

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 26 (1935)
Heft: 15

Artikel: Vergleich der Erwärmung von blanken und isolierten zylindrischen Leitern
Autor: Brügger, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1060320>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

kunden wieder ein, so dass nur der defekte Strang ausfällt.

Es ist nun nicht notwendig, dass alle Transformatorstationen einer Stadt in den Ring einbezogen werden; denn solche können auch nach Fig. 5 angeschlossen werden. Sie sind auch so von zwei Seiten an den Ring angeschlossen und erhalten wie die Stationen des Hauptringes den Ein- oder Ausschaltbefehl von zwei Seiten.

Die halbnächtige Beleuchtung ist, wie aus Fig. 1 hervorgeht, unter Zwischenschaltung einer Schaltuhr, die das Ablöschen zu irgendeinem vorgesehenen, von der ganznächtigen Beleuchtung jedoch unabhängigen Zeitpunkt vornimmt, an einen andern Pol des Schützes angeschlossen. Selbstverständlich kann das Schütz auch dreipolig vorgesehen werden und weitere Beleuchtungsstränge können an den dritten Pol, d. h. an eine andere Phase angeschlossen werden, so dass sich die Belastung auf alle 3 Phasen des Drehstromnetzes verteilen lässt.

Zur Kontrolle der gesamten Einrichtung ist noch der Einbau eines Störungsregistrierapparates 10 vorgesehen. Dessen Aufgabe besteht darin, die Störungen im Strassenbeleuchtungsnetz graphisch

aufzuzeichnen. Jedesmal, wenn das Kommando nicht normal durch das gesamte Netz durchgegeben wurde, spricht das Verzögerungsrelais an und der Registrierapparat zeigt einen Ausschlag. Es ist dann Aufgabe des Werkes, sofort der Störung nachzugehen und sie zu beheben.

4. Schlussbetrachtungen.

Die beschriebene Einrichtung dürfte für viele Fälle die zweckmässigste und auch die billigste sein; denn jede Einrichtung mit Steuerdrähten, überlagerter Tonfrequenz usw. hat viel grössere Ausgaben zur Folge.

Es ist selbstverständlich, dass solche Steuerungen auch für die normale, friedensmässige Einschaltung der Strassenbeleuchtung verwendet werden müssen, wenn diese im Falle eines Luftangriffes bereit sein und betriebssicher funktionieren sollen.

Ist für die friedensmässige Einschaltung der Schaltschritt infolge der zu erwartenden plötzlichen Belastungssteigerung durch die Strassenbeleuchtung zu gross, was in grossen Städten der Fall sein dürfte, so kann derselbe durch Zwischenschaltung von Verzögerungsrelais in die Schützenstromkreise auf ein erträgliches Mass vermindert werden.

Vergleich der Erwärmung von blanken und isolierten zylindrischen Leitern.

Von W. Brügger, Wettingen.

621.3.017.7: 621.315.5

An Hand einfacher Ableitungen wird der Beweis erbracht, dass unter bestimmten Voraussetzungen ein isolierter Leiter bei gleicher Strombelastung weniger warm wird als der gleiche Leiter blank. Ferner werden aus den aufgestellten Funktionen die markanten Punkte, die für die Praxis von Wichtigkeit sind, in Gleichungsform herausgezogen und mit deren Hilfe Kurventafeln aufgestellt.

A l'aide de développements simples, l'auteur prouve que, sous certaines conditions, un conducteur isolé s'échauffe moins qu'un conducteur de même section parcouru par un courant de même intensité. Des fonctions établies, il extrait ensuite sous forme d'équations les principales relations qui jouent un rôle dans la pratique et dresse des diagrammes à l'aide de ces équations.

In der Elektrotechnik und besonders im Apparatbau ist die Verwendung von isolierten Leitern ebenso häufig wie diejenige von blanken Leitern. In Konstrukteurenkreisen ist man allgemein der Auffassung, dass ein isolierter Leiter für gleiche Ubertemperatur im Metall immer weniger belastet werden könne als der gleiche Leiter mit blanker Oberfläche. Diese Auffassung, so selbstverständlich sie bei oberflächlicher Betrachtung auch scheinen mag, stimmt aber nicht unter allen Umständen mit der Wirklichkeit überein. Es kommt im Gegenteil sehr oft vor, dass ein isolierter Leiter für gleiche Ubertemperatur mehr belastet werden kann als der gleiche Leiter blank, oder bei gleicher Belastung eine kleinere Ubertemperatur aufweist. Wenn wir die Aufgabe näher betrachten, so erkennen wir, dass das aufgewickelte Isoliermaterial wohl einen zusätzlichen thermischen Widerstand darstellt; wir sehen aber auch, dass der äussere Durchmesser und somit die wärmeabgebende Oberfläche des isolierten Leiters grösser ist als beim blanken Leiter, was eine Verkleinerung des thermischen Widerstandes

von der Leiteroberfläche an die Umgebung zur Folge hat. Je nachdem nun der thermische Widerstand im Isoliermaterial grösser oder kleiner ist als die Aenderung des thermischen Widerstandes von der Leiteroberfläche an die Umgebung, so ist der gesamte thermische Widerstand des isolierten Leiters grösser oder kleiner als derjenige des blanken Leiters.

Obwohl ein blanker Leiter ohne Schaden auf höhere Temperaturen erwärmt werden dürfte als ein isolierter Leiter, ist der Vergleich der zulässigen Belastungen für gleiche Ubertemperaturen dennoch am Platze, weil zu hohe Ubertemperatur den Uebergangswiderstand eines angrenzenden Kontaktes durch Begünstigung der Oxydbildung an den Kontaktflächen zu sehr vergrössern würde. Aus diesem Grunde begrenzen verschiedene Landesvorschriften die zulässige Ubertemperatur von Schienen und Schaltstücken auf $\vartheta = 35^\circ \text{C}$.

In den nachstehenden Gleichungen bedeuten:

Q = Wärmemenge in Watt · Sekunde ($\text{W} \cdot \text{s}$).
 P = Wärmestrom in Watt (W).

r = Radius in cm.
 d = Durchmesser in cm.
 δ = Radialer Isolationsauftrag in cm.
 L = Länge des Zylinders in cm.
 F = Oberfläche des Zylinders in cm².
 Θ = Temperatur in ° C.
 ϑ = Uebertemperatur in ° C.
 t = Zeit in s.
 λ = Wärmeleitzahl in Watt/cm²·° C.
 k = spez. Wärme in W·s/cm³·° C.
 α = Wärmeübergangszahl in W/cm²·° C.
 R_t = thermischer Widerstand in ° C/W.

Der thermische Widerstand ist diejenige Grösse, welche man durch Division des Temperaturgefälles durch den Wärmestrom erhält.

Bei der Bestimmung des thermischen Widerstandes eines Hohlzylinders gehen wir von der Voraussetzung aus, dass die Wärme nur in radialer Richtung fliesse. Wir betrachten einen kleinen Hohlzylinder vom Radius r , der Wandstärke dr , der Länge dL . In der Zeit dt tritt dann folgende Wärmemenge durch die innere Fläche ein:

$$dQ_1 = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dL \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot dt$$

Die durch die äussere Fläche dieses Hohlzylinders austretende Wärmemenge beträgt:

$$\begin{aligned} dQ_2 &= -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r + dr) \cdot dL \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot dr \right) \cdot dt \\ &= -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dL \cdot dt \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot dr \right) \\ &\quad - \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot dr \cdot dL \cdot dt \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot dr \right) \end{aligned}$$

Die Wärmeaufnahme, bzw. Wärmeabgabe dieses Zylinderelementes beträgt:

$$dQ_1 - dQ_2 = \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot dL \cdot dt \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot r \cdot dr + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot dr^2 \right)$$

Das Glied $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot dr^2$ kann wegen seiner Grössenordnung gegenüber den andern beiden vernachlässigt werden; wir erhalten:

$$dQ_1 - dQ_2 = \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot dr \cdot dL \cdot dt \cdot \left(r \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)$$

Die Wärmeaufnahme lässt sich aber auch durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$dQ_1 - dQ_2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dL \cdot k \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} \cdot dt$$

Setzt man diese beiden letzten Gleichungen einander gleich, so ist:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{k} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)$$

Wenn der stationäre Zustand erreicht ist, wird $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$; der Temperaturverlauf in Funktion des Radius ergibt sich dann aus folgender Gleichung:

$$\frac{d^2 \Theta}{dr^2} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\Theta}{dr}, \text{ wir setzen } \frac{d\Theta}{dr} = x,$$

dann folgt:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dr}{r}:$$

$$\ln x = -\ln r + \ln A; x \cdot r = A$$

Für x den Wert $\frac{d\Theta}{dr}$ wieder eingesetzt, ergibt:

$$r \cdot \frac{d\Theta}{dr} = A; \Theta = \int A \cdot \frac{dr}{r} = A \cdot \ln r + B.$$

Allgemein gilt:

$$P = -2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot r \cdot \frac{d\Theta}{dr} = -2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot A.$$

Daraus folgt:

$$A = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}$$

$$\Theta = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \ln r + B.$$

Für $r = r_a$ ist

$$\Theta = \Theta_a = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln r_a + B$$

Für $r = r_i$ ist

$$\Theta = \Theta_i = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln r_i + B$$

Das gesamte Temperaturgefälle in der Zylinderwand ist

$$\vartheta_z = \Theta_i - \Theta_a$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir dann:

$$\vartheta_z = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Setzen wir, ähnlich wie beim Ohmschen Gesetz:

$$\frac{\vartheta}{P} = R_t, \text{ so folgt:}$$

$$R_{tz} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (1)$$

Man rechnet den thermischen Widerstand von der Oberfläche eines Körpers an die Umgebung nach folgender Gleichung:

$$R_{t0} = \frac{1}{\alpha \cdot F} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \alpha} \quad (2)$$

Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) erhält man den gesamten thermischen Widerstand des isolierten Zylinders zu:

$$R_t = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_a \cdot L \cdot \alpha} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \text{C/W} \quad (3)$$

Die Wärmeübergangszahl α schliesst die Wärmeabgabe durch Strahlung und durch Konvektion in sich; die Intensität der Strahlung ist eine Funktion des Oberflächenzustandes; rauhe, schwarze Flächen strahlen mehr Wärme aus als polierte Flächen. Für unsere Untersuchung kann angenommen werden, dass die Strahlungsintensität von oxydierten Kupferflächen gleich derjenigen der Oberflächen der üblichen Isoliermaterialien ist. Die Wärmeabgabe durch Konvektion dagegen hängt ab vom Kühlmittel, von der Grösse und Form der Kühlfläche, d. h. von der Lage und Grösse der ebenen Wand, bzw. von der Grösse des Durchmessers bei zylindrischen Flächen, von der Uebertemperatur und von der Geschwindigkeit des Kühlmittels relativ zur Kühlfläche. Im Zusammenhang mit unserer Untersuchung bleiben alle diese Faktoren unverändert, mit Ausnahme des Durchmessers, welcher eine Funktion der Isolationsstärke ist. Da dieser Einfluss von einem bestimmten Durchmesser an aufwärts klein ist, unterteilen wir unsere Untersuchung in zwei Gruppen:

- A. Die Wärmeübergangszahl α wird als konstant angenommen.
- B. Die Abhängigkeit der Uebergangszahl α vom äusseren Durchmesser des Leiters wird berücksichtigt.

A. Die Wärmeübergangszahl α sei konstant.

Da in der Elektrotechnik allgemein mit der Grösse «Durchmesser» operiert wird, soll in den folgenden Gleichungen r durch

d = Durchmesser des blanken Leiters in cm, und r_a durch

d_a = Aussendurchmesser des isolierten Leiters in cm ersetzt werden. Berücksichtigt man, dass der Aussendurchmesser des Rohres

$$d_a = d + 2\delta \text{ ist, wo}$$

$$\delta = \text{radialer Isolationsauftrag in cm,}$$

so erhalten wir für den gesamten thermischen Widerstand eines isolierten Rohres die Gleichung:

$$R_t = \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot (d + 2\delta)} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \left(\frac{d + 2\delta}{d} \right) \quad \text{C/W} \quad (4)$$

Wir untersuchen folgende Fragen:

1. Kann der thermische Widerstand des isolierten Leiters überhaupt kleiner sein als derjenige des nicht isolierten Leiters?

Dies ist die wichtigste Frage unseres Aufsatzes. Hierüber gibt uns der Differentialquotient $\frac{dR_t}{d\delta}$ für

$\delta = 0$ Aufschluss, denn ein bestimmter Isolationsauftrag vergrössert die Oberfläche, mit andern Worten, verkleinert den thermischen Widerstand prozentual um so mehr, je kleiner der innere Radius ist, also am meisten, wenn auf einen gegebenen Leiter noch keine Isolation aufgetragen ist. Durch Differentiation der Gl. (4) nach δ erhalten wir:

$$\frac{dR_t}{d\delta} = -\frac{2}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot (d + 2\delta)^2} + \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot (d + 2\delta)}$$

und für $\delta = 0$

$$\left(\frac{dR_t}{d\delta} \right)_{\delta=0} = -\frac{2}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d^2} + \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot d}$$

Aus dieser Gleichung ziehen wir folgende Schlüsse:

- a) Wenn der Differentialquotient positiv ist, also $\frac{\lambda}{\alpha} < \frac{d}{2}$, so ist der thermische Widerstand des isolierten Leiters für jeden beliebigen Wert von δ grösser als derjenige des blanken Leiters. Diese Bedingung ist um so eher erfüllt, je grösser der Durchmesser des Leiters ist.
- b) Wenn der Differentialquotient 0 ist, also $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{d}{2}$ dann ändert der thermische Widerstand bei kleinem Isolationsauftrag praktisch nicht.
- c) Wenn der Differentialquotient negativ ist, $\frac{\lambda}{\alpha} > \frac{d}{2}$, dann nimmt der thermische Widerstand mit dem Isolationsauftrag δ ab, und zwar so lange, bis $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{d}{2} + \delta$ wird, was ohne weiteres aus der Gleichung des allgemeinen Differentialquotienten ersichtlich ist. Diese Bedingung ist leicht möglich für kleine Durchmesser d , kleine Wärmeübergangszahlen α oder schliesslich grosse Wärmeleitfähigkeiten λ des verwendeten Isoliermaterials.

2. Bestimmung des Isolationsauftrages δ , bei welchem der thermische Widerstand ein Minimum ist.

Nachdem wir erkannt haben, dass durch das Isolieren eines Leiters sein thermischer Widerstand tatsächlich verkleinert werden kann, taucht die Frage auf, bei welchem Isolationsauftrag δ dieser Widerstand ein Minimum wird. Nun wissen wir aber, dass eine Funktion dann ihren Minimalwert hat, wenn der erste Differentialquotient 0 und der zweite Differentialquotient positiv ist, also

$$\frac{dR_t}{d\delta} = \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot (d + 2\delta)} - \frac{2}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot (d + 2\delta)^2} = 0$$

Daraus folgt:

$$\lambda = \alpha \left(\frac{d + 2\delta}{2} \right)$$

$$\frac{d^2R_t}{d\delta^2} = \frac{8}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot (d + 2\delta)^3} - \frac{2}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot (d + 2\delta)^2}$$

Setzt man für λ den oben erhaltenen Wert ein, so folgt:

$$\frac{d^2 R_t}{d \delta^2} = \frac{8}{\pi \cdot L \cdot \alpha (d + 2 \delta)^3} - \frac{4}{\pi \cdot L \cdot \alpha (d + 2 \delta)^3} = \text{positiv.}$$

Da der Isolationsauftrag immer positiv sein muss, erkennt man ohne weiteres, dass der obige Ausdruck nur positiv sein kann (denn $1 - \frac{1}{2} = + \frac{1}{2}$). Um den minimalen thermischen Widerstand zu erhalten, genügt es somit, den Isolationsauftrag

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{d}{2} \tag{5}$$

zu machen.

3. Bestimmung des Isolationsauftrages, bei welchem der thermische Widerstand wieder gleich gross ist wie beim blanken Leiter.

Bei den meisten praktischen Aufgaben sind das Isolationsmaterial und die Isolationsstärke δ durch die Spannung gegeben; meistens kennt man auch die zulässige Strombelastung des in Frage kommenden blanken Leiters. Unbekannt ist dagegen die zulässige Strombelastung des isolierten Leiters, und der Konstrukteur muss in erster Linie wissen, ob der vorgesehene Leiter zu reichlich oder zu knapp ist. Wir wollen nun die Isolationsstärke δ_{max} bestimmen, bei welcher der thermische Widerstand des isolierten Leiters gleich gross ist wie derjenige des blanken Leiters; wenn dann im einzelnen praktischen Falle die Isolationsschicht dünner ist als δ_{max} , so weiss der Konstrukteur, dass der isolierte Leiter mehr belastet werden darf als der blanke, mit andern Worten, dass er keine zu hohen Erwärmungen zu befürchten hat, da dem isolierten Leiter beim ersten Entwurf höchstens die zulässige Stromstärke des blanken Leiters zugemutet wird. Ist der Isolationsauftrag grösser als δ_{max} , so wird bei gleicher Belastung der isolierte Leiter wärmer als der blanke. Wenn man genau wissen will, wie warm der isolierte Leiter wird, so muss man den thermischen Widerstand nach Gl. (4) rechnen und diesen Wert mit den Ohmschen Verlusten im Leiter multiplizieren. Für unsere Untersuchung setzen wir:

$$R_{t \text{ blank}} = R_{t \text{ isoliert}}$$

$$\frac{1}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d} = \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \alpha (d + 2 \delta_{max})} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{(d + 2 \delta_{max})}{d}$$

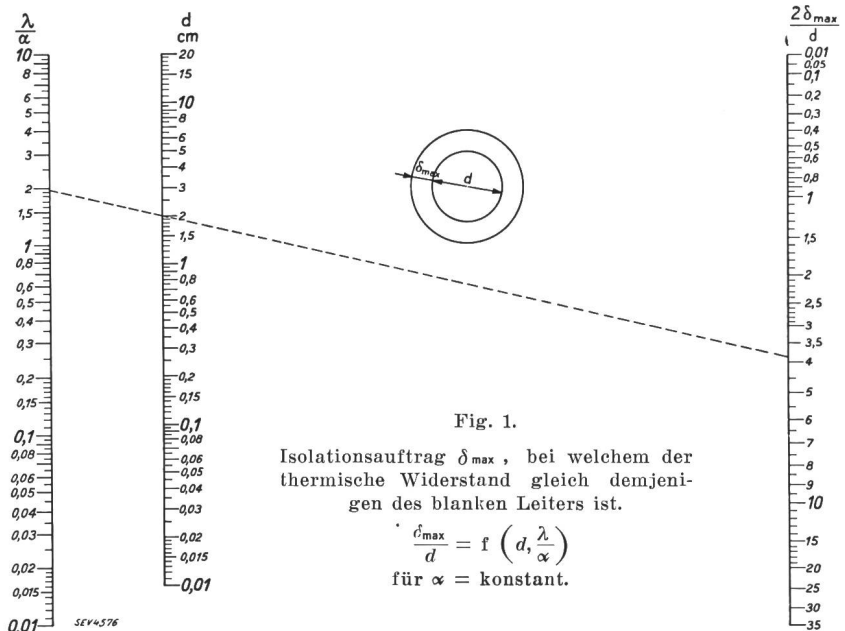
Nach einiger Umformung ergibt sich:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{d}{2 \delta_{max}} \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \delta_{max}}{d} \right) \tag{6}$$

Diese Gleichung ist sehr kompliziert zu handhaben und gestattet vor allem nicht, δ_{max} allein auf eine Seite zu bekommen. Sie erlaubt dagegen die Aufstellung des Nomogrammes Fig. 1 mit den Veränderlichen $\frac{\lambda}{\alpha}$; d ; $\frac{2 \delta_{max}}{d}$. Wenn der Durchmesser des Leiters d , die Wärmeleitzahl λ des Isoliermaterials und die Wärmeübergangszahl α bekannt sind, gestattet dieses Nomogramm eine sehr bequeme Bestimmung von $\frac{2 \delta_{max}}{d}$ und durch Multiplikation dieses Wertes mit $\frac{d}{2}$ erhält man dann die Isolationsdicke δ_{max} .

B. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom äusseren Durchmesser des Leiters wird berücksichtigt.

Die Gleichung, welche die Wärmeübergangszahl in Funktion des äusseren Durchmessers angibt, ist



sehr kompliziert. Wenn wir uns dagegen auf Leiterdimensionen von $d \geq 0,1$ cm beschränken, was besonders im Zusammenhang mit unserer Untersuchung ohne weiteres zulässig ist, so ergibt folgende Formel sehr befriedigende Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit:

$$\alpha = \text{konst.} \cdot \left(\frac{d + a}{d} \right) \tag{7}$$

$a = 0,2$, wenn d in cm eingesetzt ist. Die Wärmeübergangszahl α_i des isolierten Leiters beträgt somit:

$$\alpha_i = \alpha \cdot \frac{(d + 2 \delta + 0,2) \cdot d}{(d + 0,2) \cdot (d + 2 \delta)}$$

wenn α die Wärmeübergangszahl des blanken Leiters ist. Die Gleichung für den thermischen Widerstand lautet dann:

$$R_t = \frac{(d + 0,2)}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot (d + 2 \delta + 0,2) \cdot d} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \left(\frac{d + 2 \delta}{d} \right) \text{ C/W} \quad (8)$$

Der erste Differentialquotient wird:

$$\frac{dR_t}{d\delta} = -\frac{2 \cdot (d + 0,2)}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d \cdot (d + 2 \delta + 0,2)^2} + \frac{1}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot (d + 2 \delta)}$$

und der zweite Differentialquotient:

$$\frac{d^2 R_t}{d \delta^2} = \frac{8 (d + 0,2)}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d \cdot (d + 2 \delta + 0,2)^3} - \frac{2}{\pi \cdot L \cdot \lambda \cdot (d + 2 \delta)^2}$$

Der thermische Widerstand hat nach früher Gesagtem seinen Minimalwert, wenn $\frac{dR_t}{d\delta} = 0$ und $\frac{d^2 R_t}{d \delta^2} = \text{positiv}$ ist. Aus der ersten Bedingung folgt nach einiger Umformung:

$$\lambda = \alpha \frac{d \cdot (d + 2 \delta + 0,2)^2}{2 \cdot (d + 2 \delta) \cdot (d + 0,2)} \quad (9)$$

Wir setzen diesen Wert für λ in die Gleichung des zweiten Differentialquotienten ein und erhalten:

$$\frac{d^2 R_t}{d \delta^2} = \frac{8 (d + 0,2)}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d \cdot (d + 2 \delta + 0,2)^3} - \frac{4 (d + 0,2)}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d \cdot (d + 2 \delta + 0,2)^2 \cdot (d + 2 \delta)}$$

Diese Gleichung ist positiv, solange $(d + 2 \delta) > 0,2$ ist; daraus folgt, dass Gl. (9) das Kriterium für den minimalen thermischen Widerstand ist für äussere Leiterdurchmesser bis zu 0,2 cm hinunter.

Für die Bestimmung des Isolationsauftrages δ_{max} , bei welchem der thermische Widerstand gleich gross ist wie derjenige des blanken Leiters, setzen wir wieder:

$$R_{t \text{ blank}} = R_{t \text{ isoliert}}$$

$$\frac{1}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d} = \frac{d + 0,2}{\pi \cdot L \cdot \alpha \cdot d \cdot (d + 2 \delta_{max} + 0,2)} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \delta_{max}}{d} \right)$$

Daraus ergibt sich nach einiger Umformung:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{d}{4 \delta_{max}} \cdot (d + 2 \delta_{max} + 0,2) \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \delta_{max}}{d} \right) \quad (10)$$

Diese Funktion ist in Kurventafel Fig. 2 dargestellt; dort kann für beliebigen Wert des Durchmessers d des blanken Leiters, der Wärmeübergangszahl α und der Wärmeleitzahl λ der Isolationsauftrag δ_{max} abgelesen werden.

Gl. (6) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{d}{4 \delta_{max}} \cdot (d + 2 \delta_{max}) \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \delta_{max}}{d} \right) \quad (6)$$

Wenn wir Gl. (10) und Gl. (6) in dieser Form miteinander vergleichen, so erkennen wir, dass für einen äusseren Durchmesser von $(d + 2 \delta_{max}) \geq 2 \text{ cm}$, die Werte $\frac{\lambda}{\alpha}$, welche sich aus diesen Gleichungen ergeben, weniger als 10 % voneinander abweichen. Die Rechnung nach der einfacheren Gl. (6), bzw.

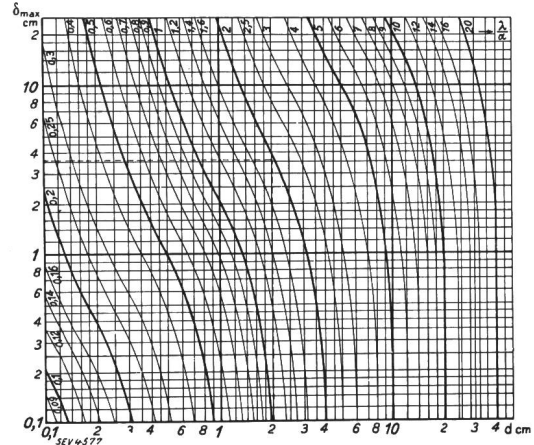


Fig. 2.

Isolationsauftrag δ_{max} , bei welchem der thermische Widerstand gleich demjenigen des blanken Leiters ist,

$$\delta_{max} = f \left(d, \frac{\lambda}{\alpha} \right)$$

für $\alpha = \text{veränderlich mit dem Durchmesser } d$

nach dem Nomogramm Fig. 1 ist in solchen Fällen ohne weiteres zulässig, wenn man bedenkt, dass die Ungenauigkeit der Werte λ und α oft grösser als 10 % ist.

In nachstehenden Tabellen sei noch die Wärmeübergangszahl α für einige Leiterdurchmesser und die Wärmeleitzahl λ für einige Isoliermaterialien angegeben.

Wärmeübergangszahlen α
in ruhender Luft für eine
Übertemperatur von
 $\delta = 30^\circ \text{ C}$.

Tabelle I.

Leiter-Durchmesser in cm	α W/cm ² · °C
0,01	0,0135
0,02	0,0086
0,05	0,0048
0,1	0,0033
0,2	0,0024
0,5	0,0017
1	0,0014
2	0,00127
5	0,0011
10	0,00105
100	0,0010

Wärmeleitzahlen.

Tabelle II.

Material	λ W/cm · °C
Baumwolle trocken	0,0007
„ impräg.	0,0015
(od. in Oel)	
Seide trocken . . .	0,0006
„ imprägniert	0,0014
Papier	0,0013
Pressspan	0,002
Bituba	0,0025
Glimmer	0,0036
Asbest	0,0019
Porzellan	0,01
Luft kalt	0,00025

C. Bestimmung der zulässigen Strombelastung von Leitern.

Analog wie beim Ohmschen Gesetz gilt für die Wärmeströmung: Uebertemperatur = Wärmestrom \times thermischer Widerstand

$$\vartheta = P \cdot R_t \text{ } ^\circ\text{C} \quad (11)$$

Die Jouleschen Verluste des Leiters rechnet man nach der Gleichung

$$P = I^2 \cdot \frac{\rho \cdot L}{q} \text{ W} \quad (L \text{ in m; } q \text{ in mm}^2)$$

daraus folgt:

$$\vartheta = I^2 \cdot \frac{\rho \cdot L}{q} \cdot R_t \text{ } ^\circ\text{C} \quad (12)$$

und

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta \cdot q}{\rho \cdot L \cdot R_t}} \text{ A} \quad (13)$$

Wenn die zulässige Strombelastung des blanken Leiters bekannt ist, so kann für gleiche Uebertemperatur diejenige des isolierten Leiters nach folgender Gleichung gerechnet werden:

$$I_{\text{isoliert}} = I_{\text{blank}} \cdot \sqrt{\frac{R_{t \text{ blank}}}{R_{t \text{ isoliert}}}} \text{ A} \quad (14)$$

Beispiel.

Man bestimme den thermischen Widerstand eines isolierten Kupferbolzens mit folgenden Daten:

- Durchmesser des blanken Bolzens $d = 2 \text{ cm}$
- Radialer Isolationsauftrag . $\delta = 1 \text{ cm}$
- Aeusserer Durchmesser des isolierten Bolzens . . . $d_a = d + 2\delta = 4 \text{ cm}$
- Länge des Bolzens $L = 60 \text{ cm}$
- Wärmeleitzahl von Bituba nach Tabelle II $\lambda = 0,0025$
- Wärmeübergangszahl für $d = 2 \text{ cm}$ nach Tabelle I . $\alpha = 0,00127$
- Wärmeübergangszahl für $d_a = 4 \text{ cm}$ (interpol.) . . . $\alpha = 0,00115$

Man bestimme:

1. die zulässige Strombelastung des blanken und des isolierten Bolzens für eine Uebertemperatur von $\vartheta = 30^\circ \text{ C}$;
2. den minimalen thermischen Widerstand und den zugehörigen Isolationsauftrag;
3. den Isolationsauftrag, bei welchem blanker und isolierter Bolzen gleich stark belastbar sind.

1. Thermischer Widerstand des blanken Leiters nach Gl. (1) ($2r = d$)

$$R_{t \text{ blank}} = \frac{1}{\pi \cdot d \cdot L \cdot \alpha} = \frac{1}{\pi \cdot 2 \cdot 60 \cdot 0,00127} = 2,09 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Nach Gl. (13) beträgt der zulässige Strom des blanken Bolzens:

$$I_{\text{blank}} = \sqrt{\frac{\vartheta \cdot q}{\rho \cdot L \cdot R_t}} = \sqrt{\frac{30 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2}{0,02 \cdot 0,6 \cdot 2,09}} = 613 \text{ A.}$$

Der thermische Widerstand des isolierten Leiters beträgt nach Gl. (8)

$$R_{t \text{ isoliert}} = \frac{2,2}{\pi \cdot 60 \cdot 0,00127 \cdot (2 + 2 + 0,2) \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 0,0025} \cdot \ln \frac{4}{2} = 1,83 \text{ } ^\circ\text{C/W.}$$

Den zulässigen Strom des isolierten Leiters rechnet man nach Gl. (14) zu:

$$I_{\text{isoliert}} = I_{\text{blank}} \cdot \sqrt{\frac{R_{t \text{ blank}}}{R_{t \text{ isoliert}}}} = 613 \cdot \sqrt{\frac{2,09}{1,83}} = 655 \text{ A.}$$

2. Unter der Annahme, dass α konstant bleibt, erhalten wir nach Gl. (5) für den minimalen thermischen Widerstand eine Isolationsstärke:

$$\delta = \frac{0,0025}{0,00127} - 1 = 0,97 \text{ cm.}$$

Berücksichtigt man die Abhängigkeit des Wertes α vom Durchmesser, so folgt nach Gl. (9)

$$\frac{0,0025}{0,00127} = \frac{2 \cdot (2 + 2\delta + 0,2)^2}{2 \cdot (2 + 2\delta) \cdot 2,2}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir:

$$\delta = 1 \text{ cm.}$$

Beide Berechnungsarten ergeben also praktisch den gleichen Wert. Zufälligerweise ist dies gerade der vorgesehene Isolationsauftrag, so dass der minimale thermische Widerstand

$$R_{t \text{ min}} = 1,83^\circ \text{ C/W}$$

beträgt.

3. Unter der Annahme, dass α konstant bleibt, gibt das Nomogramm Fig. 1 für $\frac{\lambda}{\alpha} = 1,97$ und $d = 2 \text{ cm}$ den Wert

$$\frac{2 \delta_{\text{max}}}{d} = \text{ca. } 3,8, \text{ so dass } \delta_{\text{max}} = 3,8 \text{ cm.}$$

Aus Kurvenblatt Fig. 2 erhalten wir $\delta_{\text{max}} = 3,6 \text{ cm}$.

Beide Berechnungsmethoden geben somit wenig verschiedene Resultate.

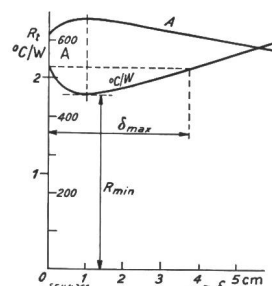


Fig. 3.

Thermischer Widerstand und zulässiger Strom eines Leiters von 2 cm Durchmesser und 60 cm Länge in Funktion des Isolationsauftrages δ .

In Fig. 3 sind für einen Bolzen von 2 cm Durchmesser der thermische Widerstand und der zulässige Belastungsstrom für $\vartheta = 30^\circ \text{ C}$ in Funktion des Isolationsauftrages δ wiedergegeben.