

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 8 (1917)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Induktion und Kapazität von Leitungen  
**Autor:** Fischer-Hinnen, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1059595>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

# ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat  
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,  
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon: Hottingen 37.08

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.,  
Hirschengraben 80/82 Zürich 1 Telephon Hottingen 36.40

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A.S.E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général  
de l'Association Suisse des Electriciens  
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Telephon: Hottingen 37.08

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.  
Hirschengraben 80/82 Zurich 1 Téléphone Hottingen 36.40

Abonnementspreis  
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:  
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.  
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A.S.E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.—  
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.  
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

VIII. Jahrgang  
VIII<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 12

Dezember  
Décembre 1917

## Induktion und Kapazität von Leitungen.

Von J. Fischer-Hinnen, Oerlikon.

Ueber diesen Gegenstand finden sich in der Literatur so zahlreiche, allerdings sehr verstreute Angaben, dass eine weitere Abhandlung darüber überflüssig erscheinen könnte. Geht man jedoch der Sache näher auf den Grund, so zeigt es sich bald, dass die Mehrzahl dieser, gewöhnlich für einen beschränkten Leserkreis bestimmten Arbeiten im allgemeinen über theoretische Erörterungen und eine Besprechung der einfachsten Fälle nicht hinaus kommen und es dem Leser überlassen, wie er sich in den verwickelteren Fällen zurechtfindet.

In nachstehendem soll nun das Problem mehr von der praktischen Seite behandelt und gezeigt werden, wie man auf elementarem Wege zu allgemein gültigen Formeln gelangt, die sich unmittelbar auf praktische Fälle übertragen lassen.

### I. Induktion.

Liegt die Aufgabe vor, den induktiven Spannungsabfall einer aus Hin- und Rückleitung gebildeten Schleife zu berechnen, so sind bekanntlich zwei Wege gangbar. Der erste besteht darin, dass man zunächst von dem hypothetischen Falle einer einzelnen Strom durchflossenen Leitung *ohne* Rückleitung ausgeht und ihre Selbstinduktion mit der von einer zweiten Leitung ausgeübten gegenseitigen Induktion kombiniert. Die Lösung dieser Aufgabe, mit der sich unter andern *Neumann*, *Blondel* und *Sumec* (E. T. Z. 1906) befassten, ist ziemlich umständlich.

Eine zweite Methode, der wir uns hier anvertrauen werden, besteht darin, dass man gleich mit dem resultierenden Felde beider Leitungen rechnet. Setzt man den induktiven Spannungsabfall der ganzen Schleife

$$e_s = 2 \pi f \Phi_r 10^{-8} = \omega L J, \quad f = \text{Periodenzahl}$$

so stellt in diesem Falle L den „wirklichen Selbstinduktionskoeffizienten“ der ganzen Schleife dar, dagegen ist nicht ohne weiteres ersichtlich, was man jetzt unter  $\frac{L}{2}$  zu verstehen habe, weil diese Grösse je nach der Länge der Leitung nur etwa  $\frac{1}{1000}$  bis  $\frac{1}{100000}$  des nach der ersten Methode berechneten „wirklichen“ Wertes der Selbstinduktionskoeffizienten beträgt. Es könnte daher leicht zu Missverständnissen führen, wenn man  $\frac{L}{2}$  einfach als Selbstinduktionskoeffizienten einer einzelnen Hin- oder Rückleitung anspricht. Nun interessiert uns im Grunde genommen diese Grösse nur insofern, als wir sie für die Berechnung unsymmetrischer Mehrfachleitungen benötigen. Wir werden sie deshalb, um Missverständnissen vorzubeugen, kurzweg als *Induktionskoeffizient* einer einfachen Leitung bezeichnen.\*)

1. Induktion einer Einphasenleitung.

Betrachten wir eine aus Hin- und Rückleitung gebildete Drahtschleife A B, in welcher ein Wechselstrom J (effektiv) fliesst, so kann man sich den von dem Leiter A erzeugten magnetischen Flux aus drei Komponenten zusammengesetzt denken, nämlich

1. dem Fluxe  $\Phi'$ , der ausschliesslich im Innern des Drahtes verläuft,
2. dem Fluxe  $\Phi''$ , welcher seinen Weg durch die Schleife hindurch nimmt, und
3. dem Fluxe  $\Phi'''$ , welcher beide Leiter umschlingt und bis ins Unendliche reicht.

Ebenso werden aber auch von dem Leiter B<sub>1</sub> drei gleich starke Felder ihren Ausgang nehmen, von denen jedoch nur Flux  $\Phi'''$  um den Leiter A<sub>1</sub> herum verläuft. Da der letztere entgegengesetzte Richtung wie der von A<sub>1</sub> erzeugte Flux  $\Phi'''$  hat, so heben sich die beiden gegenseitig auf und kommen für die induktive Wirkung des Leiters A<sub>1</sub> nur die Kraftlinienmengen  $\Phi'$  und  $\Phi''$  in Betracht. Ihre Grösse ergibt sich aus folgender Ueberlegung. Bekanntlich ist die von dem Strome J im Abstände x erzeugte Liniendichte

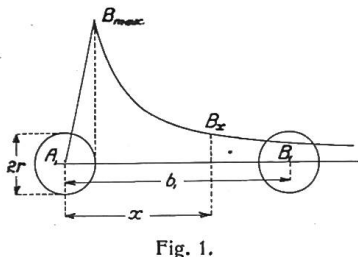


Fig. 1.

$$(1) \quad B_x = \frac{2J}{10 r^2} x \quad \text{für } x < r \text{ und}$$

$$(2) \quad B_x = \frac{2J}{10 x} \quad \text{für } x = > r$$

Daraus folgt

$$\Phi' = \int_0^r B_x l dx = \int_0^r \frac{2Jlx}{10 r^2} dx = \frac{Jl}{10} \quad (l = \text{einfache Länge in cm.})$$

In Wirklichkeit kommt dieses Feld aber nur für die innersten Stromfäden voll zur Geltung, während es für die an der Peripherie des Drahtes liegenden Stromfäden gleich Null ist.

\*) Wie wenig es übrigens bei derartigen Rechnungen auf die „wirkliche“ Selbstinduktion ankommt, beweist der Umstand, dass man dieselbe ebensogut unendlich gross annehmen kann, indem man, was natürlich ganz unzulässig ist, den Gültigkeitsbereich der unten stehenden Formel (2) auf beliebige Abstände ausdehnt, ohne dass an dem Endresultat etwas geändert wird. Ebenso ist z. B. in dem vorzüglichen Werke von Kyser (Elektr. Kraftübertragung II) der Koeffizient der Selbstinduktion und gegenseitigen Induktion pro km unrichtig angegeben, indem er von der richtigen Formel

$$L = \frac{2l_k}{10^4} \left( \ln \cdot \frac{2l_k \cdot 10^5}{r} - 0,75 \right) \text{ beziehungsweise}$$

$$M = \frac{2l_k}{10^4} \left( \ln \cdot \frac{2l_k \cdot 10^5}{r} - 1 \right)$$

ausgehend auf 1 km bezogen

$$L_1 = \frac{2}{10^4} \left( \ln \frac{2 \cdot 10^5}{r} - 0,75 \right) \text{ bzw. } M_1 = \frac{2}{10^4} \left( \ln \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{r} - 1 \right)$$

setzt. Dass das Endresultat trotzdem richtig ist, hängt mit einem Umstande zusammen, auf den wir weiter unten zurückkommen werden.

Es genügt daher vollkommen mit einem mittleren Werte  $\Psi' = \frac{Jl}{10} \cdot 0,5$  zu rechnen.

Andererseits ist wegen (2)

$$\Psi'' = \int_r^b B_x l dx = \int_r^b \frac{2Jl}{10x} dx = \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \log \frac{b}{r}$$

Der resultierende Flux ist daher

$$\Phi_r = \Psi' + \Psi'' = \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b}{r} \right);$$

folglich der induktive Spannungsabfall in einer Hin- oder Rückleitung

$$E_s = \frac{\omega \Phi}{10^8} = \frac{2\pi f Jl}{10^8} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b}{r} \right)$$

oder (3)

$$E_s = 2\pi f \left[ \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b}{r} \right) \right] \cdot J$$

wenn  $l_k$  die einfach gemessene Länge der Leitung in km bedeutet. Um den Spannungsabfall in der ganzen Schleife zu erhalten, muss die rechte Seite noch mit 2 multipliziert werden. In dieser Gleichung bedeutet der Ausdruck in der viereckigen Klammer den weiter oben definierten Induktionskoeffizienten. Fügt man zu den bestehenden Leitungen  $A_1 B_1$  noch zwei weitere  $A_2 B_2$  hinzu, welche gegenüber  $A_1$  die Abstände  $a_2$  bzw.  $b_2$  haben (Fig. 2), so wirken auf den Leiter  $A_1$  zwei neue Felder ein, nämlich das von  $A_2$  herrührende Feld, mit dem Flux  $+\Phi$  und das von  $B_2$  erzeugte entgegengesetzt gerichtete Feld, mit dem Flux  $-\Phi$ . Ist  $a_2 > b_2$  so kann man den letzteren wiederum in zwei Komponenten  $-\Phi$  und  $-\Phi$  zerlegen. Dann heben sich die Felder  $+\Phi$  gegenseitig auf und es bleibt als resultierender Flux nur noch  $\Phi$ , wofür man

$$\Phi = - \int_{b_2}^{a_2} B_x l dx = - \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{a_2}{b_2} = + \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{b_2}{a_2}$$

erhält.\*) Zu genau demselben Resultat führt aber auch die Bedingung  $b_2 > a_2$ . In ähnlicher Weise verfährt man, wenn mehr als vier Drähte oder allgemein  $2n$  Drähte vorhan-

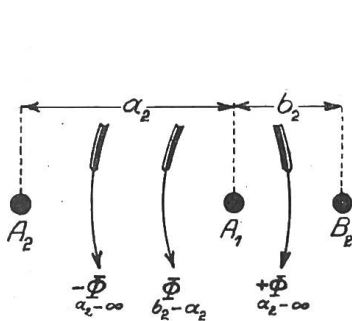


Fig. 2.

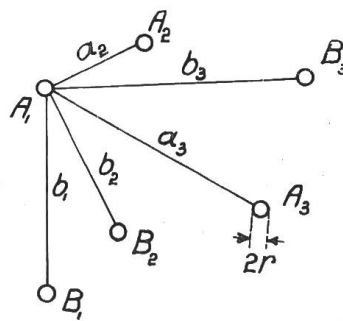


Fig. 3.

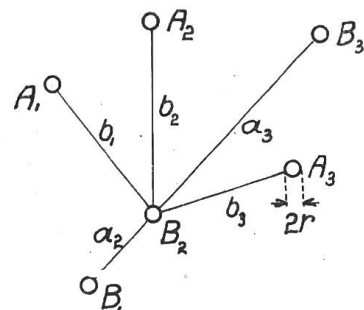


Fig. 4.

\*) Damit erklärt sich nachträglich, warum sozusagen jede Formel brauchbare Resultate liefert, sofern sie die Kraftliniendichte wenigstens im Bereiche der entferntesten Drähte richtig angibt. Da sich nämlich die um Hin- und Rückleitung verlaufenden Feldkomponenten gegenseitig aufheben, so bleibt es sich eben gleich, durch was für eine Formel wir sie darstellen.

den sind, d. h. es werden je zwei Drähte verschiedener Stromrichtung zusammengenommen und ihre Wirkung auf den betrachteten Leiter untersucht. Durch Addition erhält man schliesslich den gesamten resultierenden Flux

$$\begin{aligned}\Phi_r &= \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b_1}{r} + 4,6 \log \frac{b_2}{a_2} + 4,6 \log \frac{b_3}{a_3} + \dots + 4,6 \log \frac{b_n}{a_n} \right) \\ &= \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n}{r \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n} \right)\end{aligned}$$

und daraus den *Induktionskoeffizienten* der betrachteten Leitung  $A_1$

$$(4) \quad L_{A_1} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n}{r \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n} \right) \text{ Henry}$$

Die Handhabung dieser Formel lässt sich am besten an den Fig. 3 und 4 erklären. In diesen Figuren bedeuten  $A_1, A_2, A_3$  die Drähte der *einen*,  $B_1, B_2, B_3$  diejenigen der *andern* Stromrichtung, und zwar ist diese Bezeichnung unveränderlich. Soll nun beispielsweise für  $A_1$  der Induktionskoeffizient bestimmt werden, so denkt man sich von  $A_1$  Strahlen nach allen übrigen Leitern gezogen (Fig. 3) und die Abstände nach Leitern *gleicher* Stromrichtung mit  $a_2, a_3, \dots$ , diejenigen nach Leitern *entgegengesetzter* Stromrichtung mit  $b_1, b_2, b_3, \dots$  numeriert und die betreffenden Werte in die Gleichung (4) eingesetzt. Die Reihenfolge bleibt sich dabei gleich. Handelt es sich um den Leiter  $B_2$ , so sind die Strahlen von  $B_2$  auszuziehen (Fig. 4), wobei wiederum die Abstände nach Leitern derselben Stromrichtung mit  $a_2, a_3, \dots$ , diejenigen nach Leiter umgekehrter Stromrichtung mit  $b_1, b_2, \dots$  bezeichnet werden. Es ändert sich also nur die Bezeichnung der Abstände.

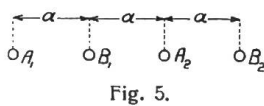


Fig. 5.

*Beispiel.* Man berechne den Induktionskoeffizient für die in Fig. 5 dargestellte Anordnung. Für den Leiter  $A_1$  ist

$$a_2 = 2a; \quad b_1 = a; \quad b_2 = 3a$$

somit 
$$L_{A_1} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{a \cdot 3a}{r \cdot 2a} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 1,3 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry.}$$

Für den Leiter  $B_1$  wird

$$a_2 = \text{Distanz } B_1 B_2 = 2a; \quad b_1 = \text{Distanz } B_1 A_1 = a; \quad b_2 = \text{Distanz } B_1 A_2 = a$$

also 
$$L_{B_1} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{a \cdot a}{r \cdot 2a} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( -0,88 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry.}$$

Für den Leiter  $A_2$  erhält man

$$a_2 = \text{Dist. } A_2 A_1 = 2a; \quad b_1 = \text{Dist. } A_2 B_1 = a; \quad b_2 = \text{Dist. } A_2 B_2 = a.$$

Der letztere verhält sich demnach gleich wie  $B_1$  und ebenso  $B_2$  wie  $A_1$ .

Wie man sieht entstehen bei dieser Anordnung verhältnismässig grosse Differenzen. Inwiefern dieselben den Parallelbetrieb beeinflussen, lässt sich nur von Fall zu Fall entscheiden. Angenommen der Drahtdurchmesser sei 8 mm und der Abstand  $a = 800$  mm, so wird

$$L_{A_1} = \frac{1}{10^4} \left( 1,3 + 4,6 \log \frac{80}{0,4} \right) = 0,001108 \text{ Henry/km.}$$

$$L_{A_2} = \frac{1}{10^4} \left( -0,88 + 4,6 \log \frac{80}{0,4} \right) = 0,000970 \text{ Henry/km.}$$

was bei 50 Perioden einen *induktiven Widerstand*

$$r_{A_1} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,001108 = 0,348 \text{ Ohm/km}$$

bezw. 
$$r_{A_2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,000970 = 0,305 \text{ „ „ ergibt.}$$

Ferner ist der *ohmsche Widerstand*

$$r = 0,35 \text{ Ohm/km,}$$

somit der *scheinbare Widerstand*

$$\text{der Leitung } A_1 = \sqrt{0,35^2 + 0,348^2} = 0,494 \text{ Ohm/km,}$$

$$\text{der Leitung } A_2 = \sqrt{0,35^2 + 0,305^2} = 0,465 \text{ Ohm/km,}$$

Der Unterschied beträgt also rund 6%, was zur Folge hat, dass der Leiter  $A_2$  einen 6% grösseren Strom als  $A_1$  aufnimmt. Arbeiten die Leitungen auf getrennte Stromkreise, so können

die dadurch entstehenden Spannungsdifferenzen dadurch ausgeglichen werden, dass man  $A_1$  und  $B_1$  und ebenso  $A_2$  und  $B_2$  zu einer Schleife vereinigt. Es ist dann für die ganze Schleife

$$L = LA_1 + LB_1 = LA_1 + LA_2.$$

Weitere Beispiele dieser Art finden sich in der *Tabelle I* am Schluss des Aufsatzes.

## 2. Induktion einer Einphasenbahn.

Es soll der Spannungsabfall einer Einphasenbahn bestimmt werden. Derselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich dem Spannungsabfall der Fahrleitung und demjenigen der Schienen, welche als Rückleitung dienen. Der erstere ist leicht an Hand der Formel (3) zu berechnen, wenn man für  $b$  den Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen einsetzt.

Etwas unsicherer ist die Bestimmung des induktiven Widerstandes der Schienen. Um Anhaltspunkte darüber zu gewinnen, werden wir die sehr ausführlichen Versuche von *Lichtenstein* (E.T.Z. 1907) an der Versuchsstrecke *Marienfeld-Zossen* zu Rate ziehen. Dieselben sind, soweit sie für uns in Betracht kommen, in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Die Versuche No. 1—18 wurden in der Weise ausgeführt, dass man einen der drei Fahrdrähte mit einer Schiene in Serie schaltete und Spannung, Strom und Wattaufnahme an der so gebildeten, kurz geschlossenen Schleife ablas. Der induktive Widerstand der Schiene wird somit erhalten, indem man die wattlose Komponente  $E \sin \varphi$  durch den Strom dividiert und hievon den mit Hilfe von Gleichung (3) berechneten induktiven Widerstand der Fahrleitung in Abzug bringt.

Bei den Versuchen No. 19—21 diente der Fahrdraht als Hinleitung, die beiden parallel geschalteten Schienen als Rückleitung.

### Kurzschlussversuch auf der Strecke Marienfeld-Zossen.

Lauf. No.	Länge $l_k$ in km	Perioden- zahl $f$	E	J	$\cos \varphi$	Gesamter ohmscher Widerstand	Gesamter induktiver Widerstand	Induktions- koeffizient $L = \frac{\omega L}{2\pi f}$
						$R = \frac{E \cos \varphi}{J \cdot l_k}$ pro km	$\omega L = \frac{E \sin \varphi}{J \cdot l_k}$ pro km	
1	1,85	48,8	71,1	37,5	0,376	0,384	0,950	$31 \times 10^{-4}$
2		47,6	131,3	70	0,407	0,415	0,925	31
3		44,3	223,6	122	0,425	0,420	0,910	32,6
4		43	295	166	0,453	0,435	0,855	31,6
5	0,85	58,5	54,7	49	0,343	0,449	1,23	33,4
6		58,5	100,3	89,6	0,352	0,462	1,23	33,4
7		57,6	144,5	129,6	0,367	0,482	1,22	33,7
8		56,3	172,6	153,4	0,370	0,490	1,22	34,4
9	1,85	25	49,75	43,5	0,535	0,330	0,522	33,3
10		24,5	78,3	68,5	0,558	0,345	0,513	33,4
11		23,3	145,5	129,2	0,564	0,342	0,505	34,5
12		22,2	186,6	164,8	0,578	0,354	0,498	35,7
13	2,5	56,8	142,4	49,3	0,405	0,468	1,05	29,4
14		55	215	75,8	0,410	0,465	1,03	29,9
15		51,2	326	121,6	0,445	0,476	0,96	29,9
16	2,75	28,5	77,8	47,5	0,554	0,329	0,494	27,6
17		27,7	115	71,4	0,569	0,367	0,483	27,7
18		26,2	202,4	120,8	0,559	0,340	0,505	30,7
19	1,85	26,1	36,8	37,3	0,567	0,558	0,439	26,7
20		25,4	94,5	97,5	0,576	0,559	0,427	26,7
21		24,3	150,5	161	0,575	0,536	0,414	27

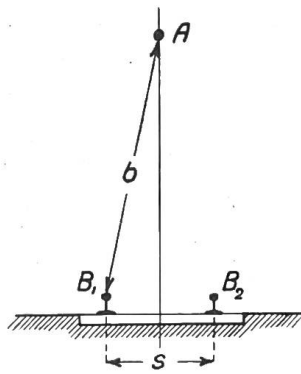


Fig. 6.

Aus den ersten 18 Versuchsdaten folgt

Mittlerer Wert von  $R = 0,408$  Ohm/km

„ „ „  $L = 31,9 \cdot 10^{-4}$  Henry/km.

Die Daten der betreffenden Linie sind:

Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen 5,35 m,

Durchmesser des Fahrdrahtes . . . . . 8 mm,

Querschnitt der Schienen . . . . . 5160 mm<sup>2</sup>.

Bei diesen Versuchen waren die Erdplatten abgeschraubt, dagegen die Schienen an den Stößen durch Kupferdrähte miteinander verbunden.

Widerstand der Schienen

$$R_s = 0,2 \cdot \frac{1000}{5160} = 0,0387 \text{ Ohm pro km}$$

Zuschlag für die Stösse (15 %) . . = 0,0058 „ „ „

zusammen 0,0445 Ohm/km

gegenüber 0,0434 (im Mittel) mit Gleichstrom gemessen.

Widerstand des Fahrdrahtes

$$R_f = 0,0177 \cdot \frac{1000}{50} = 0,354 \text{ Ohm/km bei } 5^\circ \text{ C.}$$

Somit gesamter ohmscher Widerstand

$$R = R_s + R_f = 0,0445 + 0,354 \cong 0,4 \text{ Ohm statt } 0,408 \text{ aus den Versuchen.}$$

Induktionskoeffizient der Fahrleitung nach Gleichung (3)

$$L_f = \frac{1}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \cdot \frac{535}{0,4} \right) = \frac{14,8}{10^4} \text{ Henry/km.}$$

Der Mittelwert aus den ersten 18 Ablesungen gibt  $L = \frac{31,9}{10^4}$  Henry/km, es bleiben also noch für die Schienen

$$L_s = L - L_f = \frac{31,9 - 14,8}{10^4} = \text{rund } \frac{17}{10^4} \text{ Henry/km}$$

und zwar ändert sich dieser Wert innert den üblichen Grenzen von  $5^{1/2}$ — $6^{1/2}$  m nur wenig mit dem Abstände des Fahrdrahtes von den Schienen.

Um daraus den Induktionskoeffizient bei *parallel geschalteten Schienen* zu berechnen, ist eine kleine Ueberlegung erforderlich. Zunächst ist klar, dass an der Grösse von  $L_f$  nichts geändert wird, wohl aber ändert sich  $L_s$ , weil jetzt nur noch der halbe Strom durch eine Schiene fliesst. Ausserdem wirken die beiden Schienen induktiv aufeinander. Nun entspricht dem vollen Strome  $J$  bei dem obigen Versuche eine gesamte Kraftlinienmenge

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_{r_1-b} = 17 \cdot 10^4 I_k J \text{ Linien}$$

um die Schiene, und zwar entspricht  $\Phi_i$  dem im Innern der Schiene verlaufenden Feld und  $\Phi_{r_1-b}$  demjenigen Feld, das durch die aus Schiene und Fahrdraht gebildete Schleife hindurchtritt. Der Faktor  $r_1$  hat hier den Sinn eines „fiktiven“ Radius, indem man sich die Schiene durch einen Leiter vom Radius  $r_1$  ersetzt denkt.

Schalten wir jetzt die Schienen parallel, so entstehen um jede derselben folgende Felder (siehe Fig. 6)

1. Das vom eigenen Strome  $\frac{J}{2}$  erzeugte, im Innern verlaufende Feld, dessen Flux =  

$$+\frac{1}{2} \Phi_i,$$

2. Das ebenfalls vom eigenen Strom herrührende, bis ins Unendliche reichende Feld, dessen Flux =  

$$+\frac{1}{2} \Phi_{r_1-\infty} = \frac{1}{2} \Phi_{r_1-b} + \frac{1}{2} \Phi_{b-\infty},$$

3. Das von der zweiten Schiene erzeugte Feld, dessen Flux =  

$$+\frac{1}{2} \Phi_{s-\infty} = \frac{1}{2} \Phi_{s-b} + \frac{1}{2} \Phi_{s-\infty},$$
 und

4. Das vom Fahrdrabt erzeugte Feld, dessen Flux =  $-\Phi_{b-\infty}$ .

Alle zusammen ergeben als resultierende Kraftlinienmenge:

$$\Phi_r = \frac{1}{2} (\Phi_i + \Phi)_{r_1-b} + \frac{1}{2} \Phi_{s-b}.$$

In dieser Gleichung ist aber nach früherem

$$\frac{1}{2} (\Phi_i + \Phi)_{r_1-b} = 8,5 \cdot 10^4 l_k J,$$

ferner 
$$\frac{1}{2} \Phi_{s-b} = 10^4 l_k J \cdot 2,3 \log \frac{b}{s}.$$

Somit ergibt sich in den *Schienen* ein *induktiver* Spannungsabfall

$$(5) \quad e'_s = \frac{2\pi f \Phi_r}{10^8} = \frac{2\pi f l_k}{10^4} \left( 8,5 + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J \text{ Volt.}$$

Dazu kommt noch der *induktive Spannungsabfall* in der *Fahrleitung*

$$(6) \quad e''_s = \frac{2\pi f l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b}{r} \right) \cdot J \text{ Volt.}$$

Der gesamte induktive Spannungsabfall ist daher

$$e_s = e'_s + e''_s = \frac{2\pi f l_k}{10^4} \left( 9 + 4,6 \log \frac{b}{r} + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J$$

oder

$$(7) \quad e_s = \frac{0,145f}{100} l_k \left( 3,9 + 2 \log \frac{b}{r} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot J \text{ Volt}$$

andererseits ist der *ohmsche Spannungsabfall*

$$(8) \quad e_w = \left( R_f + \frac{1}{2} R_s \right) J,$$

und schliesslich der gesamte Spannungsabfall mit genügender Genauigkeit

$$(9) \quad e = e_s \sin \varphi + e_w \cos \varphi$$

$\varphi$  = Phasenverschiebungswinkel.

*Beispiel.* Die Brauchbarkeit dieser Formeln lassen sich sehr leicht an den letzten drei Versuchen nachprüfen. Da die einfache Leitungslänge bei diesen Versuchen 1,85 km betrug, wird

$$e_s = \frac{0,145f}{100} \cdot 1,85 \left( 3,9 + 2 \log \frac{535}{0,4} + \log \frac{535}{143,5} \right) J = \frac{2,88}{100} f J,$$

$$e_w = 1,85 (0,354 + 0,022) J = 0,695 J.$$



Daraus folgt

für	$J = 37,3 \text{ Amp.}$ $f = 26,1$	$J = 97,5 \text{ Amp.}$ $f = 25,4$	$J = 161 \text{ Amp.}$ $f = 24,3$
$e_s =$	$\frac{2,88}{100} \cdot 26,1 \cdot 37,3 = 28 \text{ V};$	$\frac{2,88}{100} \cdot 25,4 \cdot 97,5 = 71,2 \text{ V};$	$\frac{2,88}{100} \cdot 24,3 \cdot 161 = 113 \text{ V};$
$e_w =$	$0,695 \cdot 37,3 = 25,9 \text{ V};$	$0,695 \cdot 97,5 = 67,6 \text{ V};$	$0,695 \cdot 161 = 112 \text{ V};$
$e =$	$\sqrt{28^2 + 25,9^2} = 38,1 \text{ V}$ statt 36,8 (gemessen):	$\sqrt{71,2^2 + 67,6^2} = 98,2 \text{ V}$ statt 94,5 (gemessen)	$\sqrt{113^2 + 112^2} = 159 \text{ V}$ statt 150,5 (gemessen).

Die Uebereinstimmung ist also eine befriedigende, wenn man berücksichtigt, dass die Leitfähigkeit der Erde, welche sich natürlich der Rechnung entzieht, durch die Parallelschaltung jedenfalls erheblich zugenommen hat. Ausserdem hatte es, wie der Versuchsbericht angibt, vorher stark geregnet, so dass zum vorneherein eine grössere Leitfähigkeit erwartet werden durfte.

*Beispiel 2.* Bei der *Lötschbergbahn* wurde ein scheinbarer Widerstand von 0,27 Ohm/km ermittelt. Die Daten derselben sind

$$b = 670 \text{ cm,} \quad s = 143,5 \text{ cm,} \quad f = 15 \quad r = 0,55 \text{ cm.}$$

Somit ist für diesen Fall

der induktive Widerstand. . . . .  $= \frac{0,145 \cdot 15}{100} \left( 3,9 + 2 \log \frac{670}{0,55} + \log \frac{670}{143,5} \right) = 0,233 \text{ Ohm/km}$

Widerstand des Fahrdrahtes . . . . .  $= 0,0177 \cdot \frac{1000}{100} = 0,177 \text{ Ohm/km}$

Widerstand der Schienen inkl. Verbindungen . . . . .  $= 1,15 \cdot \frac{0,2 \cdot 1000}{2 \cdot 5000} = 0,023 \text{ Ohm/km}$

Gesamter ohmscher Widerstand . . . . .  $= 0,177 + 0,023 = 0,2 \text{ Ohm/km}$

Scheinbarer Widerstand . . . . .  $= \sqrt{0,233^2 + 0,2^2} = 0,3 \text{ Ohm/km, gegenüber } 0,27 \text{ gemessen.}$

Auch hier dürfte der Unterschied von der Leitfähigkeit der Erde herrühren.

*Anmerkung.* Die Formel 7 gilt natürlich nur für jene Strecken, wo die Stromzuführung ausschliesslich durch den Fahrdraht erfolgt. Laufen parallel zur Bahn noch Speiseleitungen, so muss auf die induktive Wirkung derselben ebenfalls Rücksicht genommen werden. In diesem Falle tritt an Stelle von Gleichung (7) die ebenfalls leicht abzuleitende Gleichung (7a)

$$(7a) \quad e_s = \frac{2\pi f}{10^4} l_k \left[ \left( 9 + 4,6 \log \frac{b}{r} + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_1 + \left( 8,5 + 4,6 \log \frac{d}{a} + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_2 \right]$$

$$= \frac{0,145}{100} f l_k \left[ \left( 3,9 + 2 \log \frac{b}{r} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_1 + \left( 3,7 + 2 \log \frac{d}{a} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_2 \right]$$

worin  $b$  den Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen in cm (siehe Fig. 7),  
 $a$  den mittleren Abstand der Speiseleitungen vom Fahrdraht,  
 $d$  den mittleren Abstand der Speiseleitungen von der Schienenmitte,  
 $J_1$  den Strom im Fahrdraht, und  
 $J_2$  den Strom in allen Speiseleitungen zusammen bedeutet.

Für  $J_2 = 0$  geht Gleichung (7a) in (7) über.

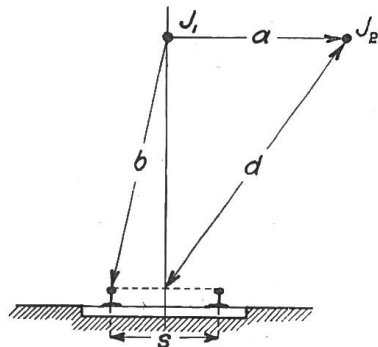


Fig. 7.

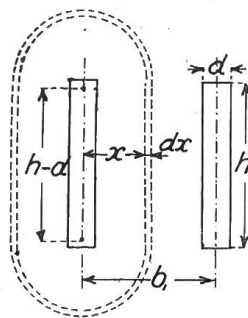


Fig. 8.

## 3. Spannungsabfall in massiven Barren.

Derartige Leitungen kommen hauptsächlich in metallurgischen Anlagen, Karbidwerken usw. vor, wo sie nicht selten zu höchst unangenehmen Ueberraschungen geführt haben. Obwohl man es hier mit verhältnismässig kurzen Leitungen zu tun hat, können doch infolge der grossen Stromstärken und der geringen Betriebsspannung bedeutende prozentuale Spannungsabfälle auftreten. Das einzige Mittel zu ihrer Vermeidung besteht in einer möglichst weitgehenden Unterteilung der Leitungen, die so angeordnet werden, dass abwechselungsweise Barren verschiedener Stromrichtung nebeneinander zu liegen kommen (Sandwichanordnung).

Wie leicht einzusehen, sind für diesen Fall die für runde Drähte abgeleiteten Formeln nicht mehr anwendbar. Da nun eine „genaue“ Rechnung nicht nur sehr umständlich, sondern auch wenig aussichtsreich wäre, werden wir uns im Nachstehenden mit einer Näherungsrechnung begnügen, die sich eng an das frühere Verfahren anschliesst. Unter der Annahme, dass die Kraftlinien etwa den in Fig. 8 angedeuteten Verlauf nehmen, lässt sich die Kraftliniendichte  $H_x$  im Abstände  $x$  von der Barrenmitte durch die Formel

$$H_x = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{J}{\text{Kraftlinienlänge}} = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{J}{2\pi x + 2(h-d)}$$

ausdrücken, wenn  $J$  den Strom in einer Barre bedeutet.

Für  $x = \frac{d}{2}$ , also dicht am Umfange wird daher

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{J}{\pi d + 2(h-d)}$$

Von hier nimmt die Kraftliniendichte nach der Mitte geradlinig ab, so dass man im Mittel für den Flux

$$\Phi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Hl d}{2} = \frac{Jl}{10} \cdot \frac{\pi d}{\pi d + 2(h-d)} = \frac{Jl}{10} \cdot \frac{d}{d + 2h_0}$$

setzen kann, worin  $h_0$  zur Abkürzung für  $\frac{h-d}{\pi}$  steht. Andererseits ist die durch die Hin- und Rückleitung gebildete Schleife tretende Linienzahl

$$\Phi'' = \int_{\frac{d}{2}}^{b_1} H_x l dx = \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \cdot \log \frac{b_1 + h_0}{\frac{d}{2} + h_0}$$

Wir lassen nun die Bedingung einer einfachen Schleife fallen und untersuchen, welche induktive Wirkung zwei beliebige Barren entgegengesetzter Stromrichtung im Abstände  $b_m$  und  $a_m$  auf den betrachteten Leiter ausüben. Analog dem früher behandelten Beispiele (siehe Fig. 2) wird allgemein

$$\Phi''' = \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{b_m + h_0}{a_m + h_0} \quad \text{sein.}$$

Alle diese Kraftlinienmengen addiert, ergeben als resultierenden Flux

$$\Phi_r = \frac{Jl}{10} \left[ \frac{d}{d + 2h_0} + 4,6 \log \frac{(b_1 + h_0)(b_2 + h_0)(b_3 + h_0) \dots (b_n + h_0)}{\left(\frac{d}{2} + h_0\right)(a_2 + h_0)(a_3 + h_0) \dots (a_n + h_0)} \right]$$

dem ein gesamter induktiver Spannungsabfall (in Hin- und Rückleitung)

$$e_s = 2 \cdot \frac{2\pi f}{10^8} l \Phi_r \quad \text{Volt entspricht.}$$

In Wirklichkeit fällt indessen der Spannungsabfall durchschnittlich ca. 50 — 60 % grösser aus, so dass man für eine approximative Rechnung — und um eine solche kann es sich hier höchstens handeln —

$$(10) \quad e_s = \frac{2 f l_m}{1000} \left[ \frac{d}{d + h_0} + 4,6 \log \frac{(b_1 + h_0)(b_2 + h_0)(b_3 + h_0) \dots (b_n + h_0)}{\left(\frac{d}{2} + h_0\right)(a_2 + h_1)(a_3 + h_0) \dots (a_n + h_0)} \right] \frac{J}{1000}$$

setzen kann, wenn  $l_m$  die einfach gemessene Länge in m bedeutet.

Einige Beispiele, welche sich auf ausgeführte Anlagen beziehen, mögen das Gesagte erläutern:

*Beispiel 1.* Die gesamte Leitung (Hin- und Rückleitung) besteht aus 16 Barren, welche, wie Fig. 9 zeigt, angeordnet sind. Strom pro einzelne Barre  $J=2000$  A; Periodenzahl  $f=60$ . Länge unbekannt, dagegen soll der Spannungsabfall pro laufenden m etwas weniger als 2 Volt betragen.

Aus der Figur folgt:  $d=0,8$ ;  $h=12,5$ ,

$$h_0 = \frac{h - d}{\pi} = \frac{12,5 - 0,8}{\pi} = \text{rund } 3,7 \text{ cm}$$

$$a_1 = \frac{d}{2} = 0,4 \text{ cm.}$$

$b_1$ bis $b_n$	$= 10,4$	$12$	$31,2$	$32,8$	$52$	$53,6$	$72,8$	$74,4$
$h_0$	$= 3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$
$b + h_0$	$= 14,1$	$15,7$	$34,9$	$36,5$	$55,7$	$57,3$	$76,5$	$78,1$
$a_1$ bis $a_n$	$= 0,4$	$1,6$	$20,8$	$22,4$	$41,6$	$43,2$	$62,4$	$64$
$h_0$	$= 3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$	$3,7$
$a + h_0$	$= 4,1$	$5,3$	$24,5$	$26,1$	$45,3$	$46,9$	$66,1$	$67,7$

$$e_s = \frac{2 \cdot 60}{1000} \left[ \frac{0,8}{0,8 + 2 \cdot 3,7} + 4,6 \log \frac{14,1 \cdot 15,7 \cdot 34,9 \cdot 36,5 \cdot 55,7 \cdot 57,3 \cdot 76,5 \cdot 78,1}{4,1 \cdot 5,3 \cdot 24,5 \cdot 26,1 \cdot 45,3 \cdot 46,9 \cdot 66,1 \cdot 67,7} \right] \frac{2000}{1000} = 1,8 \text{ Volt pro m.}$$

*Beispiel 2.* Die Leitung besteht wiederum aus 16 Barren, in welchen ein Strom von 3000 A bei 45 Perioden fließt.

Abstand der Barren

- a) auf eine Strecke von 1,84 m = 3 cm
- b) " " " " 0,80 m = 6 cm

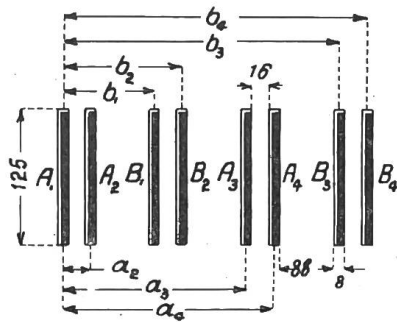


Fig. 9.

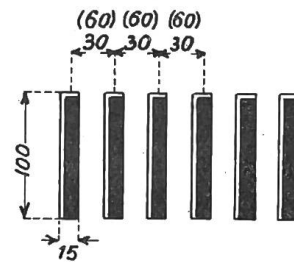


Fig. 10.

Mit Bezug auf die Figur 10 ist hier

$$h_0 = \frac{h - d}{\pi} = \frac{10 - 1,5}{\pi} = 2,7 \text{ cm.}$$

$$a_1 = \frac{d}{2} = 0,75$$

a)	$b_1$ bis $b_8$	$= 3$	$9$	$15$	$21$	$27$	$33$	$39$	$45$
	$h_0$	$= 2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$
	$b + h_0$	$= 5,7$	$11,7$	$17,7$	$23,7$	$29,7$	$35,7$	$41,7$	$47,7$
	$a_1$ bis $a_8$	$= 0,75$	$6$	$12$	$18$	$24$	$30$	$36$	$42$
	$h_0$	$= 2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$	$2,7$
	$a + h_0$	$= 3,45$	$8,7$	$14,7$	$20,7$	$26,7$	$32,7$	$38,7$	$44,7$

b)	$b_1$ bis $b_8 =$	6	18	30	42	54	66	78	90
	$h_0 =$	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7
	$b + h_0 =$	8,7	20,7	32,7	44,7	56,7	68,7	80,7	92,7
	$a_1$ bis $a_8 =$	0,75	12	24	36	48	60	72	84
	$h_0 =$	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7
	$a + h_0 =$	3,45	14,7	26,7	38,7	50,7	62,7	74,7	86,7

$$e_s = \frac{2 \cdot 45}{1000} \left[ 1,84 \left( \frac{1,5}{1,5 + 2 \cdot 2,7} + 4,6 \log \frac{5,7 \cdot 11,7 \cdot 17,7 \cdot 23,7 \cdot 29,7 \cdot 35,7 \cdot 41,7 \cdot 47,7}{3,45 \cdot 8,7 \cdot 14,7 \cdot 20,7 \cdot 26,7 \cdot 32,7 \cdot 38,7 \cdot 44,7} \right) \right. \\ \left. + 0,8 \left( \frac{1,5}{1,5 + 2 \cdot 2,7} + 4,6 \log \frac{8,7 \cdot 20,7 \cdot 32,7 \cdot 44,7 \cdot 56,7 \cdot 68,7 \cdot 80,7 \cdot 92,7}{3,45 \cdot 14,7 \cdot 26,7 \cdot 38,7 \cdot 50,7 \cdot 62,7 \cdot 74,7 \cdot 86,7} \right) \right] \frac{3000}{1000} = 2,44 \text{ Volt.}$$

Gemessen wurden 2,39 Volt.

*Anmerkung:* Auf die Verschiedenheit der Ströme in den einzelnen Barren, welche ziemlich gross sein dürfte, ist bei den obigen Rechnungen keine Rücksicht genommen. Sehr wahrscheinlich ist auch diese Verschiedenheit zum Teil der Grund, warum der wirkliche Spannungsabfall etwas grösser ausfällt.

#### 4. Induktion bei unverkettetem Zweiphasenstrom.

Der Rechnungsgang ist ähnlich wie bei Einphasenstrom. Es seien

$A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  die Hinleitungen der Phase I,  
 $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$  „ Rückleitungen „ „ I,  
 $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  „ Hinleitungen „ „ II,  
 $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  „ Rückleitungen „ „ II,

ferner  $a_2 a_3 \dots a_n$  die Abstände nach den Drähten gleicher Phase und Stromrichtung.

$b_1 b_2 b_3 \dots b_n$  „ „ „ „ „ „ „ „ aber entgegengesetzter Stromrichtung.

$c_1 c_2 c_3 \dots c_n$  bzw.  $d_1 d_2 \dots d_n$  die Abstände nach den Drähten der zweiten Phase.

Nimmt man für einen Moment an, die zweite Phase sei stromlos, so würde auf den Leiter  $A_1$  der Flux

$$\Phi_I = \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right)$$

einwirken. Dazu kommt aber jetzt noch das von den Leitern der zweiten Phase herührende Feld, dessen Flux

$$\Phi_{II} = \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \log \frac{d_1 d_2 d_3 \dots d_n}{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}$$

der dem ersteren je nach der Reihenfolge der Phasen um  $90^\circ$  vor- oder nachhinkt. Beide setzen sich folglich zu einer resultierenden Kraftlinienmenge

$$\Phi_r = \sqrt{\Phi_I^2 + \Phi_{II}^2}$$

zusammen. Nun genügt aber eine kleine Nachrechnung, um einzusehen, dass man  $\Phi_{II}$  gegenüber  $\Phi_I$  praktisch vernachlässigen kann. In der Tat beträgt der dadurch entstehende Fehler selbst bei der denkbar ungünstigsten Anordnung, No. 8, Tabelle II, nur etwa 1%, während er bei allen übrigen unter 0,5% liegt. Infolgedessen können Zweiphasenleitungen wie Einphasenleitungen nach Gleichung (4) berechnet werden. Auf die Durchrechnung eines Beispiels kann verzichtet werden, zumal es an Hand der in Tabelle II zusammengestellten Beispiele ein leichtes ist, den Rechnungsgang zu verfolgen.

#### 5. Induktion bei Drehstrom.

Es seien  $A_1 A_2 A_3 \dots$ ,  $B_1 B_2 B_3 \dots$ ,  $C_1 C_2 C_3 \dots$  die Drähte der aufeinanderfolgenden Phasen,  $J$  der Strom pro Phase,  $a_2 a_3 a_4 \dots$  die Abstände des betrachteten Leiters nach

den übrigen gleicher Phase und  $b_1 b_2 \dots$  bzw.  $c_1 c_2 \dots$  diejenigen nach den Drähten der beiden andern Phasen, wobei sich die Reihenfolge gleich bleibt.

Um auch auf diesen Fall die frühere Betrachtungsweise anwenden zu können, denken wir uns zu jeder Leitung eine besondere Rückleitung gezogen und sämtliche Rückleitungen in einen gemeinsamen Strang vereinigt, der von der betrachteten Leitung den Abstand  $R$  habe; ausserdem werden wir diesen Abstand so gross annehmen, dass  $R$  für alle drei Phasen praktisch gleich gross ist. Diese Freiheit ist ohne weiteres gestattet, da ja bekanntlich die Summe aller durch die Rückleitung fliessenden Ströme gleich Null ist. Durch den Hinzutritt dieser fiktiven Rückleitung wird also an der Sachlage nichts geändert.

Wir berechnen nun in gewohnter Weise die von den einzelnen Drähten und ihren Rückleitungen erzeugten Felder und erhalten für den magnetischen Flux der drei um je  $120^\circ$  verschobenen resultierenden Felder:

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{R}{r} + 4,6 \log \frac{R}{a_2} + 4,6 \log \frac{R}{a_3} + \dots \right) \\ &= \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \cdot \frac{R^n}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right), \\ \Phi_B &= \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \log \frac{R^n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n} \\ \Phi_C &= \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \log \frac{R^n}{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}\end{aligned}$$

Die beiden letzteren lassen sich wieder in eine Komponente in der Richtung  $\Phi_A$  und senkrecht dazu zerlegen. Dadurch erhält man an Stelle von drei noch zwei senkrecht aufeinanderstehende Felder

$$\Phi_I = \Phi_A + \Phi_B \cdot \cos 120 + \Phi_C \cdot \cos 240 = \Phi_A - 0,5 \Phi_B - 0,5 \Phi_C$$

oder ausgerechnet

$$\Phi_I = \frac{Jl}{10} \left( 0,5 + 4,6 \log \cdot \frac{\sqrt{(b_1 b_2 b_3 \dots b_n) (c_1 c_2 c_3 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right)$$

und  $\Phi_{II} = \Phi_B \sin 120 + \Phi_C \sin 240 = 0,866 \Phi_B - 0,866 \Phi_C$ ,

oder ausgerechnet

$$\Phi_{II} = \frac{Jl}{10} \cdot 4 \log \cdot \frac{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}$$

Der auf den Leiter  $A_1$  einwirkende *resultierende Flux* ist somit

$$\Phi_r = \sqrt{\Phi_I^2 + \Phi_{II}^2}$$

Nun lässt sich leicht nachweisen, dass auch hier wiederum  $\Phi_{II}$  gegenüber  $\Phi_I$  vernachlässigt werden darf. Folglich erhält man als *Induktionskoeffizient* einer einzelnen Leitung oder Phase

$$(11) \quad \dot{L} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{\sqrt{(b_1 b_2 b_3 \dots b_n) (c_1 c_2 c_3 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right) \text{ Henry/km}$$

*Beispiel 1:* Mit Bezug auf die Anordnung No. 1, Tabelle III ist für den Leiter A und C:  $b_a = a$ ;  $c_1 = 2a$ , (die übrigen fallen weg)

$$\begin{aligned}\text{daher } L_A = L_C &= \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \sqrt{\frac{a \cdot 2a}{r}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log a \sqrt{\frac{2}{r}} \right) \\ &= \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + \frac{4,6}{2} \log 2 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 1,19 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry/km.}\end{aligned}$$

Für den Leiter B wird:  $b_1 = a$ ,  $c_1 = a$

$$\text{somit } L_B = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \sqrt{\frac{a \cdot a}{r}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry/km.}$$

*Beispiel 2:* Als zweites Beispiel wählen wir die Anordnung No. 5, Tabelle III. Hier ist für die symmetrisch gelegenen Drähte  $A_1, A_2, C_1, C_2$ :

$$a_2 = d; \quad b_1 = b; \quad c_1 = 2b, \\ b_2 = c; \quad c_2 = a,$$

$$\text{daher } L_{A_1} = L_{A_2} = L_{C_1} = L_{C_2} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \sqrt{\frac{b \cdot c \cdot 2b \cdot a}{r d}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b}{r d} \sqrt{2 a c} \right)$$

oder wenn  $b = a$ , also  $c = a \sqrt{2}$ ,  $d = a \sqrt{5}$  wird.

$$L_{A_1} L_{A_2} \text{ oder } = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{a}{r a \sqrt{5}} \sqrt{2 \cdot a \cdot a \sqrt{2}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 - \frac{4,6}{2} \log \frac{5}{2,82} + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \\ = \frac{l_k}{10^4} \left( -0,07 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right).$$

Andererseits erhält man für die Drähte  $B_1$  und  $B_2$

$$a_2 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = b \\ b_2 = c, \quad c_2 = c, \quad \text{also}$$

$$L_{B_1} = L_{B_2} = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \sqrt{\frac{b \cdot c \cdot b \cdot c}{r a}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left( 0,5 + 4,6 \log \frac{b c}{r a} \right)$$

b für  $b = a$

$$L_{B_1} = L_{B_2} = \frac{l_k}{10^4} \left( 1,19 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right).$$

(Tabelle III, am Schluss des Aufsatzes.)

Diese beiden Beispiele dürften genügen. Im übrigen sei auf die Tabelle III verwiesen, welche so ziemlich alle in der Praxis vorkommenden Leitungsanordnungen enthält. Von denselben sind nur die Ausführungsarten No. 2, 9 und 10 symmetrisch, alle andern dagegen mehr oder weniger unsymmetrisch. Im allgemeinen hat dies nicht viel zu sagen, da sich diese Unsymmetrie mehr durch eine Verschiedenheit in der Wattaufnahme der drei Phasen bei leerlaufenden Motoren bemerkbar macht. Auch lässt sich dieselbe, wenn absolut nötig, durch Verdrillung, d. h. zyklische Vertauschung der Leitungen beheben. Das geschieht z. B. bei den Anordnungen No. 8, 11, 12 und 13, indem man

und gleichzeitig  $A_1$  mit  $B_1$ ,  $B_1$  mit  $C_1$  und  $C_1$  mit  $A_1$   
 $A_2$  mit  $B_2$ ,  $B_2$  mit  $C_2$  und  $C_2$  mit  $A_2$  vertauscht. Gewöhnlich sieht man aber wegen den grossen Kosten von der Verdrillung ab.

Wir sehen ferner, dass die Anordnung 11 gegenüber 12 einen etwas kleineren Induktionskoeffizienten besitzt, da der arithmetische Mittelwert von  $y$  nur

$$\frac{1}{3} (1,18 + 0,64 - 0,34) = 0,493$$

gegenüber  $\frac{1}{3} (-0,03 + 0,64 + 1,73) = 0,78$  beträgt.

Diese ohnehin kleine Differenz spielt jedoch keine Rolle, da die 2ten Glieder bedeutend überwiegen.

Grössere Differenzen weisen die Ausführungen No. 8 bezw. 9 und 10 auf, von denen die letzteren beiden schon wegen der getrennten Anordnung der Phasen entschieden vorzuziehen sind.

## II. Induktion auf freie Leitungen.

Unter freien Leitungen sind Telephon- oder Telegraphenleitungen zu verstehen, welche parallel zur Kraftleitung laufen. Obwohl eine direkte Störung des Telephonbetriebes erst

bei Vorhandensein von höheren Harmonischen zu befürchten ist, so können doch Ströme induziert werden, welche unter Umständen die Signalapparate zum Ansprechen bringen oder auch wegen ihrer Spannung eine gewisse Gefahr in sich bergen und deshalb zu vermeiden sind.

1. Bei Einphasenstrom.

Nach den weiter oben gegebenen Erklärungen können wir uns kurz fassen. Es seien  $FF_1$  die beiden Drähte der Freileitung,  $a_1 a_2 \dots$  bzw.  $b_1 b_2 \dots$  die Abstände des Leiters F von den Drähten  $A_1 A_2 \dots$  bzw.  $B_1 B_2 \dots$ ,  $a'_1 a'_2 \dots$  „  $b'_1 b'_2 \dots$  „ „ „ „  $F_1$  „ „ „ „ „ „

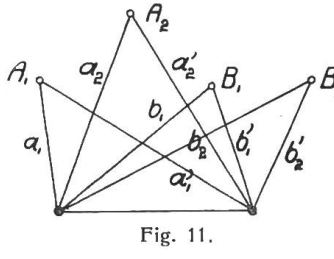


Fig. 11.

so ist die von den Leitern  $A_1 A_2 \dots$  erzeugte, durch die Schleife  $FF_1$  gehende gesamte Kraftlinienanzahl

$$\Phi_A = 4,6 \frac{Jl}{10} \left[ \log \frac{a'_1}{a_1} + \log \frac{a'_2}{a_2} + \dots \right] = 4,6 \frac{Jl}{10} \log \left( \frac{a'_1 a'_2 a'_3 \dots}{a_1 a_2 a_3 \dots} \right)$$

Dazu kommt noch der von den Leitern  $B_1 B_2 \dots$  erzeugte Flux

$$\Phi_B = 4,6 \frac{Jl}{10} \left[ \log \frac{b_1}{b'_1} + \log \frac{b_2}{b'_2} + \dots \right] = 4,6 \frac{Jl}{10} \log \left( \frac{b_1 b_2 b_3 \dots}{b'_1 b'_2 b'_3 \dots} \right)$$

Die in der Schleife induzierte EMK ist daher

$$e_m = 2 \pi f \left[ \frac{l_k}{10^4} 4,6 \left[ \log \left( \frac{a'_1 a'_2 a'_3 \dots}{a_1 a_2 a_3 \dots} \right) + \log \left( \frac{b_1 b_2 b_3 \dots}{b'_1 b'_2 b'_3 \dots} \right) \right] \right] \cdot J$$

oder

$$(12) \quad e_m = 2 \pi f \left[ \frac{l_k 4,6}{10^4} \left( \log \frac{b_1 b_2 b_3 \dots}{a_1 a_2 a_3 \dots} - \log \frac{b'_1 b'_2 b'_3 \dots}{a'_1 a'_2 a'_3 \dots} \right) \right] \cdot J \text{ Volt}$$

Benützt man als Rückleitung die Erde, so dass also der Leiter  $F_1$  wegfällt, so ist für  $a'_1 a'_2 \dots$  und  $b'_1 b'_2 \dots$  der Abstand der Drähte  $A_1 A_2 \dots B_1 B_2 \dots$  von der Erde einzusetzen. Nun nähert sich aber merklich der Quotient  $\frac{b'_1 b'_2 b'_3 \dots}{a'_1 a'_2 a'_3 \dots}$  der Einheit. Infolgedessen wird der log derselben gleich Null und es bleibt nur noch das erste Glied.

2. Bei Zweiphasenstrom.

Hier ändert sich die Sachlage nur insofern, als noch ein zweites um  $90^\circ$  verschobenes Feld entsteht, das von den Drähten  $C_1 C_2 \dots, D_1 D_2 \dots$  der zweiten Phase herrührt. Analog dem vorigen Falle ergibt sich daher eine induzierte EMK

$$(13) \quad e_m = 2 \pi f \frac{l_k 4,6}{10^4} \sqrt{\left( \log \frac{b_1 b_2 \dots}{a_1 a_2 \dots} - \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{a'_1 a'_2 \dots} \right)^2 + \left( \log \frac{d_1 d_2 \dots}{c_1 c_2 \dots} - \log \frac{d'_1 d'_2 \dots}{c'_1 c'_2 \dots} \right)^2} \cdot J$$

Fällt  $F_1$  weg, so verschwinden ebenfalls die zweiten Glieder in den Klammerausdrücken.

3. Bei Drehstrom.

Wir erhalten zunächst drei Felder mit der Kraftlinienanzahl

$$\Phi_A = \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{a'_1 a'_2 \dots}{a_1 a_2 \dots}$$

$$\Phi_B = \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{b_1 b_2 \dots}$$

und

$$\Phi_C = \frac{Jl}{10} 4,6 \log \frac{c'_1 c'_2 \dots}{c_1 c_2 \dots}$$

welche wir wie früher in zwei senkrechte Komponenten

$$\Phi_I = \Phi_A - 0,5 \Phi_B - 0,5 \Phi_C = \frac{Jl}{10} 4,6 \left[ \log \frac{a'_1 a'_2 \dots}{a_1 a_2 \dots} - 0,5 \cdot \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{b_1 b_2 \dots} - 0,5 \log \frac{c'_1 c'_2 \dots}{c_1 c_2 \dots} \right]$$

und

$$\Phi_{II} = 0,866 \Phi_B - 0,866 \Phi_C = \frac{Jl}{10} 4,6 \cdot 0,866 \left[ \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{b_1 b_2 \dots} - \log \frac{c'_1 c'_2 \dots}{c_1 c_2 \dots} \right]$$

zerlegen. Dann ist ausgerechnet

$$(14) \quad e_m = 2\pi f \frac{l_k 4,6}{10^4} \sqrt{\left( \log \frac{a'_1 a'_2 \dots}{a_1 a_2 \dots} \sqrt{\frac{b'_1 b'_2 \dots c'_1 c'_2 \dots}{b_1 b_2 \dots c_1 c_2 \dots}} \right)^2 + 0,75 \left( \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{b_1 b_2 \dots} \cdot \frac{c_1 c_2 \dots}{c_1 c_2 \dots} \right)^2} \cdot J$$

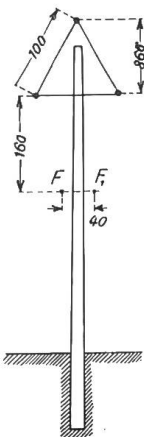


Fig. 12.

*Beispiel.* Man berechne die in der Leitung FF<sub>1</sub> (Fig. 12) induzierte Spannung, wenn  $l_k = 20$  km,  $J = 100$  Amp.,  $f = 50$  ist.

Aus der Figur folgt

$$a = \sqrt{30^2 + 160^2} = 163 \text{ cm}; \quad a'_1 = \sqrt{70^2 + 160^2} = 174,5 \text{ cm}$$

$$b = b' = \sqrt{20^2 + 246,6^2} = 248 \text{ cm}$$

$$c = a' = 174,5 \text{ cm}; \quad c' = a = 163 \text{ cm}.$$

Es ist daher nach Gleichung (14)

$$e_m = \frac{2\pi 50 \cdot 20 \cdot 4,6}{10^4} \sqrt{\left( \log \frac{174,5}{163} \sqrt{\frac{248 \cdot 163}{243 \cdot 174,5}} \right)^2 + 0,75 \left( \log \frac{248 \cdot 174,5}{248 \cdot 163} \right)^2} \cdot 100 = \text{rd. } 290 \text{ V.}$$

### III. Die Kapazität.

#### 1. Allgemeine Erklärungen.

Etwas weniger einfach liegt die Sache mit der Kapazität. Doch sind die Schwierigkeiten mehr scheinbar und rühren zum Teil daher, dass über den Begriff Kapazität noch eine gewisse Unsicherheit herrscht. Es handelt sich eben hier nicht mehr um einen eindeutigen Begriff, der sich durch eine einzige starre Definition umschreiben lässt, vielmehr sind verschiedene Auffassungen zulässig. Gerade diese Vieldeutigkeit hat aber das Gute, dass sie gestattet, ein und dasselbe Problem auf verschiedene Weise in Angriff zu nehmen, wodurch sich mitunter bedeutende mathematische Vereinfachungen ergeben. Wir werden uns daher mit mehreren Methoden befassen.

Um zu einer allgemeinen Grundlage zu gelangen, seien zunächst einige Erklärungen bezüglich des Potentialbegriffes vorausgeschickt.

Denken wir uns dicht an die Oberfläche einer mit der Ladung  $Q$  versehenen Kugel vom Radius  $r_1$  eine frei bewegliche gleichartige Einheitsladung herangebracht, so wird dieselbe nach dem Coulombschen Gesetze mit der *Kraft*

$$(15) \quad P = \frac{Q \cdot 1}{\epsilon r_1^2} \text{ Dyn}$$

( $\epsilon =$  Konstante, welche von der Natur des umgebenden Mediums abhängt), abgestossen und bei ihrer Bewegung bis zu einer Distanz  $r_2$  eine *Arbeit* leisten, welche sich zu

$$(16) \quad V = \int_{r_1}^{r_2} P dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ Erg}$$

berechnet. Genau der gleiche Betrag müsste aufgewendet werden, um die Ladung wieder nach der Kugel zurückzubringen.



Dieser Ausdruck erreicht einen maximalen Wert

$$V = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} \quad \text{für } r_2 = \infty,$$

d. h. wenn sich die Ladung bis ins Unendliche entfernen kann. In diesem Falle stellt  $V$  überhaupt das gesamte der Ladung 1 gegenüber der Ladung  $Q$  innewohnende „**Arbeitsvermögen**“, oder mit andern Worten, das „**Potential**“ der beiden Ladungen dar. Es liegt auf der Hand, dass wir infolge unserer beschränkten terrestrischen Verhältnisse nur einen Teil dieses gesamten Arbeitsvermögens ausnützen können; infolgedessen handelt es sich bei allen hier vorkommenden Aufgaben stets nur um Potentialdifferenzen.

Wir wollen nun annehmen, beide Ladungen seien an metallische Leiter, der Einfachheit halber metallische Kugeln, gebunden, und zwar besitze die Kugel A die Ladung  $+Q$  und B die Ladung  $-1$ , dann findet zwischen beiden eine Anziehung statt. Trotzdem kann diesmal keine Bewegung der Elektrizität zu Stande kommen, weil das Dielektrikum wohl den von den elektrischen Massen ausgehenden „*Kraftstrom*“ durchlässt, für die Elektrizität selbst aber einen mehr oder weniger vollkommenen *Isolator* bildet. Nichtsdestoweniger besitzen beide Ladungen ein bestimmtes Arbeitsvermögen, das sofort frei wird, sobald man die Kugeln durch einen Leiter miteinander verbindet. Es wandert dann die negative Ladung, die wir uns allein als beweglich vorzustellen haben, durch die Leitung nach A, womit ihr Arbeitsvermögen erschöpft ist.

Nun ist unschwer einzusehen, dass diese Arbeit genau gleich jener sein muss, welche erforderlich wäre, um die Ladung durch das Dielektrikum hindurch von A nach B oder umgekehrt zu bewegen. Da die Ladung auf der Kugel B gleichmässig über die Oberfläche verteilt ist und sich demnach so verhält, als ob sie im Mittelpunkte angebracht wäre, wird bei ihrer Bewegung von B nach der Oberfläche von A ein Weg  $r_2 - r_1$  zurückgelegt, wenn  $r_2$  den Abstand der Kugelmitten bedeutet. Wir können also die Arbeit sofort mit Hilfe der Gleichung (16) berechnen.

Etwas verwickelter ist die Sache, wenn wir uns an Stelle der beiden Kugeln zwei Platten denken. Hier versagt die bisherige Rechnungsweise und muss zu einer andern Methode gegriffen werden. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir Zähler und Nenner der Gleichung (15) mit  $4\pi$ ; dann kann der im Zähler stehende Ausdruck  $4\pi Q$  nach der *Faradayschen* Anschauungsweise als die Gesamtzahl der von der Ladung  $Q$  austretenden *elektrischen Kraftlinien* aufgefasst werden. Andererseits stellt  $4\pi r^2 = S$  im Nenner die Oberfläche der um die Ladung gedachten Kugelfläche, oder allgemein gesprochen, die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche vor, folglich der Quotient aus beiden die *Liniendichte*  $B_e$  des *elektrischen Feldes*. Wir gelangen daher zu zwei neuen Beziehungen

$$(17) \quad v = Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{dr}{S}$$

$$\text{und (18)} \quad v = \int_r^{r_2} \frac{B_e}{\varepsilon} \cdot dr \quad *)$$

\*) Der Quotient  $\frac{B_e}{\varepsilon}$  wird gewöhnlich als „*Feldstärke*“ bezeichnet. Dabei muss man sich aber hüten, dieselbe etwa mit der *Felddichte* oder *Liniendichte* zu verwechseln. Der Unterschied lässt sich am besten an Hand eines Beispiels aus der Beleuchtungstechnik erklären. Besitzt ein Körper die Lichtstärke  $J$ , so können wir uns vorstellen, dass von ihm ein Lichtstrom  $4\pi J$  (Lichtlinien oder Strahlen) ausgehen. Folglich wird im Abstände  $r$  eine Strahlen- (Linien-) dichte  $B_l = \frac{4\pi J}{4\pi r^2} = \frac{J}{r^2}$  entstehen und zwar unabhängig davon, ob der Lichtkörper in einem Zimmer oder im Freien bei Nebel aufgestellt ist. Die eigentliche *Beleuchtung*, d. h. die physiologisch wahrnehmbare Lichtwirkung oder *Lichtstärke* (vergleichbar mit der *Feldstärke*) ist aber nur  $\frac{B_l}{\lambda}$ , wo  $\lambda$  eine von der Lichtdurchlässigkeit des umgebenden Mediums abhängige Konstante bedeutet.

von denen hauptsächlich die erstere höchst merkwürdig ist. In dieser Schreibweise bedeutet nämlich das Integral nichts anderes als die Arbeit, welche bei der Verschiebung zweier Einheitsladungen um die Strecke  $r_2 - r_1$  geleistet wird. Ausserdem erkennt man in ihm unschwer den Ausdruck eines *Widerstandes*, und zwar in unserm Falle des Widerstandes des elektrischen Kraftflusses. Damit ist aber auch gleichzeitig die Bedeutung der etwas mysteriösen *Dielektrizitätskonstanten*  $\epsilon$  als spezifische dielektrische *Leitfähigkeit* festgelegt. Um die Eigenschaft eines Widerstandes noch besser zum Ausdruck zu bringen, werden wir das Integral kurzerhand mit  $R$  bezeichnen, wobei der wahre Wert von  $R$  jederzeit aus Gleichung (17) berechnet werden kann.

Wir haben es bisher absichtlich vermieden, von *Kapazität* zu sprechen. In der Tat lag kein Grund vor, den uns vertrauteren Begriff des Widerstandes durch einen andern zu ersetzen. Nun gibt es aber einzelne Fälle, wo es vorteilhafter ist, statt mit dem Widerstande, mit seinem reziproken Werte der *Leitfähigkeit* zu rechnen. Führen wir für dieselbe die Bezeichnung  $C = \frac{1}{R}$  ein, so nimmt die Gleichung (17) die uns bekannte Form

$$(19) \quad V = QR = \frac{Q}{C} \quad \text{an. *)}$$

worin man sich unter  $C$  die *dielektrische Leitfähigkeit*, oder wenn schon ein Fremdwort gebraucht werden soll, die *Kapazität* vorzustellen hat. Dabei hat man sich zu erinnern, dass bei Parallelschaltung von Leitfähigkeiten oder Kapazitäten die gesamte Leitfähigkeit

$$(20) \quad C = C_1 + C_2 + C_3 \dots \text{ ist,}$$

während umgekehrt bei der Hintereinanderschaltung

$$(21) \quad R = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \text{ also}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots} \text{ wird.}$$

*Beispiel 1:* Man berechne die Kapazität einer Kugel vom Radius  $r_1$  gegen die Erde. Es ist dies eines der wenigen Beispiele wo man direkt von Gleichung (16) ausgehen kann.

Da für  $r_2$  der Abstand der Kugel von der Erdmitte einzusetzen ist, kann offenbar  $\frac{1}{r_2}$  gegenüber  $\frac{1}{r_1}$  vernachlässigt werden. Ferner ist  $\epsilon$  für die Luft gleich 1. Wir erhalten daher

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{r_1} \quad \text{oder (22) } C = r_1 (\text{ESE}) = \frac{r_1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Farad.}$$

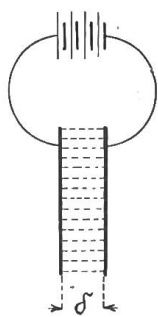


Fig. 13.

*Beispiel 2:* Man bestimme die Kapazität eines aus zwei parallelen Platten gebildeten Kondensators (Fig. 13). Wir benutzen Gleichung (17), worin wir für  $S$  die Fläche einer Platte einsetzen. Da  $S$  einen konstanten Wert beibehält, wird

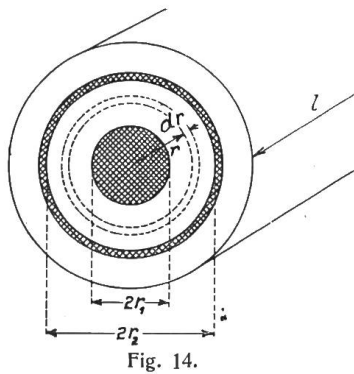
$$(22) \quad R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{4 \pi d r}{\epsilon S} = \frac{4 \pi}{\epsilon S} (r_2 - r_1)$$

$$\text{oder (23) } C = \frac{\epsilon S}{4 \pi (r_2 - r_1)} = \frac{\epsilon S}{4 \pi \delta} (\text{ESE}).$$

*Beispiel 3:* Kapazität eines konzentrischen Kabels. Da die elektrischen Kraftlinien hier radial verlaufen, so ist die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche (nach Fig. 14) im Abstand  $r$

$$S = 2 \pi r l \quad l = \text{Länge des Kabels in cm,}$$

\*) Die gleiche Betrachtungsweise ist natürlich auch auf die bewegte Elektrizität, d. h. den elektrischen Strom anwendbar, sofern man die Dielektrizitätskonstante durch die Leitfähigkeit des Leiters ersetzt. Dividiert man ferner beide Seiten der Gleichung (19) durch die Zeit  $t$ , so erhält man links die EMK, d. h. die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit und rechts das Produkt aus  $\frac{Q}{t} = J$  mal dem Widerstande (Ohmsches Gesetz).



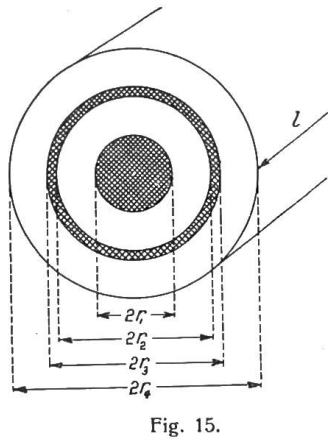
somit 
$$R = \frac{1}{C} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{4\pi}{\epsilon} \cdot \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{2}{\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$
 oder (24) 
$$C = \frac{\epsilon l}{2} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ (ESE).}$$

Die gleiche Formel erhält man für die Kapazität eines Einfachkabels gegen den Bleimantel. Ist der letztere von der Erde isoliert, so haben wir den Fall zweier *in Serie geschalteter* Kapazitäten vor uns. Mit Bezug auf Fig. 15 ist daher die Kapazität gegen die Erde

(25) 
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\epsilon l}{2 \left( \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_4}{r_3} \right)} \text{ (ESE).}$$

*Beispiel 4:* Als Beispiel für die *Parallelschaltung* von Kapazitäten soll die Kapazität zweier unter einem spitzen Winkel zueinander stehenden Platten (Fig. 16) bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das Feld aus unendlich vielen Schichten vom Querschnitte  $b \times x$  und variabler Länge



$$\delta_x = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \frac{x}{a}$$
 zerlegt; dann ist die Kapazität einer solchen Schicht

$$dC = \frac{4\pi b dx}{2 \delta_x} = \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{b dx}{\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \frac{x}{a}},$$

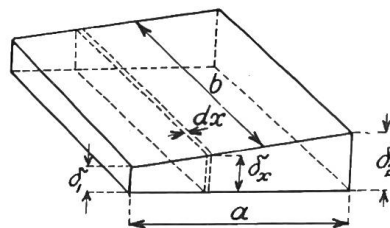


Fig. 16.

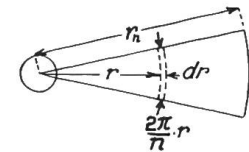
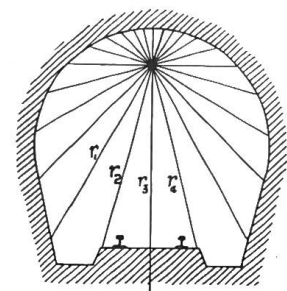


Fig. 17.

und da die gesamte Kapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten ist, folgt, indem man zwischen den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = a$  integriert.

(26) 
$$C = \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{ab}{\delta_2 - \delta_1} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

*Beispiel 5:* Auf ähnliche Weise kann die Kapazität einer Fahrleitung in einem Tunnel beliebiger Querschnittsform gegen die Erde bestimmt werden. Wir denken uns zunächst den Umfang des Leiters gleichmässig in eine möglichst grosse Zahl ( $n$ ) Teile eingeteilt und durch die Teilpunkte und die Leiteraxe Ebenen gelegt. Auf diese Weise entstehen  $n$  Prismen von variabler Höhe  $r_1, r_2, r_3$  — (Fig. 17). Greifen wir irgend eines derselben heraus, so ist die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche im Radius  $r$

$$S = l \frac{2\pi}{n} \cdot r,$$

folglich der dielektrische Widerstand

$$R = \int_{r_0}^{r_m} \frac{4\pi}{l} \frac{dr}{\frac{2\pi}{n} \cdot r} = \frac{4,6 n}{l} \log \frac{r_m}{r_0},$$

somit die Leitfähigkeit oder Kapazität aller parallel geschalteten Segmente.

(27) 
$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \frac{1}{4,6 n} \left[ \frac{1}{\log \frac{r_1}{r_0}} + \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_0}} + \frac{1}{\log \frac{r_3}{r_0}} + \dots \right] \text{ (ESE).}$$

Wir werden übrigens weiter unten sehen wie die Aufgabe auch noch auf etwas einfachere Weise gelöst werden kann.

Alle bisher behandelten Beispiele liessen sich entweder direkt mit Hilfe des *Potentialbegriffes*, Gleichung (16), oder auf dem Umwege über den dielektrischen *Widerstand* lösen. Nun gibt es aber noch eine Reihe von praktisch wichtigen Beispielen, bei denen man auf diese Weise nur unter Aufwendung eines komplizierten mathematischen Apparates zum Ziele käme. Es sind dies die Freileitungen und Mehrfachkabel, mit denen wir uns im Nachstehenden etwas eingehender befassen werden. Zu ihrer Lösung benützen wir die Gleichung (18).

## 2. Kapazität von Einphasenleitungen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall einer aus Hin- und Rückleitung gebildeten Schleife AB, auf welcher sich die Elektrizitätsmenge  $+Q$  und  $-Q$  befindet. Um hierfür die Potentialdifferenz zu berechnen, genügt es, die Arbeit zu bestimmen, welche es braucht, eine Einheitsladung von A nach B zu bringen.

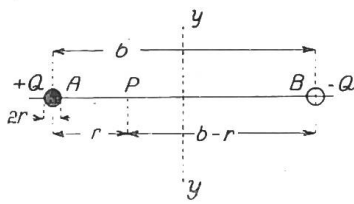


Fig. 18.

Befindet sich beispielsweise die Ladung in P (Fig. 18), so wirkt auf dieselbe sowohl die von A erzeugte

$$\text{Feldstärke } H_A = \frac{B_A}{\varepsilon} = \frac{4\pi Q}{\varepsilon 2\pi r l}$$

als auch die von B herrührende

$$\text{Feldstärke } H_B = \frac{B_B}{\varepsilon} = \frac{4\pi Q}{\varepsilon 2\pi (b-r) l} \quad \text{ein.}$$

Beide äussern sich nach der gleichen Richtung hin und erzeugen ein resultierendes Feld

$$H = \frac{B_A}{\varepsilon} + \frac{B_B}{\varepsilon} = \frac{2Q}{\varepsilon l} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right).$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (18) ein und berücksichtigt, dass  $\varepsilon$  für die Luft gleich 1 ist, so folgt

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{2Q}{l} \int_r^{b-r} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{4Q}{l} \ln \frac{b}{r}$$

also Kapazität der ganzen Schleife

$$(28) \quad C = \frac{l}{4 \ln \frac{b}{r}} \text{ (ESE)} = \frac{0,012 l_k}{\log \frac{b}{r}} \quad \mu \text{ Farad.}$$

Es ist nun zu beachten, dass sich bei mehr als zwei Leitern die Ladungen der verschiedenen Leitungen gegenseitig beeinflussen. Infolgedessen werden auch die Kapazitäten im allgemeinen etwas voneinander abweichen. Das hat wiederum zur Folge, dass sich auch die Ladungen ungleichmässig verteilen. Wollte man allen diesen verwickelten Erscheinungen Rechnung tragen, so würde man zu äusserst komplizierten, praktisch völlig unhandlichen Formeln gelangen. Wir werden deshalb einen Mittelweg einschlagen, d. h. eine gleichmässige Verteilung der Ladung voraussetzen, dagegen die Kapazität ähnlich wie wir dies bezüglich der Induktion hielten, auf einen einzelnen Leiter beziehen und die Umrechnung auf ganze Schleifen erst am Ende vornehmen. In diesem Falle ist demnach als *Kapazität eines einzelnen Drahtes* die dielektrische Leitfähigkeit bis zur mittleren Aequipotentialfläche  $yy$  (Fig. 18) zu verstehen.

Da im Falle einer einfachen Schleife (Fig. 18) beide *Teilkapazitäten* hintereinandergeschaltet sind, so ist jede doppelt so gross als Gleichung (28) angibt.

Ferner muss bei einer genaueren Rechnung auch die Kapazität gegen die Erde berücksichtigt werden, was am einfachsten mit Hilfe der von *Lord Kelvin* aufgestellten Vorstellung der „*Elektrischen Spiegelbilder*“ geschieht.

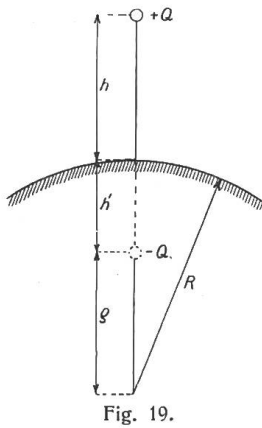


Fig. 19.

Befindet sich die mit der Ladung  $Q$  versehene Leitung im Abstände  $h$  (Fig. 19) von der Erde, welche als Rückleitung dient, so ist die Feldverteilung gerade so, als ob die Rückleitung durch eine zweite Leitung im Abstände

$$(29) \quad h' = h \frac{R}{R + h}$$

von der Erdoberfläche erfolge, d. h. die Punkte  $A$  und  $A'$  verhalten sich mit Bezug auf den Kreisumfang wie *konjugierte Punkte*. Da nun im Falle der Erde  $h$  gegenüber  $R$  im Nenner vernachlässigt werden kann, so wird

$$h' = h,$$

somit der Abstand zwischen der wirklichen und der fiktiven Leitung gleich  $2h$ . Es genügt also in Gleichung (28)  $b$  durch  $2h$  zu ersetzen und die rechte Seite mit  $2$  zu multiplizieren, d. h. es ist die *Kapazität zwischen einer Leitung und der Erde*.

$$(30) \quad C = \frac{1}{2 \ln \frac{2h}{r}} \text{ (ESE)} = \frac{0,024 l_k}{\log \frac{2h}{r}} \mu \text{ Farad.}$$

*Beispiel.* Die Formel (30) kann auch an Stelle von (27) zur approx. Berechnung der Kapazität eines Fahrdrahtes in einem Tunnel (gegen die Erde) benützt werden, wenn man für  $h$  den kürzesten Abstand des Drahtes von der Tunnelwand einsetzt.

Im Tunnel zwischen Kandersteg und Goppenstein der Lötschbergbahn (Länge  $l_k = 14,7$  km) hat der Fahrdraht einen Querschnitt von  $100 \text{ mm}^2$  (fiktiver Radius  $r_1 = 0,565$  cm) und ist an einem Tragdraht von  $8,5$  mm ( $r_2 = 0,425$  cm) aufgehängt. Die kürzesten Abstände sind in den Aufhängenpunkten

$$h_1 = 55 \text{ cm}; \quad h_2 = 40 \text{ cm.}$$

Nach Gleichung (30) ist daher

$$C_1 = \frac{0,024 \cdot 14,7}{\log \frac{2 \cdot 55}{0,565}} = 0,154; \quad C_2 = \frac{0,024 \cdot 14,7}{\log \frac{2 \cdot 40}{0,425}} = 0,155 \mu \text{ F,}$$

somit gesamte Kapazität  $C = C_1 + C_2 = 0,31 \mu \text{ F}$ .

Gemessen wurden beim Fahrdraht links  $0,262 \mu \text{ F}$ , beim Fahrdraht rechts  $0,275 \mu \text{ F}$ . (Die vorstehenden Angaben verdanke ich Herrn *Burlet*, bauleitender Ingenieur der S. B. B.).

Die Differenz mag zum Teil davon herrühren, dass der Abstand infolge des Durchhanges in Wirklichkeit grösser war. Ferner hatte der Fahrdraht eine vom Kreis stark abweichende Form.

Die Bedeutung der Teilkapazitäten geht am besten aus folgendem interessanten Beispiele hervor:

*Beispiel.* Anlässlich eines Versuches mit den Lokomotiven der *Chemin de Fer du Midi* auf der Lötschberglinie zeigte es sich, dass die Fahrleitung der Lokomotivremise *Spiez*, auch wenn sie vollständig von der Hauptleitung abgeschaltet wurde, gegen die Erde eine Spannung von  $10000$  Volt aufwies.\*) Die dortige Anordnung lässt sich etwa durch das Schema Fig. 20 darstellen, worin  $A$  den unter Spannung stehenden Fahrdraht und  $B$  die Remisenleitung bedeutet.

Wir haben somit den Fall zweier in Serie geschalteter Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  vor uns, in deren Mitte die Remisenleitung angeschlossen ist. Da sich die Teilspannungen wie die dielektrischen Widerstände verhalten, also

$$E_2 : E = \frac{1}{C_2} : \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) \text{ so wird}$$

$$(31) \quad E_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot E$$

\*) Diese Erscheinung wurde übrigens schon bei den ersten Probefahrten der Lötschbergbahn beobachtet und hätte beinahe zu einem Unfälle geführt, indem ein Monteur vom Dache einer in der Remise befindlichen Lokomotive geschleudert wurde. Da sich der Vorfall gerade im Momente ereignete, als ein Zug vorbeifuhr, so schrieb man denselben der Induktion zu und unterliess es bedauerlicherweise, die Spannung zu messen.

Auf die gleichen Ursachen lässt sich ferner die Erscheinung zurückführen, dass die von der Fahrleitung aus gespeisten Umformer für die Stationsbeleuchtungen auch in ausgeschaltetem Zustande noch eine Spannung von ca.  $10000$  Volt gegen die Erde haben.

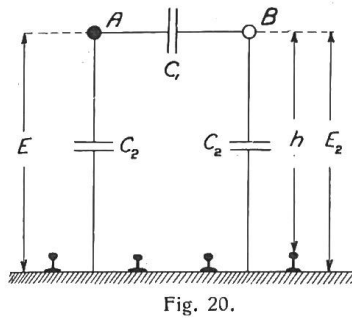


Fig. 20.

Nun ist angenähert  $b = 800$  cm (im Mittel)

$$h = 670 \text{ cm}$$

$$r = 0,4 \text{ cm}$$

$$E = 15000 \text{ Volt, } f = 15 \text{ Perioden,}$$

somit

$$E_1 = \frac{0,012 \cdot l_k}{\log \frac{800}{0,4}} = 0,00364 l_k \quad \mu F,$$

$$C_2 = \frac{0,024 l_k}{\log \frac{2,670}{0,4}} = 0,00682 l_k \quad \mu F,$$

und daraus

$$E_2 = \frac{0,00364}{0,00364 + 0,00682} \cdot 15000 = 5100 \text{ Volt,}$$

also nur etwa die Hälfte der wirklich gemessenen Spannung. Es ist indessen zu bemerken, dass die Formel (31) nur unter der ausdrücklichen Bedingung gilt, dass die Isolationswiderstände unendlich gross sind. Denken wir uns dagegen zwischen A und B einen ohmschen Widerstand von  $R$  Megohm eingeschaltet, so tritt an Stelle von Formel (31) die vollständigere Formel

$$E_2 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + \frac{2C_1C_2 - C_2^2}{1 + \left(\frac{1}{R2\pi fC}\right)^2}}} \cdot E$$

Setzen wir, um irgend eine Zahl zu wählen,  $R = 10$  Megohm,  $l_k = 0,15$  km, also  $C_1 = 0,00055$ ,  $C_2 = \text{rd. } 0,001$ , so erhalten wir eine Teilspannung

$$E_2 = \frac{0,00055 \cdot 15000}{\sqrt{0,00055^2 + \frac{2 \cdot 0,00055 \cdot 0,001 + 0,001^2}{1 + \left(\frac{1}{10 \cdot 2\pi \cdot 15 \cdot 0,00055}\right)^2}}} = 9500 \text{ Volt}$$

was der Wirklichkeit schon bedeutend näher kommt.

Das voranstehende Beispiel ist auch insofern lehrreich, als es zeigt, welche Fehler entstehen können, wenn man bei derartigen Rechnungen den Isolationswiderstand vernachlässigt. Strenggenommen müsste auch noch der Widerstand der Leitung B gegen die Erde in die Rechnung einbezogen werden, wodurch dieselbe aber ausserordentlich kompliziert würde.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle einer Leitung von beliebiger Leiterzahl  $A_1 A_2 A_3, \dots B_1 B_2 B_3 \dots$  über, welche alle von einem gleichen Strom durchflossen sind. Es liegt also hier ein System arbeitsfähiger, elektrischer Massen vor, dessen Arbeitsvermögen mit Bezug auf die Ladung eines bestimmten Leiters gleich der algebraischen Summe der Arbeitsvermögen aller übrigen Ladungen gegenüber dieser Ladung ist. Dabei liefern die Ladungen ungleichen Vorzeichens positive, diejenige gleichen Vorzeichens negative Arbeitsbeiträge.

Mit Bezug auf den Leiter  $A_1$  ist daher

$$(32) \quad V_1 = \frac{Q}{C_{A_1 B_1}} + \frac{Q}{C_{A_1 B_2}} + \frac{Q}{C_{A_1 B_3}} \dots - \frac{Q}{C_{A_1 A_2}} - \frac{Q}{C_{A_1 A_3}} - \frac{Q}{C_{A_1 A_4}} \dots$$

Andererseits folgt aus Gleichung (28)

$$C_{A_1 B_1} = \frac{l}{4 \ln \frac{b_1}{r}}; \quad C_{A_1 B_2} = \frac{l}{4 \ln \frac{b_2}{r}}; \quad C_{A_1 B_3} = \frac{l}{4 \ln \frac{b_3}{r}} \text{ usw.}$$

$$C_{A_1 A_2} = \frac{l}{4 \ln \frac{a_2}{r}}; \quad C_{A_1 A_3} = \frac{l}{4 \ln \frac{a_3}{r}}; \quad C_{A_1 A_4} = \frac{l}{4 \ln \frac{a_4}{r}} \text{ usw.}$$

wobei wie früher die Abstände nach den Drähten gleicher Stromrichtung mit  $a_2 a_3 a_4 \dots$ , diejenigen nach Drähten entgegengesetzter Stromrichtung mit  $b_1 b_2 b_3 \dots$  bezeichnet werden. Diese Werte in die Gleichung (32) eingeführt, gibt

$$V_1 = \frac{4 Q}{l} \cdot \ln \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n}$$

Dazu käme noch das Potential der Spiegelbilder (siehe Fig. 21).

$$V_2 = - \frac{4 Q}{l} \cdot \ln \frac{b_1' b_2' b_3' \dots b_n'}{a_1' a_2' a_3' \dots a_n'} ;$$

und zwar muss hier das negative Vorzeichen stehen, weil nach Voraussetzung den fiktiven Leitungen entgegengesetzte Ladungen zukommen.

Durch Addition erhält man

$$(33) \quad V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{4 Q}{l} \left[ \ln \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} - \ln \frac{b_1' b_2' b_3' \dots b_n'}{a_1' a_2' a_3' \dots a_n'} \right]$$

somit *Teilkapazität* des Leiters  $A_1$

$$(34) \quad C_{A_1} = 2 C = \frac{l}{2} \left[ \ln \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} - \ln \frac{b_1' b_2' b_3' \dots b_n'}{a_1' a_2' a_3' \dots a_n'} \right]$$

Es muss jedoch gleich bemerkt werden, dass bei *Freileitungen* das zweite Glied im Nenner stets gegenüber dem ersten vernachlässigt werden kann. Auf km und  $\mu$  Farad bezogen ist daher

$$(35) \quad C_{A_1} = \frac{0,024 l_k}{\log \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n}} = \frac{0,024 l_k}{\log x} = \frac{0,024 l_k}{z + \log \frac{a}{r}} \mu F$$

wobei die Werte von  $x$  und  $z$  den früheren Tabellen I — III entnommen werden können. Die zuletzt angegebene Fassung kommt dann zur Anwendung, wenn alle Drähte gleichen Abstand haben.

*Beispiel.* Man bestimme die Kapazität für die in Fig. 21 dargestellte Anordnung (No. 8, Tabelle I).

Für die Leiter  $A_1$  und  $B_2$  ist

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 a = 100, \\ a'_1 &= 2 h = 1000, \\ a'_2 &= \sqrt{4 h^2 + 4 a^2} = 2 \sqrt{500^2 + 50^2} = 1005, \\ b_1 &= a = 50, \\ b_2 &= 3 a = 150, \\ b'_1 &= \sqrt{4 h^2 + a^2} = \sqrt{4 \cdot 500^2 + 50^2} = 1000 \\ b'_2 &= \sqrt{4 h^2 + 9 a^2} = \sqrt{4 \cdot 500^2 + 9 \cdot 50^2} = 1011, \end{aligned}$$

also  $\log \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} = \log \frac{50 \cdot 150}{0,3 \cdot 100} = 2,398 .$

Zur Kontrolle berechnen wir auch gleich

$$\log \frac{b'_1 b'_2 \dots b_n}{a'_1 a'_2 \dots a'_n} = \log \frac{1000 \cdot 1011}{1000 \cdot 1005} = 0,0027 .$$

Wie man sieht, kann dieser Faktor ruhig weggelassen werden. Es bleibt also noch

$$C_{A_1} = C_{B_2} = \frac{0,024 \cdot l_k}{2,398} = \text{rund } 0,01 l_k \mu F .$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für  $B_1$  und  $A_2$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 a = 100, \\ a'_1 &= 2 h = 1000, \\ a'_2 &= \sqrt{4 h^2 + 4 a^2} = 2 \sqrt{500^2 + 50^2} = 1005, \\ b_1 &= a = 50, \end{aligned}$$

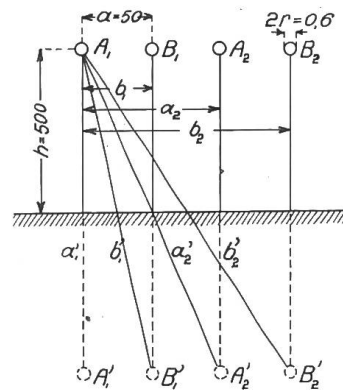


Fig. 21.

$$b_2 = a = 50 .$$

$$b'_1 = \sqrt{4h^2 + a^2} = \sqrt{4 \cdot 500^2 + 50^2} = 1000$$

$$b'_2 = b'_1 = 1000 ,$$

und daraus 
$$\log \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} = \log \cdot \frac{50 \cdot 50}{0,3 \cdot 100} = 1,921 ,$$

ferner 
$$\log \frac{b'_1 b'_2 b'_3 \dots b'_n}{a'_1 a'_2 a'_3 \dots a'_n} = \log \cdot \frac{1000 \cdot 1000}{1000 \cdot 1005} = -0,0022$$

kann also wieder vernachlässigt werden. Daraus folgt

$$C_{A_2} = C_{B_1} = \frac{0,024 \text{ lk}}{1,921} = 0,0125 \text{ lk } \mu\text{F} .$$

Bilden die Leiter  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  für sich getrennte Stromkreise, so ist die gesamte Kapazität dieser Schleifen wegen der Hintereinanderschaltung

$$C_{A_1 B_1} = C_{A_2 B_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_{A_1}} + \frac{1}{C_{B_1}}} = \frac{C_{A_1} \cdot C_{B_1}}{C_{A_1} + C_{B_1}} = \frac{0,01 \cdot 0,0125}{0,01 + 0,0125} \cdot \text{lk} = 0,00556 \text{ lk } \mu\text{F} .$$

und der *Ladestrom*

$$J_c = \frac{E 2\pi f C_{A_1 B_1}}{10^6} \text{ Ampère pro km}$$

für beide Schleifen zusammen also zweimal mehr. Würde man die Drähte  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  parallel schalten, so ist ihre Kapazität gleich der Summe der Teilkapazitäten. Dabei nehmen die inneren Drähte einen ca. 25% grösseren Ladestrom als die äusseren auf, was sich allerdings erst bei sehr grossen Entfernungen und hohen Spannungen bemerkbar macht.

## 2. Zweiphasenleitungen.

Was weiter oben bezüglich der Selbstinduktion von Zweiphasenleitungen gesagt wurde gilt auch für die Kapazität, d. h. die Rechnung wird genau so durchgeführt, als ob nur eine Phase vorhanden wäre. Es kann also die früher angegebene Formel (35) benutzt werden.

## 3. Dreiphasenleitungen.

Wir benützen wieder den Kunstgriff einer gemeinsamen fiktiven Rückleitung, deren Abstand  $R$  man sich so gross vorzustellen hat, dass er für alle praktisch als gleich gross angesehen werden kann. Es lassen sich somit folgende drei Gleichungen anschreiben:

$$V_A = \frac{4Q}{l} \left[ \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{R}{a_2} + \ln \frac{R}{a_3} + \dots \ln \frac{R}{a_n} \right]$$

$$= \frac{4Q}{l} \cdot \ln \frac{R^n}{r a_2 a_3 \dots a_n} ,$$

$$V_B = \frac{4Q}{l} \cdot \ln \frac{R^n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n} ,$$

$$V_C = \frac{4Q}{l} \cdot \ln \frac{R^n}{c_1 c_2 c_3 \dots c_n} ,$$

worin man sich unter  $V$  und  $Q$  nach Belieben Augenblicks- oder Effektivwerte vorstellen kann. Da die drei Vektoren um  $1/3$  Periode gegeneinander verschoben sind, also nicht ohne weiteres addiert werden dürfen, werden wir sie wie früher in zwei senkrecht aufeinander stehende Komponenten zerlegen. Es ist dann

$$V_I = V_A + V_B \cos 120 + V_C \cos 240 = V_A - 0,5 V_B - 0,5 V_C$$

und 
$$V_{II} = V_B \sin 120 + V_C \sin 240 = 0,866 V_A - 0,866 V_C ,$$

oder ausgerechnet



$$V_I = \frac{4Q}{l} \ln \cdot \frac{\sqrt{(b_1 b_2 \dots b_n) (c_1 c_2 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$V_{II} = \frac{4Q}{l} \cdot 0,866 \ln \cdot \left( \frac{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n} \right),$$

und schliesslich

$$(36) \quad V = \frac{Q}{C} = \sqrt{V_I^2 + V_{II}^2}$$

Nachdem aber das zweite Glied unter der Wurzel gegenüber dem ersten vernachlässigt werden darf, so bleibt noch

$$\frac{Q}{C} = \frac{4Q}{l} \ln \sqrt{\frac{(b_1 b_2 \dots b_n) (c_1 c_2 \dots c_n)}{r a_2 a_3 \dots a_n}}$$

Bezieht man ferner die Kapazität auf einen einzelnen Leiter (also pro Phase) und km und drückt dieselbe in  $\mu$  Farad aus, so wird

$$(37) \quad C_{A_1} = \frac{0,024 l_k}{\log \sqrt{(b_1 b_2 \dots b_n) (c_1 c_2 \dots c_n)}} = \frac{0,024 l_k}{\log x} = \frac{0,024 l_k}{z + \log \frac{a}{r}} \mu F$$

Bezüglich der Faktoren x und z sei auf die Tabellen I — III verwiesen.

Der *Ladestrom* ergibt sich aus der Beziehung

$$(38) \quad J_c = \frac{E_v}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi f C_A}{10^6} \quad E_v = \text{verkettete Spannung (Spannung im Netz).}$$

*Beispiel.* Man berechne den Ladestrom der in Fig. 22 gezeichneten Leitung (Anordnung No. 1, Tab. III) bei  $f = 50$  Perioden,  $E_v = 35000$  Volt,  $r = 0,45$  cm,  $l_k = 40$  km. Wir bestimmen zunächst die Kapazität.

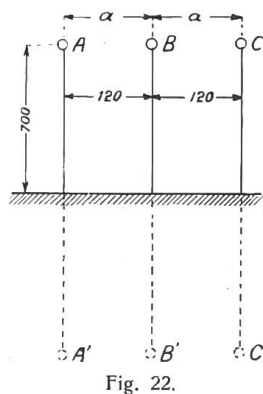


Fig. 22.

Da die Drähte gleichen Abstand haben, so ist  $z$  nach Tab. III = 0,15, folglich nach Gleichung (37)

$$C_A = C_c = \frac{0,024 l_k}{z + \log \frac{a}{r}} = \frac{0,024 \cdot 40}{0,15 + \log \frac{120}{0,45}} = 0,3732 \mu F .*)$$

Für den mittleren Leiter B ist  $z = 0$  also

$$C_B = \frac{0,024 \cdot 40}{\log \frac{120}{0,45}} = 0,396 \mu F .$$

Der mittlere Wert aller drei Phasen ist  $0,38 \mu F$ , folglich ergibt sich ein mittlerer Ladestrom

$$J_c = \frac{E_v}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi f C}{10^6} = \frac{35000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0,38}{10^6} = 2,41 \text{ Amp.}$$

#### 4. Kapazität von Mehrleiterkabeln.

Wir werden uns hier mit einer kurzen Andeutung des Rechnungsganges begnügen. Als einfachsten Fall wählen wir ein *Zweileiterkabel* (Fig. 23). In dieser Figur stellen  $A'_1$  und  $B'_1$  die fiktiven Leiter vor, deren Einfluss hier ebenfalls zu berücksichtigen ist. Zur Berechnung benützen wir die früher abgeleitete Formel (34)

\*) Die vollständige Rechnung mit Berücksichtigung des Gliedes  $V_{II}$  in Gleichung (36) sowie der Kapazität gegen die Erde würde 0,3740, also bloss 0,2% mehr ergeben.

$$C_{A_1} = \frac{\epsilon l}{2} \frac{1}{\ln \frac{b_1}{2} - \ln \frac{b'_1}{a'_1}} = \frac{0,024 \epsilon l_k}{\log \frac{b_1 a'_1}{r b'_1}} \mu F,$$

worin wir allerdings noch  $a'_1$  und  $b'_1$  zu bestimmen haben. Nun ist mit Bezug auf Fig. 23

$$h' = R - \rho, \quad \text{ferner nach Gleichung (29)}$$

$$h = R \frac{h'}{R - h'} = \frac{R}{\rho} (R - \rho),$$

somit

$$a'_1 = h + h' = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho},$$

$$b'_1 = h + h' + 2\rho = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho}$$

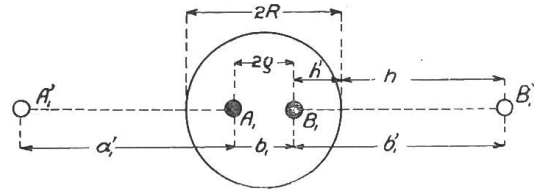


Fig. 23.

und in die obige Gleichung eingesetzt.

$$(39) \quad C_{A_1} = C_{B_1} = \frac{0,024 \epsilon l_k}{\log \left( \frac{2\rho}{r} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2} \right)} \mu F.$$

folglich  $C_{A_1 B_1} = \frac{1}{2} C_{A_1}$  für die ganze Schleife.

Die hier angedeutete Rechnung ist natürlich nur approximativ und setzt voraus, dass  $\epsilon$  für die Erde ungefähr den gleichen Wert habe, wie für die Isoliermasse, was nicht vollständig zutrifft.

*Dreileiterkabel* (Fig. 24). Führt man die Rechnung, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, vollständig mit Berücksichtigung der fiktiven Leiter durch, so erhält man ausgerechnet

$$C_A = C_B = C_C = \frac{0,024 \epsilon l_k}{\sqrt{\left( \log \frac{a'_1}{r} \sqrt{\frac{b_1 c_1}{b'_1 c'_1}} \right)^2 + 0,75 \left( \log \frac{c_1 b'_1}{c'_1 b_1} \right)^2}}$$

Nun ist für diesen Fall

$$a'_1 = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho},$$

$$b'_1 = c'_1 = \sqrt{\frac{R^4 + R^2 \rho^2 + \rho^4}{\rho^2}}$$

$$b_1 = c_1 \sqrt{3} \cdot \rho$$

Infolgedessen wird der zweite log unter der Wurzel gleich Null, und es bleibt noch nach einigen Umrechnungen

$$C_A = C_B = C_C = \frac{0,024 \epsilon l_k}{\log \left( \frac{3 \rho^2 (R^2 - \rho^2)^3}{r^2 R^6 - \rho^6} \right)}$$

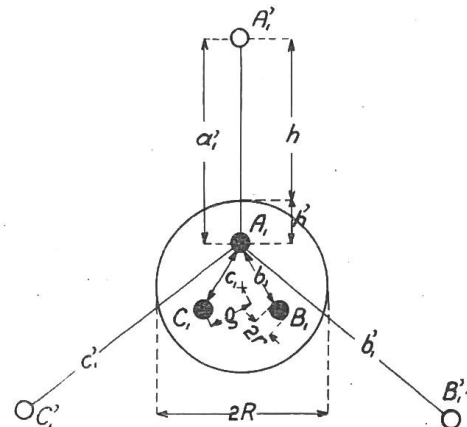


Fig. 24.


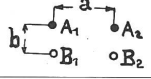
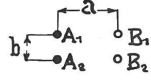



oder in etwas bequemerer Form, wobei  $\rho^6$  gegenüber  $R^6$  vernachlässigt werden kann

$$(40) \quad C_A = C_B = C_C = \frac{0,024 \epsilon l_k}{2 \log \sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{r} + 3 \log \left( 1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)} \mu F \text{ pro Phase.}$$

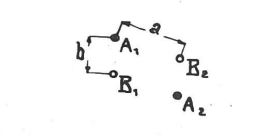
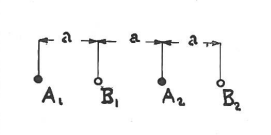
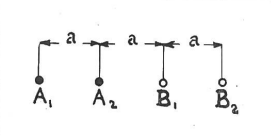
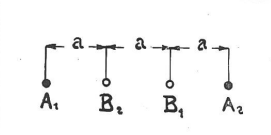
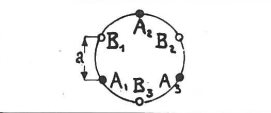
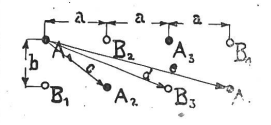
Tabelle I. Einphasenleitungen.

Induktionskoeffizient pro einfache Hin- oder Rückleitung.

$$L = \frac{l_k}{10^4} (0,5 + 4,6 \log x) \text{ Henry/km,} \quad \text{oder für } b = a \quad L = \frac{l_k}{10^4} \left( y + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry/km.}$$

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z*)
1		$\frac{a}{r}$	+ 0,5	0
2		$\frac{b}{ra} \sqrt{a^2 + b^2}$	+ 1,19	+ 0,15
3		$\frac{a}{rb} \sqrt{a^2 + b^2}$	+ 1,19	+ 0,15
4		$\frac{ab}{r \sqrt{a^2 + b^2}}$	- 0,19	- 0,15
5		Für A <sub>1</sub> und B <sub>2</sub> = $\frac{a}{rb} \sqrt{a^2 + 2b^2}$ Für A <sub>2</sub> und B <sub>1</sub> = $\frac{a^2}{rb}$	+ 1,59 + 0,5	+ 0,24 0
6		Für A <sub>1</sub> und B <sub>2</sub> = $\frac{b}{ra} \sqrt{a^2 + 2b^2}$ Für A <sub>2</sub> und B <sub>1</sub> = $\frac{b}{r}$	+ 1,59 + 0,5	+ 0,24 0

\*) Siehe Kapitel über Kapazität.

7		<p>Für <math>A_1</math> und <math>A_2 = \frac{ab}{r\sqrt{a^2+2b^2}}</math></p> <p>Für <math>B_1</math> und <math>B_2 = \frac{b}{r}</math></p>	-0,59	-0,24
8		<p>Für <math>A_1</math> und <math>B_2 = \frac{3}{2} \frac{a}{r}</math></p> <p>Für <math>A_2</math> und <math>B_1 = \frac{a}{2r}</math></p>	+1,31	+0,18
9		<p>Für <math>A_1</math> und <math>B_2 = \frac{6a}{r}</math></p> <p>Für <math>A_2</math> und <math>B_1 = 2 \frac{a}{r}</math></p>	+4,08	+0,78
10		<p>Für <math>A_1</math> und <math>A_2 = \frac{2}{3} \frac{a}{r}</math></p> <p>Für <math>B_1</math> und <math>B_2 = 2 \frac{a}{r}</math></p>	-0,31	-0,18
11		$\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{r}$	-0,31	-0,18
12		<p>Für <math>A_1, B_1, A_4, B_4 = \frac{3ab}{2r} \sqrt{\frac{4a^2+b^2}{(a^2+b^2)(9a^2+b^2)}}</math></p> <p>Für <math>B_2, B_3, A_2, A_3 = \frac{ab}{2r} \frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{(a^2+b^2)}</math></p>	-0,075	-0,125
			-0,66	-0,25

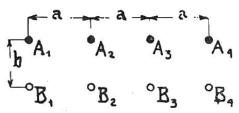
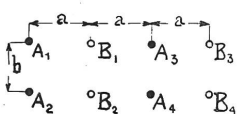
Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z
13		<p>Für <math>A_1, B_1, A_4, B_4 = \frac{b}{6ra^3} \sqrt{(a^2+b^2)(4a^2+b^2)(9a^2+b^2)}</math></p> <p>Für <math>A_2, B_2, A_3, B_3 = \frac{b}{2ra^3} (a^2+b^2) \sqrt{4a^2+b^2}</math></p>	<p>+ 1,52</p> <p>+ 2,11</p>	<p>+ 0,22</p> <p>+ 0,35</p>
14		<p>Für <math>A_1, A_2, B_3, B_4 = \frac{3a}{2rb} \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(9a^2+b^2)}{4a^2+b^2}}</math></p> <p>Für <math>B_1, B_2, A_3, A_4 = \frac{a}{2rb} \frac{a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}</math></p>	<p>+ 2,69</p> <p>- 1,11</p>	<p>+ 0,48</p> <p>- 0,35</p>

Tabelle II. Unverkettete Zweiphasenleitungen.

Induktionskoeffizient pro einfache Hin- oder Rückleitung.

$$L = \frac{l_k}{10^4} (0,5 + 4,6 \log x) \text{ Henry/km, oder für } b = a \quad L = \frac{l_k}{10^4} \left( y + 4,6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry/km.}$$

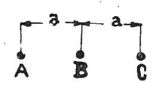
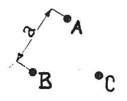
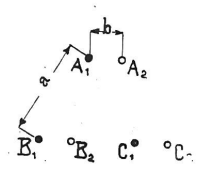
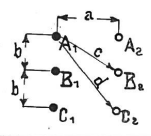
Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z
1		$\frac{a}{r}$	+ 0,5	0
2		$\frac{b}{r}$	+ 0,5	0
3		$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r}$	+ 1,19	+ 0,15
4		$\frac{b}{r}$	+ 0,5	0
5		$\frac{a}{r}$	+ 0,5	0

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z
6		Für A und B = $\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{r}$ Für C und D = $\frac{a}{r}$	+1,59 +0,5	+0,237 0
7		$\frac{a}{r}$	+0,5	0
8		$\frac{2a}{r}$	+1,88	0,3
9		$\frac{ab}{r\sqrt{a^2 + b^2}}$	-0,19	-0,15
10		$\frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{rb}$	+1,19	+0,15
11		$\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{ra}$	+1,19	+0,15
12		Für A <sub>1</sub> , B <sub>2</sub> , C <sub>1</sub> und D <sub>2</sub> = $\frac{3}{2} \frac{a}{r}$ Für A <sub>2</sub> , B <sub>1</sub> , C <sub>2</sub> und D <sub>1</sub> = $\frac{a}{2r}$	+1,31 -0,89	+0,176 -0,302

Tabelle III. Dreiphasenleitungen.

Induktionskoeffizient einer einzelnen Leitung (Phase).

$$L = \frac{l_k}{10^4} (0,5 + 4,6 \log x), \quad \text{oder für } b = a \quad L = \frac{l_k}{10^4} \left( y + 4,6 \log \frac{a}{r} \right)$$

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z
1		Für A und C = $\frac{a\sqrt{2}}{r}$ Für B = $\frac{a}{r}$	Für A und C = + 1,19 „ B = + 0,5	+ 0,15 0
2		$\frac{a}{r}$	+ 0,5	0
3		Für A <sub>1</sub> und A <sub>2</sub> = $\frac{a}{rb} \sqrt{a^4 + a^2 b^2 + b^4}$ Für B <sub>1</sub> und C <sub>2</sub> = $\frac{a}{rb} \sqrt{a + b} \cdot \sqrt{a^2 + ab + b^2}$ Für C <sub>1</sub> und B <sub>2</sub> = $\frac{a}{rb} \sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a^2 - ab + b^2}$	—	—
4		Für A <sub>1</sub> , A <sub>2</sub> , C <sub>1</sub> , C <sub>2</sub> = $\frac{b}{ra} \sqrt{2cd}$ Für B <sub>1</sub> B <sub>2</sub> = $\frac{bc}{ra}$	+ 2,34 + 1,19	+ 0,4 + 0,15



Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y.	z
5		<p>Für <math>A_1, A_2, C_1, C_2 = \frac{b}{rd} \sqrt{2ac}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{bc}{ra}</math></p>	<p>- 0,07</p> <p>+ 1,19</p>	<p>- 0,125</p> <p>+ 0,15</p>
6		<p>Für <math>A_1 C_2 = \frac{b}{ra} \sqrt{2cd}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{c}{a}}</math></p> <p>Für <math>C_1 A_2 = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{2c}{a}}</math></p>	<p>+ 2,71</p> <p>+ 1,05</p> <p>+ 1,74</p>	<p>+ 0,48</p> <p>+ 0,12</p> <p>+ 0,27</p>
7		<p>Für <math>A_1 B_2 = \frac{b}{rc} \sqrt{ad}</math></p> <p>Für <math>B_1 A_2 = \frac{ab}{rc}</math></p> <p>Für <math>C_1 C_2 = \frac{ab}{rc} \sqrt{2}</math></p>	<p>+ 1,07</p> <p>- 0,59</p> <p>+ 0,10</p>	<p>+ 0,124</p> <p>- 0,237</p> <p>- 0,087</p>
8		<p>—</p>	<p>Für <math>A_1 A_2 C_1 C_2 = + 2,29</math></p> <p><math>B_1 B_2 = + 0,21</math></p>	<p>+ 0,39</p> <p>- 0,063</p>
9		<p>—</p>	<p>+ 0,21</p>	<p>- 0,063</p>

10		—	+ 0,21	— 0,063
11		<p>Für <math>A_1 C_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sqrt{(2a+b)d}}{(a+b)}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{cd}</math></p> <p>Für <math>A_2 C_1 = \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{bc}</math></p>	+ 1,18	+ 0,148
12		<p>Für <math>A_1 A_2 = \frac{a}{r(2a+b)} \cdot \sqrt{(a+b)d}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{cd}</math></p> <p>Für <math>C_1 C_2 = \frac{a}{rb} \sqrt{(a+b)c}</math></p>	— 0,03	— 0,115
13		<p>Für <math>A_1 A_2 C_1 C_2 = \frac{a}{rb} \sqrt{cd}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{ad}{re}</math></p>	+ 1,5	+ 0,22
14		<p>Für <math>A_1 A_2 C_1 C_2 = \frac{a}{rc} \sqrt{bd}</math></p> <p>Für <math>B_1 B_2 = \frac{ad}{re}</math></p>	+ 0,47	— 0,01