitulant rapidement, d'en montrer l'usage pratique.

Soit donné un transport d'énergie à la tension efficace de 10 000 volts et à 50 périodes par seconde. Le courant de charge du circuit mesuré sous 10 000 volts a été trouvé de 4 ampères.

Au moment où la puissance demandée à la génératrice est de 546 kilowatts, le courant qu'elle fournit ayant une intensité de 60 ampères, on ouvre brusquement le circuit. Il s'agit d'étudier la tension de décharge produite dans la partie du circuit séparé de la génératrice.

Par O on mène une perpendiculaire sur $\overline{OT_1}$ jusqu'en H_3 , puis on abaisse de T_2 une perpendiculaire sur $\overline{OO_1}$; on en joint le pied à H_3 et l'on a le diamètre du cercle des H .

Pour savoir quelle sera la tension maximum de la décharge si l'interrupteur coupe le courant I_1 au moment où il passe par zéro, on mène par T^* et par H^* des parallèles à $\overline{OT_1}$ rencontrant les cercles en T_m et en H_m . La longueur $\overline{T_m H_m}$ multiplié par le facteur d'amortissement correspondant donnera la grandeur cherchée.

En se reportant aux figures 3 et 6, on voit que l'angle α_2 est celui que doit parcourir une perpendiculaire à $\overline{T_m H_m}$ menée par T_m pour venir se confondre avec $\overline{T_m T^*}$ en tournant en sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Cet angle est de 18° , et l'abaque donne 0,955 comme facteur d'amortissement.

La tension cherchée est donc :

$$V_{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2} \times 0,955 \times 4600 = 6215 \text{ volts.}$$

Son rapport à la tension de régime est de

$$\frac{0,955 \times 4600}{10000} = 0,4395.$$

En menant par T^* et par H^* deux droites parallèles entre elles et faisant un angle x quelconque avec le vecteur I_2 , on obtiendra de la même façon les tensions maximum de décharge correspondant à cet angle x , et par là à telles conditions initiales que l'on voudra.

Le tableau ci-dessous donne pour x variant de 30° en 30° le rapport ρ de la tension maximum de décharge à la tension de régime :

x	$\overline{T_x H_x}$	$\alpha_2 (x)$	$e^{-\alpha_2 (x) \cot 81^\circ}$	ρ
0°	4580	0°	1,000	0,458
30°	14400	$115^\circ 30'$	0,720	1,038
60°	23450	105°	0,750	1,760
90°	26500	99°	0,765	2,025
120°	22650	94°	0,770	1,743
150°	13180	$81^\circ 30'$	0,800	1,053
180°	4580	180°	0,605	0,278

Cet exemple montre la grande influence que peuvent avoir les propriétés des interrupteurs et des coupe-circuits sur le phénomène de la décharge oscillante après rupture d'un circuit parcouru par un courant alternatif.

On a déjà publié quelques oscillogrammes donnant l'allure de disparition d'un courant que l'on interrompt, mais la plupart de ceux-ci ont trait au courant continu. Il semble qu'il y aurait un grand intérêt à approfondir l'étude oscillographique du fonctionnement des interrupteurs et des coupe-circuits sous courant alternatif à haute tension.

Après les propriétés des appareils d'interruption c'est la grandeur de l'angle α qui a le plus d'influence sur l'allure du phénomène. Plus cet angle se rapproche de 90° , plus le vecteur $\overline{OT_1}$ (fig. 8) grandit et plus le facteur d'amortissement s'approche de l'unité. La tension V_{max} augmente donc très rapidement avec α , de même que la pulsation propre du circuit ω_1 . Ces deux grandeurs croitraient sans limite si l'effet pelliculaire ne venait s'y opposer en augmentant la résistance du circuit à mesure que croît la pulsation. Comme cette étude n'en tient pas compte, les valeurs données, tant par les formules que par la construction graphique sont une limite supérieure des tensions que l'on pourrait réellement obtenir. Le cosinus de l'angle α croît proportionnellement au facteur d'augmentation de la résistance. Mais comme ce facteur dépend de la pulsation, et comme la pulsation dépend à son tour de la grandeur de α , il n'existe pas de moyen simple et rigoureux pour en tenir compte. On pourra cependant toujours procéder par tâtonnements et assigner à l'angle α une valeur telle qu'elle s'accorde à la fois avec la valeur de la pulsation qui en dépend et avec la valeur de la résistance fonction de ces pulsations.

D'autre part, la formule (31^{bis}) montre que la tension maximum V_{max} ne peut surpasser celle du régime, $E\sqrt{2}$, tant que l'expression $\frac{e^{-(\pi-\alpha)\cot\alpha} \cdot \cos\varphi_2}{2\cos\alpha}$ n'est pas plus grande que l'unité. En donnant à $\cos\varphi_2$ sa plus grande valeur, qui est 1, on peut voir que l'expression ci-dessus ne dépasse l'unité que si l'angle α est plus grand que 73° . Ainsi, tant que l'on a affaire à un angle α inférieur à 74° , on peut être tranquille au sujet des surtensions de rupture, quel que soit le mode d'interruption.

Tant que l'angle α n'atteint pas 80° la tension V_{max} ne peut dépasser le double de la tension de régime. Mais, à supposer que l'effet pelliculaire permette à l'angle α d'atteindre 89° , la tension après rupture pourrait atteindre 28 fois celle de régime.

Il y aurait encore beaucoup à dire au sujet de l'influence des divers autres facteurs sur la grandeur des surtensions, mais j'espère avoir mis le lecteur à même de faire cette étude d'une manière simple et rapide sans que de plus longs développements soient nécessaires.

A. de MONTMOLLIN.



Ueber die Anwendung von selbsttätigen Zusatzmaschinen bei Akkumulatorenbatterien für Beleuchtungskraftwerke.

Von *Ed. Leibacher*, Ingenieur der Akkumulatoren-Fabrik Oerlikon.

Die in weiteren Kreisen namentlich durch einen in Heft 10 der Elektrotechnischen Zeitschrift von 1906 veröffentlichten Vortrag von *Direktor Ludwig Schröder*, Berlin, bekannt gewordenen Systeme selbsttätiger Zusatzmaschinen für Akkumulatorenbatterien (auch Survolteure oder Booster genannt) dürften zur Zeit schon sehr viel Anwendung gefunden haben, jedoch hauptsächlich in Kraftbetrieben und Bahnzentralen, weniger dagegen in Beleuchtungskraftwerken. Die Vorteile der selbsttätigen Zusatzmaschine bestehen hauptsächlich darin, dass sie die Ausgleichwirkung der Batterien auf ein fast ideales Mass erhöhen, den Spannungsschwankungen rasch folgen und diese sanft ausgleichen, wogegen automatische Zellschalter langsam arbeiten und ruckweise Stöße erzeugen. Man sollte meinen, dass die Verbreitung der selbsttätigen Zusatzmaschine angesichts dieser Vorzüge daher eine ausserordentlich grosse sein werde. Diese Maschinen sind aber verhältnismässig sehr gross und daher teuer; weiter arbeiten sie mit einem ungünstigen Wirkungsgrad, weil sie die meiste Zeit sehr schwach belastet mitlaufen müssen. Bei sehr schwachem Stromverbrauch im Netz müssten die Zusatzmaschinen entweder unbewacht mitlaufen, was riskiert ist, oder es würde ihre Bedienung einen dauernden Maschinistendienst erfordern, was gegenüber dem üblichen Betrieb mit automatischen Zellschaltern eine Verteuerung des Betriebes verursacht, welche die Wirtschaftlichkeit und damit die Zweckmässigkeit von Zusatzmaschinen in vielen Fällen sehr in Frage stellt.

Es soll nun im Folgenden, im Anschluss an den erwähnten Vortrag, untersucht werden, nach welchen Gesichtspunkten die Zusatzmaschinen zu dimensionieren sind, um bei grösstmöglicher Zweckmässigkeit doch möglichst kleine Abmessungen zu erhalten. Ferner soll zum Schluss an einem Beispiel gezeigt werden, dass die Anschaffungskosten einer Batterieanlage mit selbsttätigen Zusatzmaschinen sogar niedriger werden, als die einer entsprechenden Anlage mit dem gebräuchlichen Zellschalterbetrieb. —