

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 33 (1942)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Berechnung der kapazitiven Anfangs-Spannungsverteilung im Innern einer Transformatorwicklung beim Ankommen einer rechteckigen Stosswelle  
**Autor:** Waldvogel, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1061634>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

REDAKTION:

Sekretariat des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
Zürich 8, Seefeldstrasse 301

ADMINISTRATION:

Zürich, Stauffacherquai 36 ♦ Telefon 5 17 42  
Postcheck-Konto VIII 8481

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet

XXXIII. Jahrgang

N<sup>o</sup> 3

Mittwoch, 11. Februar 1942

**Berechnung der kapazitiven Anfangs-Spannungsverteilung im Innern einer Transformatorwicklung beim Ankommen einer rechteckigen Stossquelle**

Von P. Waldvogel, Baden.

621.3.015.34 : 621.314.21

Das Auftreffen einer rechteckigen Stossquelle auf eine Transformatorwicklung erzeugt im ersten Augenblick eine Spannungsverteilung, welche nach einer gewissen Zahl gedämpfter Hochfrequenzschwingungen in eine lineare Verteilung übergeht. Die Kenntnis dieser anfänglichen Spannungsverteilung allein ist schon wertvoll für die Wahl einer günstigen Wicklungsanordnung und eine richtige Bemessung der Windungsisolation. Es wird in dieser Studie eine Berechnungsmethode dieser anfänglichen Spannungsverteilung ausführlich beschrieben. Sie gilt ganz allgemein für sämtliche Mehrlagenwicklungen.

Bei unendlich steiler Wellenstirn wird sowohl an Hand von Kathodenoszillogrammen als auch infolge theoretischer Ueberlegungen allgemein angenommen, dass die anfängliche Spannungsverteilung rein kapazitiv ist. Für die rechnerische Behandlung dieses Problems hat man sich also jede Windung als einen getrennten, isolierten Leiter mit kapazitiver Kopplung gegen die anderen Leiter (in der axialen und in der radialen Richtung) und eventuell mit Kapazität gegen Erde vorzustellen, wobei eine bestimmte Spannung auf die Eingangswindung aufgedrückt ist, während die Ausgangswindung z. B. geerdet ist.

Die schönste mathematische Formulierung ergibt sich, wenn man die Anzahl Halbspulen als unendlich einsetzt, d. h. die Lage der Halbspulen mit einer laufenden Abszisse  $x$  in der axialen Richtung bestimmt und die Anzahl Lagen gleich  $m$  (endliche, ganze Zahl) setzt. Somit wird die Spannung sämtlicher Windungen einer beliebigen Lage  $p$  durch eine Funktion  $E_p(x)$  dargestellt.

Man hat also  $m$  Funktionen  $E_p(x)$  zu bestimmen.

Der physikalische Grundsatz, dass die Summe der zu jedem Leiter fliessenden Ladungen null ist, ergibt  $m$  simultane, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für deren Lösung man über eine ganz allgemeine Methode verfügt.

Die «Eigenwerte» erscheinen als die  $m$  Lösungen einer algebraischen Gleichung  $m^{\text{ten}}$  Grades, wenn man von den positiven Exponentialfunktionen absieht, die in unserem Problem keine Bedeutung haben; die  $m$  gesuchten Funktionen enthalten noch  $m$  Integrationskonstanten. Diese werden mit Hilfe eines Systems von  $m$  linearen algebraischen Gleichungen aus den Anfangsbedingungen, mit andern Worten aus den Ladungsgleichungen der  $m$  Windungen der ersten Halbspule bestimmt.

Die praktische Anwendung dieser Methode ist durchaus brauchbar, wenn man sich auf  $m = 3$  Lagen beschränkt. Sie gestattet, die sehr wichtige Wirkung einer isolierten benachbarten Wicklung rechnerisch zu erfassen; ein einfaches Näherungsverfahren, welches den Einfluss der Spulenverbindungen berücksichtigt, wird auch angegeben.

Der vollständige Berechnungsgang wird für die wichtigsten praktisch vorkommenden Fälle in 2 Graphiken angegeben; in weiteren Figuren sind die numerischen Rechnungsergebnisse für konkrete Beispiele zusammengestellt. Damit sollten die Unterlagen geschaffen sein, um von den bisher oft gebräuchlichen gefühlsmässigen Annahmen überhaupt Ab-

Lorsqu'une onde de tension d'allure rectangulaire arrive sur un enroulement de transformateur, la répartition du potentiel dans ce dernier devient linéaire après amortissement d'un certain nombre d'oscillations. La connaissance de la répartition initiale est en elle-même déjà précieuse tant pour choisir la disposition de l'enroulement que pour dimensionner l'isolation du fil. Cette étude décrit un procédé de calcul pour cette répartition initiale du potentiel. La méthode s'applique d'une façon générale à tous les enroulements à plusieurs couches.

Les essais effectués à l'oscillographe cathodique et les études théoriques ont établi que la répartition initiale des tensions se fait uniquement d'après les capacités lorsque le front de l'onde est infiniment raide. Pour traiter le problème par le calcul on doit donc se représenter chaque spire comme un conducteur isolé, possédant des capacités par rapport aux autres conducteurs (tant dans la direction axiale que dans la direction radiale) et éventuellement une capacité par rapport à la terre; une tension déterminée est appliquée à la spire d'entrée tandis que la spire de sortie est par exemple mise à la terre.

L'écriture est particulièrement simplifiée si l'on suppose le nombre de galettes infinies, c'est-à-dire si l'on définit la position des galettes dans le sens radial au moyen d'une abscisse  $x$  et le nombre de couches au moyen du nombre entier fini  $m$ . Dans ces conditions la tension de l'ensemble des spires appartenant à la couche  $p$  est représentée par une fonction  $E_p(x)$ .

On a par conséquent  $m$  fonctions  $E_p(x)$  à déterminer.

En écrivant la loi fondamentale, à savoir que la somme des charges déplacées vers un conducteur est nulle, on obtient  $m$  équations différentielles linéaires et simultanées du second ordre à coefficients constants, équations qu'on peut résoudre d'après une méthode générale.

Les «valeurs propres» apparaissent comme les  $m$  solutions d'une équation algébrique du  $m^{\text{ième}}$  degré, si l'on fait abstraction des exposants positifs et les  $m$  fonctions cherchées contiennent encore  $m$  constantes d'intégration. Ces dernières sont fournies par un système de  $m$  équations algébriques linéaires qui expriment elles-mêmes les conditions initiales, c'est-à-dire, les conditions qui existent dans les  $m$  spires de la première galette. L'application pratique de cette méthode ne présente aucune difficulté si l'on s'en tient à  $m = 3$  couches. Il est ainsi possible de tenir compte de l'influence fort importante d'un enroulement isolé voisin; une méthode approchée est également indiquée qui permet de tenir compte des connexions entre bobines. La marche à suivre pour le calcul est indiquée dans deux graphiques pour les principaux cas que l'on rencontre dans la pratique. D'autres figures résumant des calculs numériques effectués dans des cas concrets. Ainsi il doit être possible de s'affranchir définitivement des suppositions plus ou moins bien fondées, auxquelles on était obligé

stand nehmen zu können, so dass die Rechnung tatsächlich ein rein objektives Urteil über die Güte der betreffenden Wicklung ergibt.

Endlich wird der Entwurf eines elektrischen Modells angeregt, welches grundsätzlich aus einem bloss ohmschen Widerstände enthaltenden vermaschten Netz besteht. Die Knotenpunkte dieses Netzes spielen die Rolle der Leiter in der Wicklung, die Widerstände, oder besser ihre reziproken Werte, die Rolle der Kapazitäten. Zwischen «Eingangsknotenpunkt» und Erde wird eine gewisse Spannung gelegt und die in jedem Knotenpunkt mit einem Voltmeter messbare Spannung ergibt unmittelbar die von der entsprechenden Windung angenommene Spannung. Mit einem solchen Modell wäre es möglich, die kapazitive Spannungsverteilung einer Wicklung sehr rasch zu ermitteln, ohne an die sonst durch die mathematische Formulierung des Problems bedingten Einschränkungen gebunden zu sein.

Der Nachteil dieser Berechnungsmethode besteht darin, dass sie sich nur für regelmässige Wicklungsanordnungen eignet: sie ermöglicht z. B. nicht, den Einfluss von irgendwie unregelmässig angeordneten Eingangswindungen auf die Spannungsverteilung zu berücksichtigen. Aber gerade diese Einschränkung kann mit Hilfe des vorgeschlagenen elektrischen Modells behoben werden.

## I. Einleitung

Durch das Auftreffen einer elektrischen Wanderwelle auf eine Transformatorenwicklung werden Spannungs- und Stromeigenschwingungen erregt, welche die innere Wicklungsisolation in einer ganz andern Weise beanspruchen als dies während des Normalbetriebs der Fall ist. Die Kenntnis dieser Beanspruchung ist unentbehrlich, sowohl für eine geschickte Wicklungsanordnung, als auch für eine sinngemässe Bemessung der Drahtisolation.

Bei jedem Versuch einer rechnerischen Behandlung dieser Fragen wird man dazu geführt, zwischen der anfänglichen Spannungsverteilung und dem nachfolgenden, eigentlichen Schwingungsvorgang zu unterscheiden. Der erste Gesichtspunkt wird in dieser Studie allein berücksichtigt.

## II. Grundlegende Hypothese für die Berechnung der anfänglichen Spannungsverteilung

Es wird heute allgemein angenommen, dass im ersten Augenblick des Stosses die elektromagnetischen Vorgänge überhaupt noch nicht zustande kommen, so dass nur die elektrostatischen Vorgänge zu berücksichtigen sind.

Der Grund hiezu liegt in der Tatsache, dass sämtliche Leiterströme, die unmittelbar vor dem Ankommen des Stosses noch null waren, nicht plötzlich ansteigen können, ansonst unendlich hohe Spannungen induziert würden (in der mathematischen Sprache ausgedrückt: die Strom-Zeit-Funktionen  $i$  können keine Unstetigkeit aufweisen, wohl aber ihre zeitlichen Ableitungen  $\frac{di}{dt}$ ).

Die Messergebnisse, ob sie der Literatur entnommen sind oder durch unsere eigenen Versuche gewonnen wurden, bestätigen im allgemeinen diese Auffassung.

Es müssen immerhin in dieser Hinsicht gewisse Vorbehalte gemacht werden. Die obigen Ueber-

de recourir jusqu'ici et le calcul doit permettre un jugement absolument objectif sur la valeur de l'enroulement étudié.

Enfin l'auteur propose un modèle électrique qui est en principe constitué par un réseau maillé de résistances ohmiques. Les nœuds de ce réseau jouent le rôle des conducteurs de l'enroulement tandis que les résistances ou plus exactement les valeurs réciproques de ces dernières jouent le rôle des capacités.

Une tension déterminée est appliquée entre le nœud d'entrée et la terre, et la tension que l'on mesure au moyen d'un voltmètre en chaque autre nœud représente le potentiel pris par la spire correspondante. Un tel modèle devrait permettre de déterminer très rapidement la répartition du potentiel d'un enroulement d'après ses capacités et permettrait ainsi de s'affranchir des restrictions auxquelles est astreinte la solution analytique.

L'inconvénient de la méthode du calcul exposé réside dans le fait qu'elle ne s'applique qu'à des enroulements répartis uniformément: elle ne permet pas par exemple de tenir compte de l'influence des irrégularités, présentées par les spires d'entrées. Mais précisément cette restriction peut être levée au moyen du modèle électrique proposé.

legungen gelten genau nur dann, wenn man eine unendlich steile Welle berücksichtigt. Stellt man sich aber eine Wanderwelle mit etwa  $0,5 \mu\text{s}$  Frontdauer, also schon eine recht steile Welle, vor, so muss man sich stets bewusst sein, dass bei der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von etwa  $300\,000 \text{ km/s}$ <sup>1)</sup> die zugehörige Frontlänge immer noch  $150 \text{ m}$  beträgt. Es ist klar, dass diese Länge nicht ohne weiteres als «unendlich kurz» angesehen werden darf, wenn man sie mit den geometrischen Abmessungen der Transformatorwicklung vergleicht.

Bei Messungen, welche an verschiedenen Transformatoren durchgeführt wurden, hat man tatsächlich festgestellt, dass die magnetische Kopplung der Windungen auch im ersten Moment des Stosses einen merkbaren Einfluss ausüben kann.

Mit Sicherheit kann man also nur behaupten, dass die anfängliche Spannungsverteilung um so weniger von der rein kapazitiven abweicht, je steiler die ankommende Welle ist. Gerade die allersteilsten Wellen sind es aber, die uns hier in erster Linie interessieren, da sie die Wicklung am meisten gefährden.

Zusammenfassend beruht die Berechnung der anfänglichen Spannungsverteilung auf folgender Hypothese: Man denkt sich sämtliche Windungen, die auf einer Säule sitzen, an einer Stelle geöffnet, so dass sie unter sich keine metallische Verbindung mehr besitzen. Jede Windung ist dann als ein metallischer, leitender, von allen Seiten durch ein vollkommenes Dielektrikum (Papier, Baumwolle, Oel usw.) umhüllter Körper zu betrachten. Auf die Eingangswindung wird die volle Stoßspannung aufgedrückt, wodurch ein elektrostatisches Feld sich im Dielektrikum ausbildet und die einzelnen Windungen auf ein gewisses Potential bringt.

Bei dieser Vorstellung müssen aber die Windungs- bzw. Spulenverbindungen besonders beachtet werden. Ähnliche Ueberlegungen wie die über

<sup>1)</sup> Es ist jedoch zu betonen, dass der Begriff eines Wanderwellenvorganges durch die Seriikapazität der Wicklung stark beeinträchtigt ist.

die Frontsteilheit zeigen, dass beträchtliche Spannungsunterschiede zwischen zwei Drähten, welche durch eine kurze Verbindung zusammengeschlossen sind, nicht zustande kommen können, jedenfalls unter keinen Umständen dort, wo die Verbindung vorhanden ist. Man wird also dazu geführt, zwischen zwei Gebieten, die sich über den ganzen Säulenumfang verteilen, zu unterscheiden:

1. In einem ersten Gebiet, das sich möglichst weit von den Spulenverbindungen entfernt befindet, sind sämtliche Windungen als vollständig isoliert anzusehen.

2. In einem zweiten Gebiet, das sich in der Nähe der Spulenverbindungen befindet, sind die zugehörigen Windungen als direkt verbunden zu betrachten.

Die kapazitive Spannungsverteilung ist in jedem Gebiet zu berechnen.

### III. Allgemeine mathematische Lösung des Problems

Fig. 1 zeigt einen Schnitt durch eine Wicklung mit  $m$  Lagen und  $n$  Halbspulen. Es wird vorläufig angenommen, dass sämtliche andern Metallteile des Transformators starr geerdet sind, so dass die Feldlinien, die von der 1<sup>sten</sup> und der  $m$ <sup>ten</sup> Lage nach aussen gehen, direkt an Erde gelangen. Ferner wird der Einfluss der Verbindungen nicht berücksichtigt.

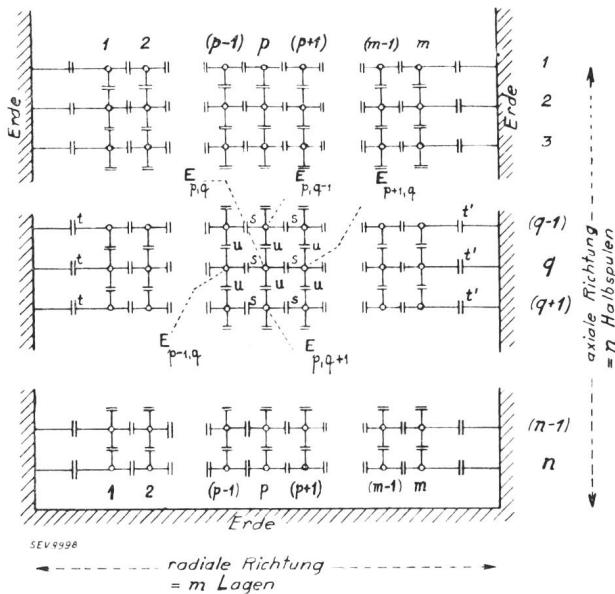


Fig. 1.  
Schematischer Schnitt einer Transformator-Wicklung mit  $m$  Lagen und  $n$  Halbspulen.

Die Spannung jeder Windung wird mit dem Symbol  $E$  bezeichnet, wobei zwei Indizes beigelegt werden, der erste für die Bezeichnung der Lage und der zweite für die Bezeichnung der Halbspule.

Ferner sei:

- $u$  die Kapazität zwischen zwei nachfolgenden Leitern der gleichen Lage,
- $s$  die Kapazität zwischen zwei nachfolgenden Leitern der gleichen Halbspule,

- $t$  die Kapazität zwischen einem Leiter der 1<sup>sten</sup> Lage und Erde,
- $t'$  die Kapazität zwischen einem Leiter der  $m$ <sup>ten</sup> Lage und Erde.

Die grundsätzliche Gleichung bekommt man indem man schreibt, dass die Summe der zu dem beliebigen Leiter  $p, q$  fließenden Ladungen null ist. Es wird somit:

$$u(E_{p,q-1} - E_{p,q}) + u(E_{p,q+1} - E_{p,q}) + s(E_{p-1,q} - E_{p,q}) + s(E_{p+1,q} - E_{p,q}) = 0$$

oder

$$(E_{p,q-1} - 2E_{p,q} + E_{p,q+1}) \cdot u + (E_{p-1,q} - 2E_{p,q} + E_{p+1,q}) \cdot s = 0 \quad (1)$$

für  $p = 2, 3, 4 \dots (m-1)$

Für die erste und letzte Lage ( $p = 1$  und  $p = m$ ) sieht aber die Gleichung ein wenig anders aus, nämlich:

$$(E_{1,q-1} - 2E_{1,q} + E_{1,q+1}) \cdot u - E_{1,q} \cdot t + (-E_{1,q} + E_{2,q}) \cdot s = 0 \quad (2)$$

$$(E_{m,q-1} - 2E_{m,q} + E_{m,q+1}) \cdot u - E_{m,q} \cdot t' + (-E_{m,q} + E_{m-1,q}) \cdot s = 0 \quad (3)$$

Die  $m$  Differenzen-Gleichungen (1) (2) (3) kann man mit dem folgenden Ansatz (4) zu lösen probieren:

$$E_{p,q} = C_p \cdot e^{q \cdot \omega} \quad (4)$$

wobei  $C_p$  nur vom Index  $p$  abhängt, und  $\omega$  eine Konstante bezeichnet. Nach Einsetzen von (4) in (1) (2) und (3) bekommt man folgende Gleichungen (5) (6) (7):

$$C_{p-1} + \left(\frac{u}{s} \cdot \bar{\omega} - 2\right) \cdot C_p + C_{p+1} = 0 \quad [\text{aus Gl. 1}] \quad (5)$$

$$+ \left(\frac{u}{s} \cdot \bar{\omega} - 1 - \frac{t}{s}\right) \cdot C_1 + C_2 = 0 \quad [\text{aus Gl. 2}] \quad (6)$$

$$C_{m-1} + \left(\frac{u}{s} \cdot \bar{\omega} - 1 - \frac{t'}{s}\right) \cdot C_m = 0 \quad [\text{aus Gl. 3}] \quad (7)$$

wo  $\bar{\omega}$  eine Abkürzung für den Ausdruck  $e^{-\omega} - 2 + e^{+\omega} \equiv 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$  ist. Somit haben wir ein System von

$m$  linearen, homogenen Gleichungen für die Bestimmung der  $m$  Unbekannten  $C$ . Bekanntlich hat das Problem nur dann eine Lösung, wenn die Determinante des Systems null ist. Dies ergibt mit den neuen Bezeichnungen

$$\Omega = \frac{u}{s} \cdot \bar{\omega} - 2 = \frac{u}{s} \cdot 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2 \quad (8)$$

$$a = 1 - \frac{t}{s} \quad a' = 1 - \frac{t'}{s}$$

folgende Bedingung:



$\Omega + a$	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
+1	$\Omega$	+1	0	0	0	0	0	0	0
0	+1	$\Omega$	+1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	+1	$\Omega$	+1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+1	$\Omega$	+1	0	0
0	0	0	0	0	0	+1	$\Omega$	+1	0
0	0	0	0	0	0	0	+1	$\Omega + a'$	0

$$= 0 \quad (9)$$

Diese algebraische Gleichung  $m^{\text{ten}}$  Grades hat  $m$  Lösungen für  $\Omega$ , welche die sogenannten «Eigenwerte» des Problems ergeben.

Für jeden Wert von  $\Omega$  ergibt das Gleichungssystem (5) (6) (7) eine Gruppe von Lösungen für die  $C_p$ , die bis auf eine willkürliche Proportionalitätskonstante bestimmt sind. Wir bekommen also für die Spannungen  $E_{p,q}$  ganz allgemeine Ausdrücke, welche aus der Summe von  $m$  Gliedern bestehen und nur noch  $m$  willkürliche Konstanten enthalten.

Es muss hier eine Bemerkung angeknüpft werden, bezüglich der Berechnung von  $\omega$  mit Hilfe des Ansatzes (8), wobei  $\Omega$  als bekannt vorausgesetzt werden muss. Man erkennt, dass jeder  $\Omega$ -Wert zwei entgegengesetzte  $\omega$ -Werte ergibt<sup>2)</sup>, d. h. zu jeder Lösung  $e^{+q\omega}$  gehört eine zweite Lösung  $e^{-q\omega}$ , so dass die Gesamtheit unserer Lösungen in Wirklichkeit  $2m$  willkürliche Konstanten enthält.

Für die Bestimmung dieser Konstanten sind die Randbedingungen, d. h. die Vorgänge, die sich in der ersten und in der letzten ( $n^{\text{ten}}$ ) Halbspule abspielen, zu berücksichtigen.

1. Die  $n^{\text{te}}$  Halbspule, mit andern Worten das Wicklungsende, ist als geerdet anzusehen. Die Exponentialglieder  $e^{+n\omega}$  und  $e^{-n\omega}$  welche in den Ausdrücken von  $E_{1,n}$ ,  $E_{2,n}$ ,  $E_{p,n}$ ,  $E_{m,n}$  enthalten sind, sind aber sehr gross, resp. sehr klein, weil die Zahl  $n$  der Halbspulen immer sehr hoch ist. Macht man also sämtliche Konstanten, welche mit den positiven Exponenten verbunden sind, gleich null, so ist die obige Bedingung, dass die letzte Halbspule Erdpotential hat, mit einer sehr grossen Genauigkeit erfüllt, ohne dass man für die Konstanten der negativen Exponenten etwas vorgeschrieben hat.

Das Weglassen der Glieder mit positiven Exponenten ist praktisch ebenfalls noch zulässig, wenn ein einziger Leiter der  $n^{\text{ten}}$  Halbspule (nicht mehr die ganze Halbspule) geerdet ist. Das gleiche gilt sogar, wenn die letzte Halbspule vollständig isoliert ist, wie folgende Ueberlegungen zeigen. Es ist nur die Bedingung aufzustellen, dass die zu jedem Leiter  $1n$ ,  $2n$ ,  $pn$ ,  $mn$  fließende Ladung null sein

<sup>2)</sup> Die Erfahrung hat gezeigt, und man könnte wahrscheinlich streng beweisen, dass die  $m$  Lösungen von  $\Omega$  immer reell und  $> 2$  sind, so dass die Gl. (8) immer 2 reelle entgegengesetzte Werte für  $\omega$  ergibt.

muss. Dann geben die positiven Exponentialglieder überhaupt keinen Beitrag zur Ladung, weil ihre zugehörigen Konstanten null sind und die negativen Exponentialglieder geben praktisch auch keinen Beitrag, weil sie dank dem grossen  $n$ -Wert schon abgeklungen sind<sup>3)</sup>.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Berücksichtigung der Verhältnisse in der letzten Halbspule einfach zum Weglassen sämtlicher positiven Exponentialglieder führt.

2. Die Vorgänge in der 1<sup>ten</sup> Halbspule werden dadurch berücksichtigt, dass man mathematisch ausdrückt, dass die zu jedem Leiter 2,1, 3,1,  $p$ ,1,  $m$ ,1 über die Kapazitäten fließende Ladung null ist, dagegen ist die zum Eingangsleiter 1,1 von aussen zugeführte Ladung gleich  $Q$  zu setzen. Dabei ist auf den eventuell vorhandenen Schutzring besondere Rücksicht zu nehmen. Auf diese Weise entstehen  $m$  algebraische, lineare Gleichungen, welche die  $m$  bis jetzt unbestimmt gebliebenen Konstanten bestimmen.

Man sieht, dass sämtliche Spannungsausdrücke (im allgemeinen  $E_{p,q}$ ) der der ganzen Wicklung zugeführten Ladung  $Q$  proportional sind. Der Quotient  $\frac{E_{1,1}}{Q}$  wäre also nichts anderes als der Reziprokwert der sogenannten «Eingangskapazität» der betreffenden Wicklung.

Wenn man sich für die Spannungsverteilung interessiert, kann man die Gleichung des Eingangsleiters weglassen. Dann verfügt man über die  $m$  unbekanntenen Konstanten über bloss  $m-1$  Gleichungen, die aber homogen sind. Man kann aber eine beliebige Konstante willkürlich annehmen, die andern lassen sich dann berechnen. Sämtliche Spannungen sind dann bekannt bis auf eine Proportionalitätskonstante, welche für die Verteilung überhaupt keine Rolle spielt.

#### IV. Ersetzen der Wicklung durch ein kontinuierliches, homogenes Medium. Stetige Spannungsverteilung

Die obige mathematische Abhandlung kann vereinfacht werden, wenn man die Anzahl Halbspulen unendlich voraussetzt, mit andern Worten, wenn man die Gesamtheit der  $m \cdot n$  einzelnen Leiter in  $m$ , in der axialen Richtung liegende, schmale, lange Streifen (auch «Lagen» genannt) zerlegt und die Kombination von Kupfer und Isoliermaterial durch ein gleichwertiges Dielektrikum ersetzt.

Mit  $x$  bezeichnen wir dann die laufende Ordinate in der axialen Richtung:  $dx$  ist der Abstand zwischen den mittlern Ebenen zweier benachbarter Halbspulen (also gleich einfache Kupferbreite + einfachen Oelschlitz + doppelter Isolationsauftrag) und  $l$  die gesamte Wicklungslänge.

Dann empfiehlt es sich, folgende charakteristische Daten einzuführen, wobei wir uns auf den

<sup>3)</sup> Bei ganz abnormalen Wicklungsanordnungen wären diese Punkte jedoch zu überprüfen. Bei der gewöhnlichen konzentrischen Wicklungsanordnung sind aber unsere Schlussfolgerungen durchaus berechtigt.

Fall  $m = 3$ , d. h. 3 Lagen, beschränken <sup>4)</sup> (siehe Fig. 2).

- $l$  axiale Wicklungslänge
- $r$  Kapazität zwischen Lage 1 und Lage 2, dividiert durch  $l$
- $s$  Kapazität zwischen Lage 2 und Lage 3, dividiert durch  $l$
- $t$  Kapazität zwischen Lage 1 und Erde, dividiert durch  $l$
- $t'$  Kapazität zwischen Lage 3 und Erde, dividiert durch  $l$
- $u$  Kapazität innerhalb Lage 1, zwischen erstem und letztem Leiter, multipliziert mit  $l$
- $v$  Kapazität innerhalb Lage 2, zwischen erstem und letztem Leiter, multipliziert mit  $l$
- $w$  Kapazität innerhalb Lage 3, zwischen erstem und letztem Leiter, multipliziert mit  $l$ .

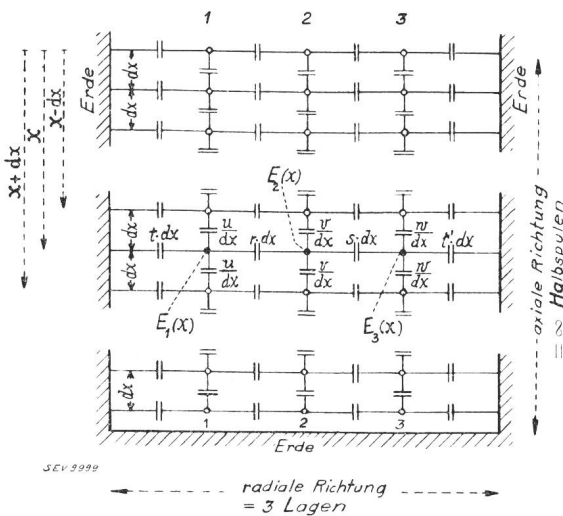


Fig. 2.

Schematischer Schnitt einer Transformator-Wicklung mit 3 Lagen und  $\infty$  vielen Halbspulen.

Diese Bezeichnungen sind jedoch etwas allgemeiner als diejenigen des vorigen Abschnitts, insofern als sie zwischen den Merkmalen der 3 Lagen unterscheiden.

Die 3 grundsätzlichen Gleichungen lassen sich genau in der gleichen Weise aufstellen, wie im Abschnitt III die Gleichungen (1) (2) (3), wobei zu bemerken ist, dass

$$E_{(x-dx)} - E_{(x)} + E_{(x+dx)} - E_{(x)} = \frac{d^2E}{dx^2} \cdot dx^2$$

In der Reihenfolge der Gleichungen (2) (1) (3) erhält man die analogen Gleichungen (10) (11) (12):

$$u \cdot \frac{d^2E_1}{dx^2} - (t+r) E_1 + r \cdot E_2 = 0 \quad (10)$$

<sup>4)</sup> Der rechnerischen Ermittlung der stetigen Spannungsverteilung in der axialen Richtung bei einer beliebigen Lagenzahl  $m$  steht im Prinzip gar nichts im Wege. Sie ist sogar einfacher als die im vorigen Abschnitt behandelte Frage der unstetigen Verteilung. Immerhin wird man sich in der Praxis fast immer mit  $m=3$  begnügen, was eine ganz wesentliche Erleichterung der Rechnung ergibt. (Heruntersetzen der Ordnung der Eigenwertgleichung.)

$$r \cdot E_1 + v \frac{d^2E_2}{dx^2} - (s+r) E_2 + s E_3 = 0 \quad (11)$$

$$s \cdot E_2 + w \cdot \frac{d^2E_3}{dx^2} - (t'+s) \cdot E_3 = 0 \quad (12)$$

Die Lösung dieses Systems von 3 linearen homogenen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung wird mit einem ähnlichen Ansatz wie im Abschnitt III probiert.

$$E_1(x) = A \cdot e^{\omega x}; E_2(x) = B \cdot e^{\omega x}; E_3(x) = C \cdot e^{\omega x} \quad (13)$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} (u\omega^2 - t - r) \cdot A + rB &= 0 \\ r \cdot A + (v\omega^2 - s - r) \cdot B + sC &= 0 \\ sB + (w\omega^2 - t' - s) \cdot C &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Die Eigenwertgleichung lautet, als Determinante geschrieben:

$u\omega^2 - t - r$	$r$	$0$
$r$	$v\omega^2 - s - r$	$s$
$0$	$s$	$w\omega^2 - t' - s$

$$= 0 \quad (15)$$

Diese Gleichung dritten Grades in  $\omega^2$  ergibt 3 Lösungen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  und sämtliche Ueberlegungen des Abschnitts III sind hier ohne weiteres übertragbar.

Es sei noch bemerkt, dass die allgemeinen Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= A_1 e^{-\omega_1 x} + A_2 e^{-\omega_2 x} + A_3 e^{-\omega_3 x} \\ E_2(x) &= B_1 e^{-\omega_1 x} + B_2 e^{-\omega_2 x} + B_3 e^{-\omega_3 x} \\ E_3(x) &= C_1 e^{-\omega_1 x} + C_2 e^{-\omega_2 x} + C_3 e^{-\omega_3 x} \end{aligned} \quad (16)$$

wo  $A_1, B_1, C_1$  Lösungen des Systems (14) nach Einsetzen des Wertes  $\omega_1$  darstellen,  $A_2, B_2, C_2$  nach Einsetzen von  $\omega_2$  und  $A_3, B_3, C_3$  nach Einsetzen von  $\omega_3$ .

Das Problem ist nun vollständig gelöst, bis auf die Bestimmung von nur 3 Konstanten, welche durch die Anfangsbedingungen der ersten Halbspule bestimmt sind.

Mit sehr einfachen Ueberlegungen kann man kontrollieren, dass beim Grenzübergang (Anzahl Halbspulen  $n = \infty$ ) die Lösung des Abschnitts III für  $m = 3$ , mit der soeben angegebenen für  $r = s$  und  $u = v = w$  übereinstimmt.

Es ist ohne weiteres klar, dass genau der gleiche Weg eingeschlagen werden kann, wenn die Anzahl Lagen sich auf 2, oder sogar auf 1 beschränkt. Der letzte Fall ist übrigens schon lange klassisch geworden.

Im Gegenteil könnte man daran denken, das Problem noch mehr zu verallgemeinern und dazu überzugehen, nicht nur die Anzahl Halbspulen, sondern auch die Anzahl Lagen als unendlich zu betrachten. Dann wäre  $E$  als eine Funktion zweier Variablen  $x$  und  $y$  in der Ebene aufzufassen, wobei  $y$  die Ordinate in der radialen Richtung wäre. Die Grunddifferentialgleichung, welche ausdrückt, dass

die zum Punkte  $x, y$  zufließende Ladung null ist, lautet nun [siehe Gl. (1)]

$$u \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + s \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

die im Grunde genommen mit der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

des quellenfreien zweidimensionalen Feldes gleichwertig ist<sup>5)</sup>. Dieser Weg scheint aber für eine praktische Rechenmethode wenig Erfolg zu versprechen.

Es kann aber von Interesse sein, zu erwähnen, dass die Untersuchung der Gleichgewichtslage einer elastischen Membrane unter folgenden Bedingungen genau zur gleichen Differentialgleichung führt<sup>5)</sup>: eine rechteckige Membrane sei allseitig in einem rechteckigen, horizontalen Rahmen eingespannt, der das Fenster des Transformators darstellt, und an einem bestimmten Punkt, der die Eingangswindung darstellt, sei die Membrane auf eine bestimmte Höhe gebracht, welche der Stoßspannung entspricht. Die neue Gleichgewichtslage der Membrane ergibt eine genaue Abbildung der kapazitiven Spannungsverteilung in der Wicklung. Es sei noch bemerkt, dass die Kapazitäten gegen Erde dadurch nachgeahmt werden können, dass elastische Glieder zwischen Membrane und Rahmen geschaltet werden.

#### V. Ausführliche Behandlung einiger praktischer Probleme nach der obigen Rechenmethode

Im Rahmen der im vorigen Abschnitt gestellten allgemeinen Bedingungen lassen sich mannigfaltige Probleme stellen, die sich nur durch die Anfangsbedingungen der ersten Halbspule unterscheiden. Die angegebene Berechnungsmethode liefert jedesmal die Lösung dieser Probleme, muss aber jedesmal den speziellen Anfangsbedingungen angepasst werden.

Es sollen nun die folgenden 3 wichtigen Anordnungen behandelt werden:

Die angestossene Wicklung befinde sich

- zwischen 2 starr geerdeten Wänden,
- zwischen einer starr geerdeten Wand und einer isolierten Wicklung,
- zwischen 2 isolierten Wicklungen.

Die beiden ersten Fälle können mit  $m = 3$  und mit  $m = 2$  (einfachere, aber weniger genaue Rechnung) gelöst werden. Es seien dies die Varianten *A* und *D* für den Fall a) und *B* und *E* für den Fall b). Für den letzten Fall c) muss  $m = 3$  angesetzt werden (Variante *C*).

Der allgemeine Berechnungsgang ist für  $m = 3$  in den Fig. 3, 4 und 5 und für  $m = 2$  in den Fig. 6 und 7 zusammengestellt. Die Bestimmung der Integrationskonstanten ist ausserdem ausführlicher im folgenden Text behandelt. Für  $m = 3$  verfügt man

<sup>5)</sup> Hier ist  $u = s$ .

über 2 lineare Gleichungen zur Bestimmung der 3 Integrationskonstanten  $A_1$  bis  $A_3$ . Nach willkürlicher Wahl von  $A_1$  lassen sich daraus die beiden andern Konstanten bestimmen und damit auch die gesuchte prozentuale Spannungsverteilung über die Wicklungen. Bei  $m = 2$  verfügt man nur über eine Gleichung in  $A_1$  und  $A_2$ , aus welcher auf analoge Weise bei bekanntem  $A_1$  die Konstante  $A_2$  ermittelt werden kann.

*A. Kapazitive Spannungsverteilung in einer Wicklung, welche aus 3 Lagen besteht, einen mit der Eingangswindung verbundenen Schutzring besitzt und sich zwischen 2 geerdeten Wänden befindet.*

(Variante *A*, siehe Fig. 3)

Die erste Halbspule hat gegenüber dem Schutzring eine Kapazität  $3F$ , d. h. jede Lage hat eine Kapazität  $F$ <sup>6)</sup>.

Die letzte Halbspule ist entweder geerdet oder isoliert, oder es ist nur die letzte Windung geerdet.

Die Anfangsbedingungen lauten:

- Ladung in der ersten Windung der zweiten Lage gleich null [vgl. Fig. 3 und Gl. (11)].

$$\left[ E_1(0) - E_2(0) \right] r dx + \left[ E_3(0) - E_2(0) \right] s dx + \frac{dE_2(0)}{dx} v + \left[ E_1(0) - E_2(0) \right] \cdot F = 0$$

oder:

$$v \frac{dE_2(0)}{dx} + F \cdot \left[ E_1(0) - E_2(0) \right] = 0$$

weil die andern Glieder unendlich klein sind.

Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$  [s. Gl. (17)] bekommt man eine erste Gleichung in  $A_1, A_2, A_3$ :

$$(-w \omega_1 \beta_1 + F - F \beta_1) A_1 + (-v \omega_2 \beta_2 + F - F \beta_2) A_2 + (-v \omega_3 \beta_3 + F - F \beta_3) A_3 = 0$$

- Ladung in der ersten Windung der dritten Lage gleich null.

$$\left[ E_2(0) - E_3(0) \right] s dx - E_3(0) \cdot t \cdot dx + \frac{dE_3(0)}{dx} \cdot dx \cdot \frac{w}{dx} + \left[ E_1(0) - E_3(0) \right] \cdot F = 0$$

oder:

$$w \cdot \frac{dE_3(0)}{dx} + F \cdot \left[ E_1(0) - E_3(0) \right] = 0.$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $E_1(x)$ ,  $E_3(x)$ , [Gl. (17)] bekommt man eine zweite Gleichung in  $A_1, A_2, A_3$ :

$$(-w \omega_1 \gamma_1 + F - F \gamma_1) A_1 + (-w \omega_2 \gamma_2 + F - F \gamma_2) A_2 + (-w \omega_3 \gamma_3 + F - F \gamma_3) A_3 = 0.$$

<sup>6)</sup> Die konzentrierten Kapazitäten werden immer mit grossen Buchstaben bezeichnet, während die verteilten Kapazitäten pro oder mal Längeneinheit (z. B.  $t, t', r, s$  oder  $u, v, w$ ) immer mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden.

*B. Kapazitive Spannungsverteilung in einer Wicklung, welche aus zwei Lagen besteht, einen mit der Eingangswindung verbundenen Schutzring besitzt und sich zwischen einer geerdeten Wand und einer isolierten Wicklung befindet.*

(Variante B, siehe Fig. 4)

Die Hauptwicklung besteht aus 2 Lagen (erste und zweite Lage) während die dritte Lage eine weitere Wicklung darstellt. Somit befindet sich die Hauptwicklung zwischen einer geerdeten Wand (entsprechend der gesamten Kapazität  $t \cdot l$ ) und einer zweiten Wicklung (entsprechend der gesamten Kapazität  $s \cdot l$ ); diese befindet sich zwischen der Hauptwicklung (entsprechend der gesamten Kapazität  $s \cdot l$ ) und einer geerdeten Wand (entsprechend der gesamten Kapazität  $t \cdot l$ ).

Die erste Halbspule der Hauptwicklung hat gegenüber ihrem Schutzring eine Kapazität  $2F$ , d. h. jede Lage eine Kapazität  $F$ .

Die erste Halbspule der zweiten Wicklung hat samt ihrem Schutzring eine Kapazität  $G$  gegen Erde: die Kapazität der zugehörigen Durchführung kann auch in  $G$  inbegriffen sein <sup>7)</sup>.

Die letzte Halbspule jeder Wicklung ist geerdet oder isoliert, oder es ist nur die letzte Windung jeweils geerdet.

Die Anfangsbedingungen lauten:

a) Ladung in der ersten Windung der zweiten Lage gleich null. Dies ergibt genau dieselbe Gleichung wie bei Variante A.

b) Ladung in der ersten Windung der dritten Lage gleich null.

$$[E_2(0) - E_3(0)] s dx - E_3(0) \cdot t dx + \frac{dE_3(0)}{dx} \cdot dx \cdot \frac{w}{dx} - E_3(0) \cdot G = 0$$

oder:

$$w \cdot \frac{dE_3(0)}{dx} - G \cdot E_3(0) = 0$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes für  $E_3(x)$  [Gl. (17)] bekommt man eine zweite Gleichung in  $A_1, A_2, A_3$ :

$$(-w \omega_1 \gamma_1 - G \gamma_1) A_1 + (-w \omega_2 \gamma_2 - G \gamma_2) A_2 + (-w \omega_3 \gamma_3 - G \gamma_3) A_3 = 0.$$

*C. Kapazitive Spannungsverteilung in einer Wicklung, welche aus 1 Lage besteht, einen mit der Eingangswindung verbundenen Schutzring besitzt und sich zwischen 2 isolierten Wicklungen befindet.*

(Variante C, siehe Fig. 5)

Die Hauptwicklung besteht aus einer Lage (zweite Lage), während die erste und die dritte Lage zwei weitere Wicklungen darstellen. Somit befindet sich die Hauptwicklung zwischen zwei Wicklungen (entsprechend den Kapazitäten  $r \cdot l$  einerseits und  $s \cdot l$  andererseits), und diese befinden

<sup>7)</sup> Ohne Schwierigkeit könnte auch eine gewisse konzentrierte Kapazität zwischen den beiden Schutzringen berücksichtigt und in die Anfangsbedingungsgleichungen eingeführt werden.

sich zwischen 2 geerdeten Wänden (entsprechend den Kapazitäten  $t \cdot l$  einerseits und  $t' \cdot l$  andererseits).

Die erste Halbspule der Hauptwicklung ist mit ihrem zugehörigen Schutzring, welcher eine Kapazität  $G$  gegen Erde besitzt, direkt verbunden. In ganz ähnlicher Weise besitzen die Schutzringe der zwei andern Wicklungen die Kapazitäten  $F$  und  $H$  gegen Erde <sup>8)</sup>.

Die letzte Halbspule jeder Wicklung ist geerdet oder isoliert. Die Anfangsbedingungen lauten:

a) Ladung in der ersten Windung der ersten Lage gleich null.

$$-E_1(0) \cdot t dx + [E_2(0) - E_1(0)] \cdot r dx + \frac{dE_1(0)}{dx} \cdot dx \cdot \frac{u}{dx} - E_1(0) \cdot F = 0$$

oder:

$$u \cdot \frac{dE_1(0)}{dx} - F \cdot E_1(0) = 0$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes für  $E_1(x)$  [Gl. (17)] bekommt man eine erste Gleichung in  $A_1, A_2, A_3$ :

$$(-u \omega_1 - F) A_1 + (-u \omega_2 - F) A_2 + (-u \omega_3 - F) A_3 = 0$$

b) Ladung in der ersten Windung der dritten Lage gleich null:

$$w \cdot \frac{dE_3(0)}{dx} - H \cdot E_3(0) = 0$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes für  $E_3(x)$  [Gl. (17)] ergibt sich eine zweite Gleichung in  $A_1, A_2, A_3$ :

$$(-w \omega_1 \gamma_1 - H \gamma_1) A_1 + (-w \omega_2 \gamma_2 - H \gamma_2) A_2 + (-w \omega_3 \gamma_3 - H \gamma_3) A_3 = 0.$$

*D. Kapazitive Spannungsverteilung in einer Wicklung, welche aus 2 Lagen besteht, einen mit der Eingangswindung verbundenen Schutzring besitzt und sich zwischen 2 geerdeten Wänden befindet.*

(Variante D, siehe Fig. 6)

Die erste Halbspule hat gegenüber dem Schutzring eine Kapazität  $2F$ , d. h. jede Lage hat eine Kapazität  $F$ .

Die letzte Halbspule ist geerdet oder isoliert, oder es ist nur die letzte Windung geerdet.

Die Anfangsbedingung lautet:

Ladung in der ersten Windung der zweiten Lage gleich null.

$$[E_1(0) - E_2(0)] \cdot r dx - E_2(0) \cdot t' dx + \frac{dE_2(0)}{dx} \cdot dx \cdot \frac{v}{dx} + [E_1(0) - E_2(0)] \cdot F = 0$$

oder

$$v \cdot \frac{dE_2(0)}{dx} + F \cdot [E_1(0) - E_2(0)] = 0$$

<sup>8)</sup> Gewisse konzentrierte Kapazitäten zwischen den Schutzringen könnten auch hier berücksichtigt und in die Anfangsbedingungsgleichungen eingeführt werden.

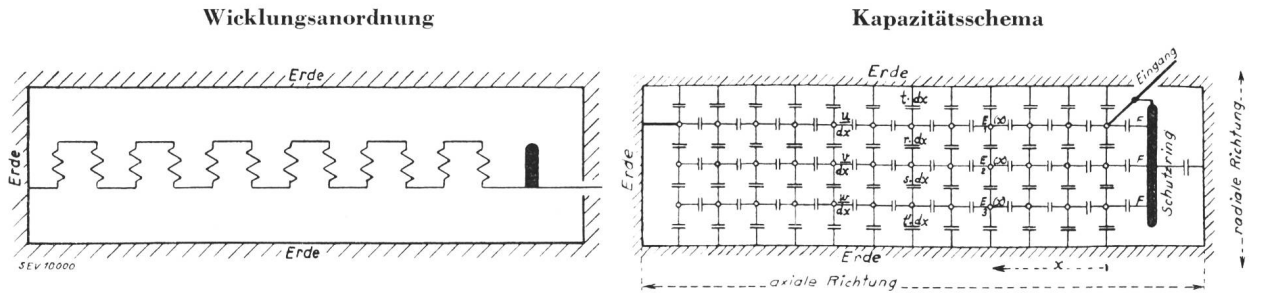


Fig. 3 Variante A

$$\text{Anfangsbedingungen} \begin{cases} (+v\omega_2\beta_2 - F + F\beta_2)A_2 + (+v\omega_3\beta_3 - F + F\beta_3)A_3 = -(+v\omega_1\beta_1 - F + F\beta_1)A_1 \\ (+w\omega_2\gamma_2 - F + F\gamma_2)A_2 + (+w\omega_3\gamma_3 - F + F\gamma_3)A_3 = -(+w\omega_1\gamma_1 - F + F\gamma_1)A_1 \end{cases}$$

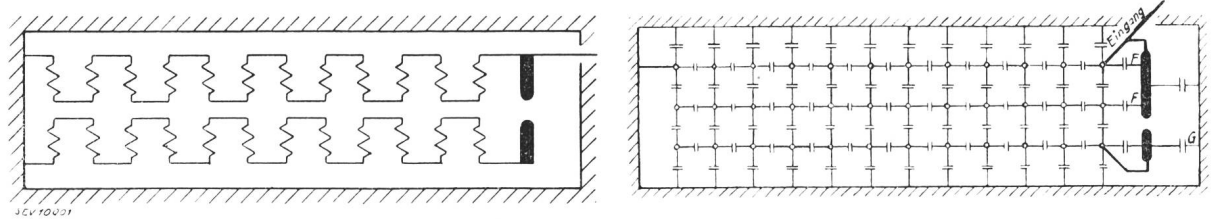


Fig. 4 Variante B

$$\text{Anfangsbedingungen} \begin{cases} (+v\omega_2\beta_2 - F + F\beta_2)A_2 + (+v\omega_3\beta_3 - F + F\beta_3)A_3 = -(+v\omega_1\beta_1 - F + F\beta_1)A_1 \\ (+w\omega_2 + G)\gamma_2 A_2 + (+w\omega_3 + G)\gamma_3 A_3 = -(+w\omega_1\gamma_1 + G\gamma_1)A_1 \end{cases}$$

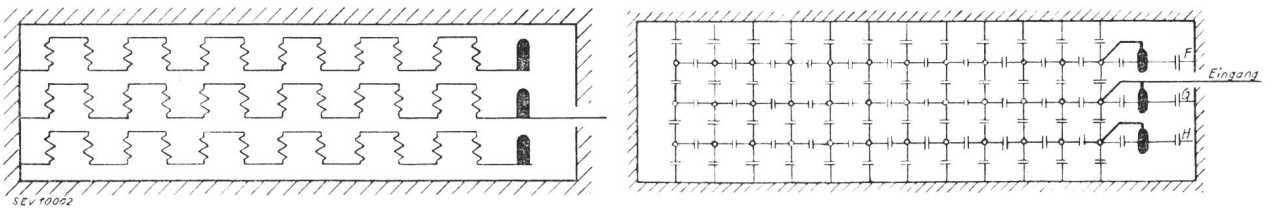


Fig. 5 Variante C

$$\text{Anfangsbedingungen} \begin{cases} (+u\omega_2 + F)A_2 + (+u\omega_3 + F)A_3 = -(+u\omega_1 + F)A_1 \\ (+w\omega_2 + H)\gamma_2 A_2 + (+w\omega_3 + H)\gamma_3 A_3 = -(+w\omega_1 + H)\gamma_1 A_1 \end{cases}$$

**Allgemeiner Berechnungsgang mit 3 Lagen (für Varianten A, B, C gültig)**

1. Gleichung dritten Grades in  $\omega^2$ :

$$\begin{vmatrix} u\omega^2 - t - r & r & 0 \\ r & v\omega^2 - s - r & s \\ 0 & s & w\omega^2 - t' - s \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus 3 positive Lösungen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

2. Bestimmung der Konstanten B und C bei gegebenem A:

$$\begin{array}{l} B_1 = - \frac{u\omega_1^2 - t - r}{r} \cdot A_1 = \beta_1 A_1 \\ C_1 = + \frac{s}{r} \cdot \frac{u\omega_1^2 - t - r}{w\omega_1^2 - t' - s} \cdot A_1 = \gamma_1 A_1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} B_2 = - \frac{u\omega_2^2 - t - r}{r} \cdot A_2 = \beta_2 A_2 \\ C_2 = + \frac{s}{r} \cdot \frac{u\omega_2^2 - t - r}{w\omega_2^2 - t' - s} \cdot A_2 = \gamma_2 A_2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} B_3 = - \frac{u\omega_3^2 - t - r}{r} \cdot A_3 = \beta_3 A_3 \\ C_3 = + \frac{s}{r} \cdot \frac{u\omega_3^2 - t - r}{w\omega_3^2 - t' - s} \cdot A_3 = \gamma_3 A_3 \end{array} \right.$$

Eventuell die Kontrolle:  $r + (v\omega_1^2 - s - r)\beta_1 + s\gamma_1 = 0$        $r + (v\omega_2^2 - s - r)\beta_2 + s\gamma_2 = 0$        $r + (v\omega_3^2 - s - r)\beta_3 + s\gamma_3 = 0$

3. Ausdrücke der Lösungen, wobei  $A_1, A_2, A_3$  noch unbekannte Konstanten sind:

$$\left. \begin{array}{l} E_1(x) = A_1 e^{-\omega_1 x} + A_2 e^{-\omega_2 x} + A_3 e^{-\omega_3 x} \\ E_2(x) = \beta_1 A_1 e^{-\omega_1 x} + \beta_2 A_2 e^{-\omega_2 x} + \beta_3 A_3 e^{-\omega_3 x} \\ E_3(x) = \gamma_1 A_1 e^{-\omega_1 x} + \gamma_2 A_2 e^{-\omega_2 x} + \gamma_3 A_3 e^{-\omega_3 x} \end{array} \right\} \quad (17)$$



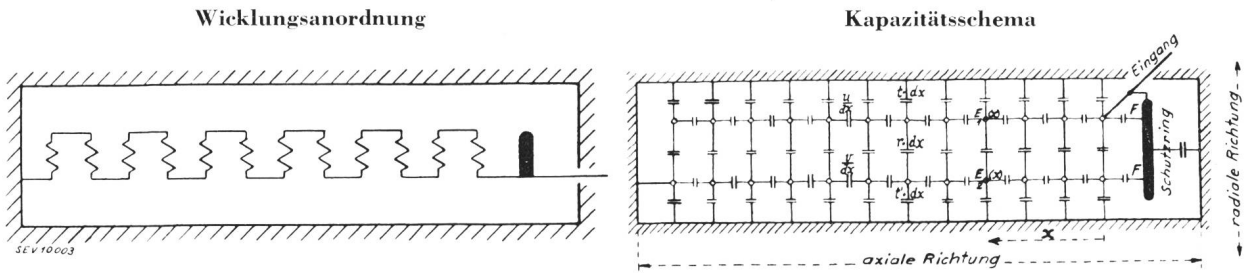


Fig. 6 Variante D

Anfangsbedingungen:  $A_2 = -\frac{v\omega_1\beta_1 - F + F\beta_1}{v\omega_2\beta_2 - F + F\beta_2} \cdot A_1$

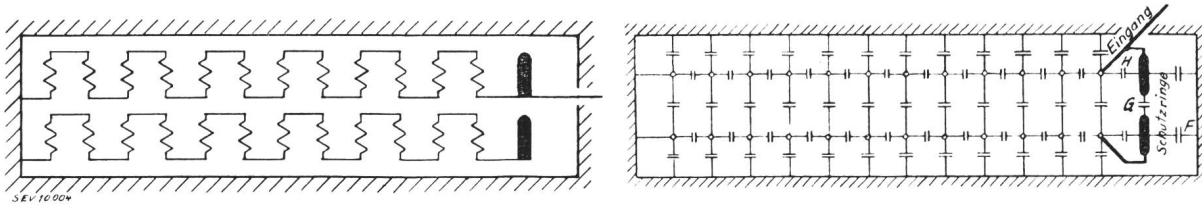


Fig. 7 Variante E

Anfangsbedingungen:  $A_2 = -\frac{v\omega_1\beta_1 - G + G\beta_1 + F\beta_1}{v\omega_2\beta_2 - G + G\beta_2 + F\beta_2} \cdot A_1$

**Allgemeiner Berechnungsgang mit 2 Lagen (für Varianten D und E gültig)**

1. Gleichung zweiten Grades in  $\omega^2$ :

$$\begin{vmatrix} u\omega^2 - t - r & r \\ r & v\omega^2 - t' - r \end{vmatrix} = 0$$

oder  $(u\omega^2 - t - r) \cdot (v\omega^2 - t' - r) - r^2 = 0$

Hieraus 2 positive Lösungen  $\omega_1, \omega_2$ .

2. Bestimmung der Konstanten B bei gegebenem A:

$$B_1 = -\frac{u\omega_1^2 - t - r}{r} \cdot A_1 = \beta_1 A_1 \quad \left| \quad B_2 = -\frac{u\omega_2^2 - t - r}{r} \cdot A_2 = \beta_2 A_2 \right.$$

Eventuell die Kontrolle:

$$r + (v\omega_1^2 - t' - r) \cdot \beta_1 = 0$$

Eventuell die Kontrolle:

$$r + (v\omega_2^2 - t' - r) \cdot \beta_2 = 0$$

3. Ausdrücke der Lösungen, wobei  $A_1$  und  $A_2$  noch unbekannte Konstanten sind:

$$\left. \begin{aligned} E_1(x) &= A_1 e^{-\omega_1 x} + A_2 e^{-\omega_2 x} \\ E_2(x) &= \beta_1 A_1 e^{-\omega_1 x} + \beta_2 A_2 e^{-\omega_2 x} \end{aligned} \right\} (18)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $E_1(x)$  und  $E_2(x)$  [Gl. (18)] bekommt man eine Gleichung in  $A_1$  und  $A_2$ :

$$(-v\omega_1\beta_1 + F - F\beta_1)A_1 + (-v\omega_2\beta_2 + F - F\beta_2)A_2 = 0$$

*E. Kapazitive Spannungsverteilung in einer Wicklung, welche aus 1 Lage besteht, einen mit der Eingangswicklung verbundenen Schutzring besitzt und sich zwischen einer geerdeten Wand und einer isolierten Wicklung befindet.*

(Variante E, siehe Fig. 7)

Die Hauptwicklung besteht aus 1 Lage (ersten Lage), während die zweite Lage eine weitere Wicklung darstellt. Somit befindet sich die Hauptwicklung zwischen einer geerdeten Wand (entsprechend der gesamten Kapazität  $t \cdot l$ ) und einer zweiten Wick-

lung (entsprechend der gesamten Kapazität  $r \cdot l$ ); diese befindet sich zwischen der Hauptwicklung (entsprechend der gesamten Kapazität  $r \cdot l$ ) und einer geerdeten Wand (entsprechend der gesamten Kapazität  $t' \cdot l$ ).

Die erste Halbspule der Hauptwicklung hat gegenüber ihrem Schutzring eine Kapazität  $H$ .

Die erste Halbspule der zweiten Wicklung hat samt ihrem Schutzring eine Kapazität  $F$  gegen Erde.

Es sei weiter eine konzentrierte Kapazität  $G$  zwischen den Schutzringen angenommen.

Die letzte Halbspule jeder Wicklung ist geerdet oder isoliert. Die Anfangsbedingung lautet:

Ladung in der ersten Windung der zweiten Lage gleich null:

$$\left[ E_1(0) - E_2(0) \right] \cdot r dx - E_2(0) \cdot t' dx + \frac{dE_2(0)}{dx} \cdot dx \cdot \frac{v}{dx} \\ + \left[ E_1(0) - E_2(0) \right] \cdot G - E_2(0) \cdot F = 0$$

oder:

$$v \frac{dE_2(0)}{dx} + G \cdot \left[ E_1(0) - E_2(0) \right] - F \cdot E_2(0) = 0$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $E_1(x)$  und  $E_2(x)$  [Gl. (18)] bekommt man eine Gleichung in  $A_1$  und  $A_2$ :

$$(-v\omega_1\beta_1 + G - G\beta_1 - F\beta_1)A_1 + (-v\omega_2\beta_2 + G - G\beta_2 - F\beta_2)A_2 = 0.$$

## VI. Berücksichtigung des Einflusses der Spulenverbindungen

Laut Ausführungen am Ende des Abschnitts II ergibt die Berechnung in der bis jetzt angegebenen Form (d. h. unter der Annahme vollständig isolierter Windungen) die Spannungsverteilung im Gebiet, welches weit von den Spulenverbindungen entfernt ist.

Dagegen muss man im Gebiet, welches sich in der Nähe der Spulenverbindungen erstreckt, deren Einfluss in der Berechnung berücksichtigen.

Keht man zu Fig. 1 zurück, so erkennt man, dass der Einfluss der Verbindung zwischen der  $m^{\text{ten}}$  Windung der ersten Halbspule und der  $m^{\text{ten}}$  Windung der zweiten Halbspule darin besteht, dass durch Zufluss einer Ladung von einer Windung zur andern die beiden zugehörigen Potentiale ausgeglichen werden, indem das höhere herunter- und das tiefere heraufgesetzt wird.

Man kann hier eine mathematisch genaue Lösung umgehen und sich durch folgenden Kunstgriff mit einer brauchbaren Annäherung begnügen. Die Ergebnisse der obigen Berechnungsmethode (also ohne Spulenverbindungen) werden in Kurven

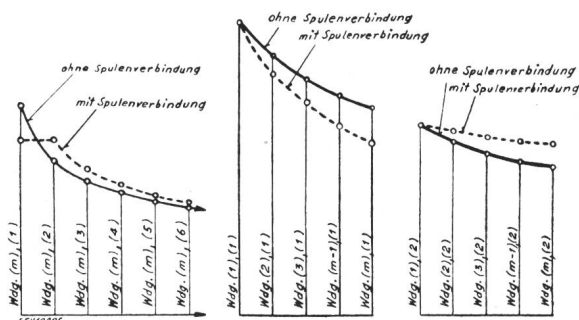


Fig. 8. Spannungsverteilung über der  $m^{\text{ten}}$  Lage.

Fig. 9. Spannungsverteilung über der 1. Halbspule.

Fig. 10. Spannungsverteilung über der 2. Halbspule.

dargestellt (Fig. 8, 9, 10, ausgezogene Kurven). Eine Kurve ergibt die Spannung in der  $m^{\text{ten}}$  Lage, eine andere in der ersten Halbspule und eine weitere in der zweiten Halbspule. Die Spulenverbindung bringt nun die Drähte  $(m)$ ,  $(1)$  und  $(m)$ ,  $(2)$  auf einen gemeinsamen Potentialwert, der als derjenige Punkt aus der Kurve Fig. 8 zu wählen ist,

dessen Abszisse den Mittelwert zwischen den Abszissen  $(m)$ ,  $(1)$  und  $(m)$ ,  $(2)$  darstellt. Dementsprechend sind die 3 Kurven der Fig. 8, 9, 10 zu korrigieren, und zwar unter der Annahme, dass der Einfluss dieser «Störung» allmählich abklingt und sich auf der ganzen radialen Spulenhöhe ausbreitet.

Beim gefühlsmässigen Aufzeichnen der neuen Kurven (gestrichelte Kurven der Fig. 8, 9, 10) kann die Vorstellung des Membranmodells sehr viel helfen. Die durch die Spulenverbindung hervorgerufene Störung äussert sich im Modell dadurch, dass 2 benachbarte Punkte zwangsläufig auf die gleiche Höhe gebracht werden, wobei diese gemeinsame Höhe jedoch frei gehalten wird.

## VII. Zahlenmässige Berechnung einiger Beispiele

Diese Berechnungsmethode wird auf einige Beispiele zahlenmässig angewendet. Bezüglich der Bestimmung der charakteristischen Wicklungsdaten seien folgende Punkte hervorgehoben:

Falls die Windungsisolation in den ersten Halbspulen stärker ist als in den übrigen, wird man voraussetzen, dass die ganze Wicklung mit der verstärkten Isolation versehen ist, denn wir sind hauptsächlich an den Vorgängen interessiert, welche sich in der unmittelbaren Nähe der Eingangswindung abspielen.

Die Kapazitäten pro Längeneinheit (d. h. die Koeffizienten  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $t'$ ) werden so bestimmt, dass man zunächst die gesamte Kapazität zwischen den Lagen oder zwischen Lage und Erde berechnet und sie dann durch die Länge  $l$  dividiert.

Die Kapazitäten mal Längeneinheit (d. h. die Koeffizienten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) werden so bestimmt, dass man zunächst die Kapazität zwischen der ersten und der letzten Windung innerhalb einer gleichen Lage berechnet und sie dann mit der Länge  $l$  multipliziert.

Für die Dielektrizitätskonstante des Oels wird 2,5, für diejenige des Papiers wird 4 eingesetzt. Das «rationale» Maßsystem eignet sich am besten

für diese Rechnungen (geometrische Kapazität

$$\text{eines Plattenkondensators} = \frac{F_{\text{cm}^2}}{d_{\text{cm}}}).$$

Der eigentliche Berechnungsgang wird durch die Fig. 3, 4, 5, 6, 7 ausführlich angegeben. Tafeln der Exponentialfunktionen erleichtern ganz wesentlich die Auswertung. Für die erste Halbspule ist selbstverständlich  $x = 0$  zu setzen; für die zweite muss  $x$  gleich dem Abstand zwischen Mitte der ersten und Mitte der zweiten Halbspule eingesetzt werden, usw.

Eine übersichtliche und vollständige Darstellung der Berechnungsergebnisse besteht in einer Skizze, welche einen maßstäblichen Wicklungsschnitt mit sämtlichen Windungsquerschnitten darstellt, und wo der bei der kapazitiven Spannungsverteilung von jedem Draht angenommene Spannungswert in Zahlen eingetragen wird. Diese Darstellungsart wurde in den Fig. 11/12 und 13/14 angewendet, wobei jeweils der linke Teil die Spannungsverteilung

lung weit von den Spulenverbindungen weg, der rechte Teil dagegen die Spannungsverteilung in der Nähe der Spulenverbindungen angibt.

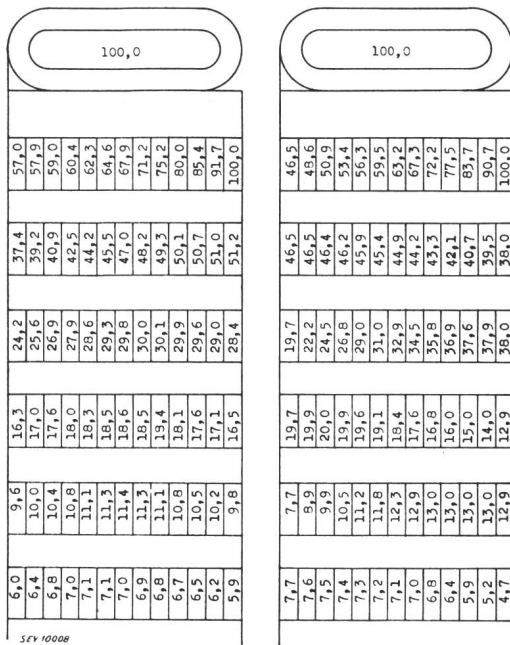


Fig. 11.

Fig. 12.

Ohne Spulenverbindungen.

Mit Spulenverbindungen.

Transformator 77283/24420 V, 2500 kVA. Berechnung der kapazitiven Spannungsverteilung in der Oberspannungswicklung als 3-Lagenwicklung betrachtet, mit Schutzring, innere Unterspannungswicklung und äussere Regulierwicklung als geerdet angenommen. Stetiger Spannungsverlauf als Lösung der Differentialgleichungen ermittelt.

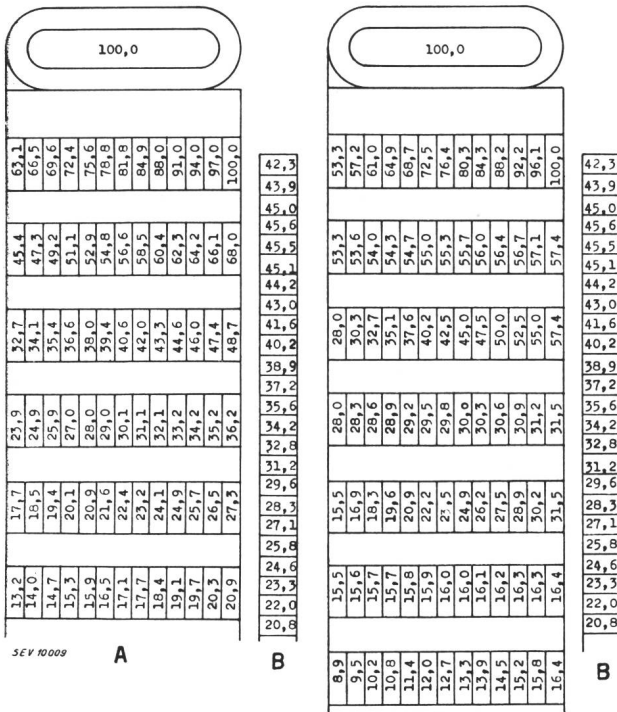


Fig. 13.

Fig. 14.

Ohne Spulenverbindungen.

Mit Spulenverbindungen.

A Hauptwicklung, B Regulierwicklung.

Transformator 77283/24420 V, 2500 kVA. Berechnung der kapazitiven Spannungsverteilung in der Oberspannungswicklung als 2-Lagenwicklung betrachtet, mit Schutzring, innere Unterspannungswicklung als geerdet und äussere Regulierwicklung als isoliert angenommen. Stetiger Spannungsverlauf als Lösung der Differentialgleichungen ermittelt.

In den Fällen, in welchen jede Halbspule eine grössere Anzahl Windungen besitzt, während wir höchstens mit 3 Lagen rechnen, wird die Höhe der Spannung für die verschiedenen Drähte durch Interpolation bestimmt. In den Fällen, wo wir mit nur 2 Lagen rechnen, wird geradlinig interpoliert.

Es sei endlich noch bemerkt, dass man durch eine einfache Nachrechnung kontrollieren kann, ob die gefundene Lösung vom rein mathematischen Standpunkte aus nicht fehlerhaft ist. Zu diesem

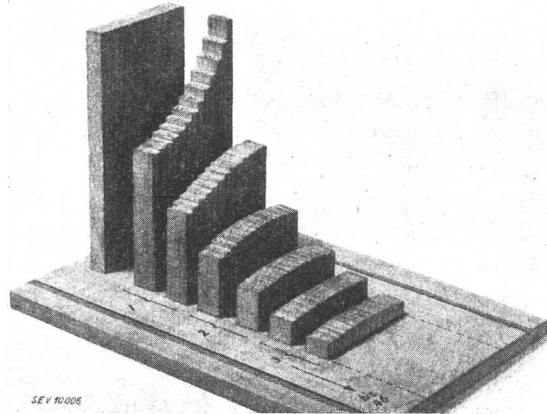


Fig. 15.

Räumliches Modell der Spannungsverteilung in der Oberspannungswicklung eines 2500-kVA-Transformators, der Fig. 11 entsprechend. Ohne Spulenverbindungen.

Zweck rechnet man die zu einem bestimmten Draht fließende gesamte Ladung als Produkt aus Spannungsdifferenz und Kapazität: Das Ergebnis muss null sein oder mindestens klein gegenüber der zur Eingangswicklung fließenden Ladung.

Die Fig. 11 und 12 ergeben die Spannungsverteilung in der Oberspannungswicklung eines 2500-kVA-Transformators 77283/24420 V. Diese Wicklung wird als 3-Lagen-Wicklung mit Schutzring betrach-

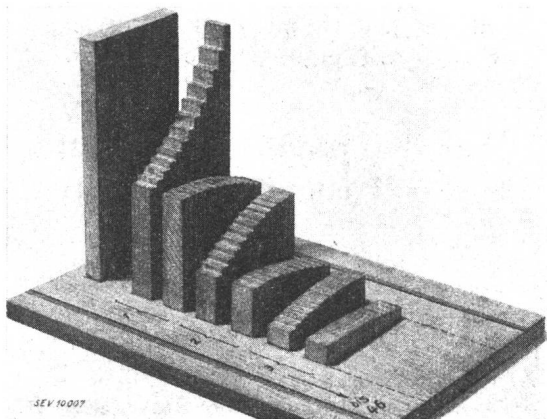


Fig. 16.

Räumliches Modell der Spannungsverteilung in der Oberspannungswicklung eines 2500-kVA-Transformators, der Fig. 12 entsprechend. Mit Spulenverbindungen.

tet: die innere Unterspannungswicklung und die äussere Regulierwicklung werden als geerdet angenommen. Die Berechnung wurde nach Variante A durchgeführt.

Die Fig. 13 und 14 ergeben die Spannungsverteilung in der gleichen Wicklung des gleichen Transformators, aber unter der Annahme, dass die äussere Regulierwicklung isoliert ist. Die Berechnung wurde nach Variante B durchgeführt.

Schliesslich soll noch auf eine sehr lehrreiche Darstellung dieser Ergebnisse aufmerksam gemacht werden. Die Photographien Fig. 15 und 16 stellen Aufnahmen eines Modells dar, welches so entstanden ist, dass man auf jeden Drahtquerschnitt der Fig. 11 und 12 senkrecht zur Papierebene Holzleisten gestellt hat, deren Längen den zugehörigen Spannungen genau proportional sind.

### VIII. Entwurf eines elektrischen Modells für die Berechnung der kapazitiven Spannungsverteilung in einer Mehrlagenwicklung

Die geschilderte Berechnungsmethode ist auf folgende Einschränkungen angewiesen.

1. Die Anzahl Lagen kann prinzipiell beliebig sein, darf aber praktisch nicht höher als 3 sein, wenn man sich an relativ einfache Rechnungen halten will.

2. Die Wicklung muss vollkommen homogen sein, d. h. ihr Aufbau muss vollständig der gleiche bleiben, einerseits in der axialen Richtung, andererseits in der radialen Richtung.

3. Der Einfluss der Spulenverbindungen wird nur durch ein angenähertes Verfahren berücksichtigt.

Die mathematische Lösung an und für sich ist aber streng, so dass die Rechnungsergebnisse, abgesehen von den obigen Vorbehalten, richtig sein sollten, wenn die charakteristischen Kapazitäten selbst richtig sind. Es wird aber im folgenden gezeigt, wie man sich mit Hilfe eines elektrischen Modells von den drei genannten Einschränkungen befreien kann. Kehren wir zur Fig. 1 zurück. Darin sei die angestossene Eingangswicklung, z. B. die Windung (1) (1), während die letzte Windung (m) (n) direkt geerdet sei. Wir denken uns jede Kapazität durch einen ohmschen Widerstand ersetzt,

dessen Wert proportional dem reziproken Wert der Kapazität ist. Es entsteht auf diese Weise ein vermaschtes Netz, wo jeder Knotenpunkt einer Windung entspricht. Legt man nun den Punkt (1) (1) an die Gleich- oder Niederfrequenzspannung 100 V und den Punkt (m) (n) samt äusserem Rand an die Spannung 0 V, so nimmt jeder Knotenpunkt eine Spannung an, welche genau der kapazitiven Spannungsverteilung unserer Wicklung entspricht. Die Begründung hiefür liegt in den folgenden Analogien:

Für die Wicklung:

Summe der zu jeder Windung fliessenden Ladungen gleich null.

Für das Modell:

Summe der zu jedem Knotenpunkt fliessenden Ströme gleich null.

Für die Wicklung:

Ladung gleich Spannungsdifferenz mal Kapazität.

Für das Modell:

Strom gleich Spannungsdifferenz mal reziproken Wert des Widerstandes.

Der Einfluss der Spulenverbindungen wäre dadurch nachzuahmen, dass man die zugehörigen Knotenpunkte durch eine widerstandslose Lasche miteinander verbindet.

Man könnte sich die praktische Ausführung eines solchen Modells folgendermassen vorstellen: Eine Art Schalttafel würde eine grössere Anzahl einstellbarer Widerstände enthalten, die man nach Belieben schalten kann. Eine gewisse Spannung wird zwischen «Eingangsknotenpunkt» und «Erdeknnotenpunkt» gelegt, und die Spannung jedes Knotenpunktes wird direkt durch Abstecken mit einem Voltmeter gemessen.

Somit wäre es möglich, ohne komplizierte Rechnungen und in kurzer Zeit die kapazitive Spannungsverteilung einer beliebigen Transformatorwicklung zu bestimmen, ohne an irgendeine Einschränkung mit Rücksicht auf die mathematischen Schwierigkeiten des Problems gebunden zu sein.

## Ueber die Möglichkeit des Betriebes schweizerischer Nebenbahnen und Nebenlinien mittels Akkumulatoren-Triebfahrzeugen

Von Alfred Degen, Basel.

621.335 - 835

Nach einer kurzen Einleitung über die Dampf- und die elektrische Traktion wird die Entwicklung des Betriebes mit Akkumulatoren-Triebfahrzeugen im In- und im Ausland (Europa) besprochen. Anschliessend wird untersucht, ob in der Schweiz mit ihrer geringen noch vorhandenen Dampftraktion Möglichkeiten für die Einführung des Akkumulatorenbetriebes bestehen. Es folgt der Vergleich der Eigenschaften des Dampfbetriebes mit denjenigen des Akkumulatorenbetriebes. Im letzten Kapitel wird die Wirtschaftlichkeit des Akkumulatorenbetriebes behandelt. Die Durchrechnung ergibt, dass der Akkumulatorenbetrieb dem Dampftrieb im allgemeinen nur bei sehr hohen Kohlenpreisen überlegen ist. Eine allgemeine Regel lässt sich jedoch nicht aufstellen, sondern es muss jeder Fall einzeln durchgerechnet werden. Es wird gezeigt, dass die höheren Jahreskosten des Akkumulatorenbetriebes nicht auf die Energiepreise, sondern auf den Unterhalt und die Erneuerung der Batterie zurückzuführen sind.

Après un bref exposé sur la traction à vapeur et électrique, l'auteur décrit le développement de la traction par locomotives à accumulateurs en Suisse et à l'étranger (Europe). Il examine ensuite la possibilité d'introduire ce système de traction en Suisse, où la traction à vapeur n'est plus beaucoup utilisée. Il compare les caractéristiques du service à vapeur avec celles du service à accumulateurs. Le dernier chapitre traite du rendement économique du service à accumulateurs. Les calculs montrent que ce dernier n'est généralement avantageux que lorsque les prix du charbon sont très élevés. Chaque cas doit être examiné en particulier, car il n'est pas possible d'établir des règles générales à ce sujet. Les frais annuels élevés du service à accumulateurs ne proviennent pas du prix élevé de l'énergie électrique, mais bien de l'entretien et du remplacement des batteries.