

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 34 (1943)  
**Heft:** 14

**Artikel:** Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator zur Erzeugung hochgespannten Gleichstroms aus Wechselstrom [i.e. Wechselstrom]  
**Autor:** Jaggi, Martin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1061750>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Da nun mehrere Sendestationen an der selben Leitung liegen, ist zu vermeiden, dass Meldungen verschiedener Sendestationen gleichzeitig durchgegeben werden. Dies wird damit erreicht, dass die Abgreifwähler  $D_1 \dots D_n$  der verschiedenen Sendestationen an die Verteilwähler  $D_v$  derart versetzt angeschlossen werden, dass in einem ganzen Sektor nur ein Abgreifwähler nach dem andern dreht und nie gleichzeitig mehrere solche Wähler drehen können. Da jedoch die Impulse der  $k$ -Kontakte alle Verteilwähler  $D_v$  gleichzeitig zum Arbeiten bringen, werden die überzähligen Anfangs-Stellungen dieser Wähler mit dem Telefonwähler  $D_t$  verbunden. Die Wähler in den Sendestationen eines Sektors arbeiten also in folgender Weise:

Mit dem ersten Impuls der  $k$ -Kontakte gehen alle Verteilwähler in die Stellung 1 und alle Telefonwähler  $D_t$  drehen einmal durch. Dann machen sämtliche Verteilwähler  $D_v$  den Schritt 2 und der Abgreifwähler  $D_1$  der Sendestation  $A$  dreht durch. Gleichzeitig kommen die Telefonwähler  $D_t$  der

folgenden Sendestationen ein zweites Mal zum Arbeiten. Nun gehen die Wähler  $D_v$  in die Stellung 3; der Abgreifwähler  $D_2$  der Station  $A$  dreht durch und gleichzeitig arbeiten wieder die Telefonwähler der übrigen Stationen. In unserem Beispiel kommen erst jetzt, wenn der Verteilwähler der Station  $A$  heimdreht und der Verteilwähler der Station  $B$  den vierten Schritt macht, die Abgreifwähler der Station  $B$  an die Reihe. Hat dann auch der letzte Abgreifwähler der letzten Station durchgedreht, so wird in der Empfangsstation der Fortschaltmechanismus abgestellt und der Synchronwähler  $D$  geht in seine  $O$ -Stellung, wo er für eine neue Anlassung bereit bleibt.

Selbstverständlich enthält die Fernmeldeanlage in Wirklichkeit noch Einrichtungen, die im Schema nicht angedeutet, oder in der Beschreibung nicht erwähnt sind. Da aber der vollständige prinzipielle Aufbau nur einen engern Kreis von Spezialisten interessieren dürfte, wird auf dessen Darstellung verzichtet.

## Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator zur Erzeugung hochgespannten Gleichstroms aus Wechselstrom\*)

Von Martin Jaggi, Zürich

621.319.52

*Der in der Kernphysik und in der Röntgentechnik verwendete Höchstspannungs-«Kaskadengenerator» besitzt eine sehr charakteristische und exakt reproduzierbare Spannungsaufbau-Kurve. Dieser Spannungsaufbau wird an einer ein- und an einer zweistufigen Schaltung theoretisch und experimentell untersucht.*

*Theoretisches: Durch ein Rechenverfahren, das sich auch auf den drei- und mehrstufigen Kaskadengenerator übertragen lässt, wird der Aufladevorgang vom Zeitpunkt des Einschaltens bis zum asymptotischen Uebergang in den stationären Zustand berechnet.*

*Experimentelles: An ein- und zweistufigen Versuchsgereäten wird der Einschwingungsvorgang mit einem Elektronenstrahl-Oszillographen untersucht. An zwei zahlenmässig durchgerechneten Beispielen wird gezeigt, dass die theoretischen Betrachtungen mit den experimentellen Untersuchungen übereinstimmen.*

*La courbe de tension des générateurs en cascade à très haute tension utilisés en physique nucléaire et en radiologie est très caractéristique et peut être exactement reproduite. L'auteur examine, des points de vue théorique et expérimental, la constitution de cette tension pour un couplage à un seul étage et un couplage à deux étages.*

*En usant d'une méthode de calcul qui s'applique également aux générateurs en cascade à trois étages et plus, l'auteur détermine l'allure de la charge entre le moment de l'enclenchement et celui du passage asymptotique à l'état stationnaire.*

*Il examine ensuite, à l'aide d'un oscillographe à rayons électroniques, l'augmentation de la tension par oscillations de générateurs à un étage et à deux étages. Il démontre, par deux exemples numériques, que les considérations théoriques concordent avec les résultats expérimentaux.*

### I. Einleitung und Problemstellung

In den letzten zehn Jahren haben die Fortschritte auf dem Gebiete der Kernphysik die Höchstspannungstechnik vor neue grosse Aufgaben gestellt. Als besonders erfolgreiches Verfahren zur Erzeugung der für diesen Zweck erforderlichen extrem hohen Gleichspannungen (einige Millionen Volt) erwies sich die in der Literatur als «Greinacher-Vervielfachungs-Schaltung» oder «Kaskaden-Schaltung» bezeichnete Methode. Die Kaskaden-Schaltung wurde im Jahre 1920 von Greinacher angegeben<sup>1)</sup>.

#### Wirkungsweise der $n$ -stufigen Kaskaden-Schaltung.

In den beiden grundlegenden Arbeiten von Greinacher<sup>1)2)</sup> wird gezeigt, dass man mit  $2n$  Kondensatoren und  $2n$  Gleichrichtern aus einer Wechselspannung eine konstante Gleichspannung vom  $2n$ -fachen Betrag des Wechselspannungs-Scheitelwertes  $u_s$  herstellen kann. Wenn zwischen  $P_1$  und dem dauernd geerdeten Schaltpunkt  $P_0$  eine Wechselspannung gelegt wird, so kann, wie sich aus dem Schema Fig. 1 leicht ersehen lässt, als stationärer Gleichgewichtszustand nur eine ganz bestimmte Potentialverteilung in Frage kommen. Wegen der Durchlassrichtung der Ventile kann sich das Potential von  $P_2$  nur innerhalb der Grenzen  $2u_s$  und Null, dasjenige von  $P_4$  nur innerhalb  $4u_s$  und  $2u_s$  usw. bewegen (Fig. 2). Aus demselben Grund müssen die Punkte  $P_3, P_5, P_7, \dots$  im Gleichgewichtszustand konstante Potentiale  $2u_s, 4u_s, 6u_s, \dots$  annehmen. Alle Ventile und Kondensatoren erhalten maximal eine Spannung  $2u_s$ . Eine Ausnahme bildet der Kondensator  $C_1$ , der eine konstante Gleichspannung  $u_s$  auszuhalten hat. Die vom  $n$ -stufigen Gerät erzeugte konstante Hochspannung  $2nu_s$  setzt

\*) Siehe auch die vorläufige Mitteilung Helv. phys. acta, Bd. 15 (1942), S. 339.

<sup>1)</sup> Greinacher, Bulletin SEV, Bd. 11 (1920), S. 59.

<sup>2)</sup> Greinacher, Z. Phys., Bd. 4 (1921), S. 195.

sich additiv aus den einzelnen Stufenspannungen  $2u_s$  zusammen und kommt zwischen die Schaltpunkte  $P_{2n+1}$  und  $P_0$  zu liegen.

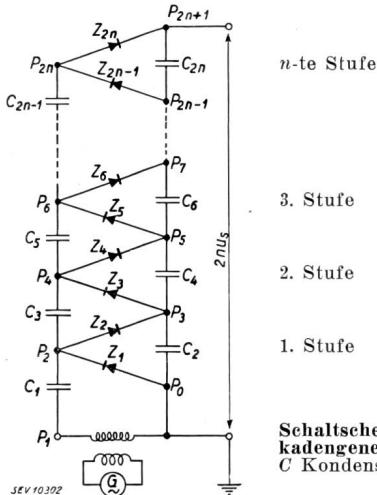


Fig. 1. Schaltschema des n-stufigen Kaskadengenerators (nach Greinacher) C Kondensator, Z Ventil, G Wechselstromquelle.

Die experimentelle Bestätigung dieser Wirkungsweise durch Greinacher<sup>3)</sup> geschah an ein- bis fünf-fachen Versuchsgeräten (Eingangsspannung 220 V, 50 Hz, Grätzsche Ventilzellen) durch elektrometrische Ausmessung und Registrierung der Aufladungsoszillogramme mit einer Braunschen Röhre.

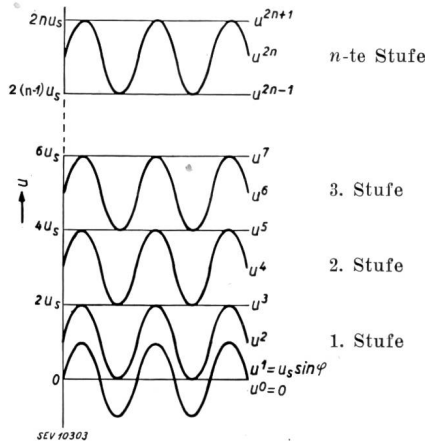


Fig. 2.

Potentialverteilung im Kaskaden-Generator während des stationären Zustandes

$u^1 = u_s \sin \varphi$ (Definition) (1)	$u^5 = 4 u_s$ (5)
$u^2 = u_s (\sin \varphi + 1)$ (2)	$u^{2n-1} = 2(n-1) u_s$ (6)
$u^3 = 2 u_s$ (3)	$u^{2n} = u_s (\sin \varphi + 2n - 1)$ (7)
$u^4 = u_s (\sin \varphi + 3)$ (4)	$u^{2n+1} = 2n u_s$ (8)

Es sei bei dieser Gelegenheit noch einmal darauf hingewiesen, dass die beiden von Greinacher stammenden einfachen Gleichrichter-Schaltungen (mit je zwei Kondensatoren und Gleichrichtern), nämlich die einstufige Kaskaden-Schaltung Fig. 4a (Spezialfall der n-stufigen Schaltung Fig. 1) und die in der Radioindustrie bekannte Verdopplungs-Schaltung (Fig. 4b) trotz der Gleichheit der erzeugten Endspannung eine durchaus verschiedenartige Wirkungsweise besitzen<sup>4)</sup>. Auch diese (nicht in den Bereich der vorliegenden Arbeit fallende) Verdopplungs-Schaltung wurde neulich für Höchstspannungszwecke zur Ausführung gebracht, nämlich in dem an der Schweizerischen Landesausstellung 1939 als schweizerische Neuschöpfung gezeigten «Tensator» für 3 Mil-

<sup>3)</sup> Siehe <sup>2)</sup>, S. 201.

<sup>4)</sup> Eine Gegenüberstellung der beiden Schaltungen befindet sich in <sup>2)</sup>, S. 196 unten.

lionen Volt Gleichspannung<sup>5)</sup>. Während sich der Kaskaden-Generator durch sein trägheitsloses, rein elektrisches Funktionieren auszeichnet, stellt der Tensator ein Beispiel des rationellen Ineinanderarbeitens mechanischer und elektrischer Dynamik dar.

**Kaskaden-Generator.**

Im Jahre 1932 wurde die Kaskaden-Schaltung einerseits von Cockroft und Walton<sup>6)</sup> (Cambridge), und andererseits von Bowers<sup>7)</sup> (Eindhoven) erstmalig für Höchstspannungszwecke zur praktischen Ausführung gebracht. Die Bedeutung des «Kaskaden-Generators» (abgek. KG) für die experimentelle Kernphysik wurde durch die Arbeit von Cockroft und Walton über die künstliche Spaltung des Lithium-Atoms eindeutig erwiesen. Durch die von Bowers und seinen Mitarbeitern (Philips) vorgenommenen Verbesserungen (z. B. an der Ventilheizung<sup>8)</sup>) wurde der KG soweit zur technischen Vollkommenheit gebracht, dass heute eine derar-

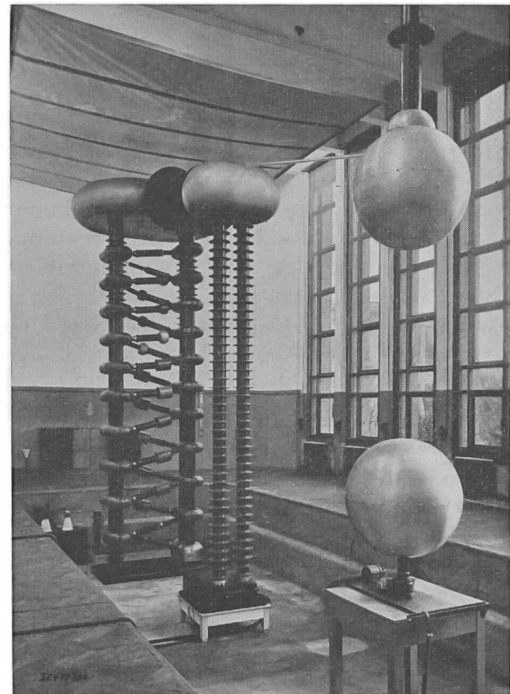


Fig. 3.

Zehnstufiger Kaskaden-Generator für 2 Millionen Volt und 3 Milliampere (Philips)

tige Höchstspannungsanlage praktisch ohne Risiko nach vorgängigen Berechnungen konstruiert werden kann. Als Beispiel eines modernen Kaskaden-Generators möge Fig. 3 dienen. Einer weiteren Steigerung der bis jetzt erreichten Gleichspannungen durch Aufbau weiterer Stufen scheinen keine Hindernisse theoretischer oder praktischer Natur im Wege zu stehen, denn die von den einzelnen Kon-

<sup>5)</sup> Imhof: Der Tensator. Elektrizität, Technisches Zeitbild aus der Schweizerischen Landesausstellung 1939, S. 182. Verlag: «Elektrowirtschaft», Zürich, und Imhof, Helv. Phys. Acta, Bd. 12 (1939), S. 285.

<sup>6)</sup> Cockroft und Walton, Proc. roy. Soc., Lond. A., Bd. 136 (1932), S. 619.

<sup>7)</sup> Bowers, Radiology, Bd. 22 (1934), S. 163.

<sup>8)</sup> Bowers und Kuntke, Z. techn. Phys., Bd. 18 (1937), S. 209.

densatoren und Ventilen auszuhaltenen Spannungen sind nur von der Eingangsspannung, nicht jedoch von der produzierten Höchstspannung abhängig.

*Problemstellung.*

Die eingangs beschriebene Wirkungsweise des aufgeladenen KG lässt sich ohne weiteres begründen, aber die exakte Beschreibung (bzw. Berechnung) des Spannungsverlaufes vom Zeitpunkt des Einschaltens bis zum asymptotischen Uebergang in diesen stationären Zustand bereitet wegen der Mannigfaltigkeit der Schaltvorgänge einige Schwierigkeiten. Während sich die Autoren <sup>6)</sup> bis <sup>9)</sup> auf die Beschreibung des stationären Zustandes beschränken, hat Greinacher <sup>10)</sup> für einen einfachen Spezialfall (einstufiger KG, Einschaltung in der Nullphase) eine genaue Erklärung der asymptotischen Angleichung an die konstante Endspannung gegeben. Aus den in der genannten Arbeit reproduzierten photographischen Oszillogrammen (l. c. Fig. 9) ist ersichtlich, dass man sich *alle* Aufladevorgänge (auch diejenigen komplizierter Spannungsvervielfacher) auf diese Weise vorzustellen hat.

Die Ausarbeitung einer umfassenden Einschwingungstheorie des *n*-stufigen KG wäre also sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Hinsicht recht aufschlussreich, aber in ihrer Allgemeinheit eine nicht minder umfangreiche Angelegenheit. Die exakte Berechnung der Einschwingung hat hier auch den Vorteil der genauen experimentellen Prüfbarkeit, denn, im Gegensatz zu allen Hochfrequenz-Geräten, besitzt der KG eine durch die Versuchsbedingungen eindeutig vorgezeichnete und exakt reproduzierbare Spannungsaufbaukurve.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, dem soeben angedeuteten Ziel durch eine Reihe von theoretischen und experimentellen Untersuchungen näher zu kommen. Die theoretischen Untersuchungen erstrecken sich in erster Linie auf den ein- und zwei-stufigen unbelasteten KG mit Kondensatoren gleicher Kapazität <sup>11)</sup>.

**II. Theoretischer Teil.**

**Zusammenfassung des theoretischen Teils:** Während jeder Wechselspannungsperiode durchläuft der einschwingende KG eine bestimmte Zahl genau definierter Betriebszustände. Die zeitliche Potentialkurve irgendeines Generatorpunktes besteht infolgedessen aus einer regelmässigen Folge von Sinuskurvenstücken. Für die formelmässige Berechnung des Aufladevorganges wird der Anfangszustand einer beliebigen (*k*-ten) Einschwingungsperiode mit dem Anfangszustand der nächstfolgenden Periode in Beziehung gebracht. Die nach diesem Verfahren als Rekursionsformeln ermittelten Differenzgleichungen liefern alsdann die gesuchten Spannungsaufbaufunktionen. Die asymptotische Annäherung an den stationären Zustand lässt sich beschreiben als eine schrittweise Verschiebung der zeitlichen Gültigkeitsbereiche dieser Betriebszustände. Mit der zunehmenden Aufladung des KG

<sup>9)</sup> Bouwers: Elektrische Höchstspannungen. Technische Physik in Einzeldarstellungen, Bd. 1. Verlag: J. Springer, Berlin.

<sup>10)</sup> Siehe <sup>2)</sup>, S. 195/196.

<sup>11)</sup> In dieser Zeitschrift sind nebst den grundlegenden Veröffentlichungen von Greinacher <sup>1)</sup> noch zwei weitere Arbeiten erschienen, die auch den Kaskaden-Generator berühren:

W. Klein, Bull. SEV, Bd. 29 (1938), S. 282.

H. Waeffler, Bull. SEV, Bd. 31 (1940), S. 282.

schumpfen die Gültigkeitsbereiche der periodisch auftretenden *stromführenden* Betriebszustände zusammen und werden schliesslich restlos verdrängt durch den *stromlosen* Betriebszustand.

*A. Vorbemerkungen:*

Den theoretischen Ueberlegungen sind durchwegs die Schaltungen und Bezeichnungen der Fig 4a und 5 zu Grunde gelegt. Der Schaltpunkt *P*<sub>0</sub> ist dauernd mit der Erde verbunden. Die Wechselspannung  $u^1 = u_s \sin(\omega t)$  wird an den *Eingangspolen* *P*<sub>1</sub> und *P*<sub>0</sub> angeschlossen. Alle Kapazitäten *C*<sub>1</sub>, *C*<sub>2</sub>, ... sind gleich gross. Folgende Versuchs-

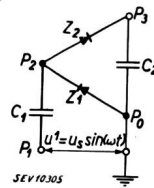


Fig. 4a. Einstufiger KG

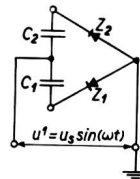


Fig. 4b. Verdopplungsschaltung

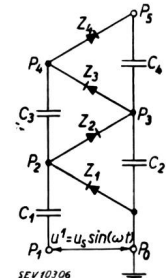


Fig. 5. Zweistufiger KG

bedingungen werden von der Theorie vorausgesetzt und bei den experimentellen Untersuchungen angestrebt:

1. Die Gleichrichter wirken wie ideale Ventile, d. h. die Ventilwiderstände seien in der Durchlassrichtung konstant und in der Sperrichtung unendlich gross.

2. Alle ohmschen Widerstände, auch die Widerstände der Ventile in der Durchlassrichtung sollen gegenüber den kapazitiven Widerständen der Kondensatoren vernachlässigt werden können.

3. Die Kondensatoren seien verlustlos und für Gleichstrom isolierend.

Als *Periode* ist der Zeitraum zwischen zwei Maximumdurchgängen der Eingangswchselspannung  $u^1$  zu verstehen. So beginnt beispielsweise die *k*-te Periode der Einschwingung in der Phase  $\varphi_k^1 = \frac{4k-3}{2} \pi$  und endigt bei Phase  $\varphi_{k+1}^1 = \frac{4(k+1)-3}{2} \pi$ .

Die im Moment  $\varphi_k^1$  in den Schaltpunkten *P*<sub>1</sub>, *P*<sub>2</sub>, ... *P*<sub>α</sub> ... existierenden Potentiale werden als *k*-te «Einsatzpotentiale»  $u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^\alpha \dots$  bezeichnet <sup>12)</sup>. Der *Periodenindex* *k* = 1, 2, 3 ... zählt die Perioden vom Zeitpunkt des ersten Maximumdurchganges an.

Wenn man nun annimmt, dass sich vor der Inbetriebsetzung alle Generatorelemente auf Nullpotential befinden, so lassen sich während jeder Aufladepériode des *einstufigen* KG insgesamt drei verschiedene *Betriebszustände* unterscheiden, die wir vorläufig ohne nähere Begründung wie folgt angeben können:

<sup>12)</sup> Bei der Bezeichnung der Potentiale  $u_k^\alpha$  beziehen sich der obere Index auf den Schaltpunkt *P*<sub>α</sub>, der mittlere und der untere Index auf das *n*-te Zeitintervall der *k*-ten Periode. Die Verwendung einer konsequenten dreifachen Indicesbezeichnung ist beim mehrstufigen KG unumgänglich.



a)  $0 < u^2 < u^3$  (Fig. 6a). In diesem *stromlosen* Betriebszustand sind beide Ventilverbindungen unterbrochen. Die Punkte  $P_2$  und  $P_3$  sind sowohl unter sich als auch gegenüber den Eingangspolen  $P_1$  und  $P_0$  isoliert, jedoch vermittelt der Kondensatoren mit der Eingangsseite kapazitiv gekoppelt. Infolgedessen wird jede Potentialschwankung von  $P_1$  unverändert auf  $P_2$  übertragen.

b)  $0 = u^2 < u^3$  (Fig. 6b). Das Ventil  $Z_1$  verschafft eine Verbindung von  $P_0$  nach  $P_2$  und  $C_1$  nach  $P_1$ . Wegen der ununterbrochenen Erdung von  $P_0$  bleibt das Potential in  $P_3$  auch in diesem *stromführenden* Betriebszustand unverändert.

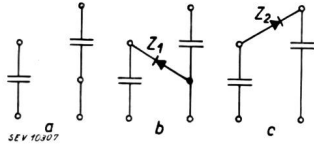


Fig. 6.  
Die drei Betriebszustände des einstufigen KG

c)  $0 < u^2 = u^3$  (Fig. 6c). Ein weiterer *stromführender* Betriebszustand liegt dann vor, wenn die beiden Kondensatoren durch das Ventil  $Z_2$  in Serie geschaltet werden. Jede eingangsseitige Potentialänderung wird nun in dem Verbindungsstück  $P_2$ — $P_3$  zur Hälfte mitgemacht.

Im gleichen Zusammenhang lässt sich auch jedes Einschwingungsstadium des *zweistufigen* KG durch einen der folgenden fünf Betriebszustände kennzeichnen:

- a)  $0 < u^2 < u^3 < u^4 < u^5$  Fig. 7a stromlos
- b)  $0 < u^2 < u^3 = u^4 < u^5$  Fig. 7b stromführend
- c)  $0 = u^2 < u^3 = u^4 < u^5$  Fig. 7c stromführend
- d)  $0 < u^2 < u^3 < u^4 = u^5$  Fig. 7d stromführend
- e)  $0 < u^2 = u^3 < u^4 = u^5$  Fig. 7e stromführend

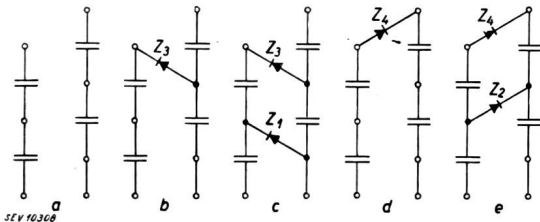


Fig. 7.  
Die fünf Betriebszustände des zweistufigen KG

Jede beliebige ( $k$ -te) Wechselstromperiode wird im folgenden in mehrere *Zeitintervalle* unterteilt. Jedes dieser Zeitintervalle ist einem bestimmten Betriebszustand zugeordnet. Charakteristisch für das Verhalten eines Schaltpunktes  $P_\alpha$  während des  $n$ -ten Zeitintervalles der  $k$ -ten Periode ist jeweils das Verhältnis zwischen der an diesem Punkt stattfindenden Potentialänderung  $\Delta u_n^\alpha$  und der ursächlichen eingangsseitigen Potentialbewegung  $\Delta u^1$ :

$$R_{\alpha, n} = \frac{\Delta u_n^\alpha}{\Delta u^1}$$

Wegen der Gleichheit der Kapazitäten sind diese «*Potentialteilungsfaktoren*»  $R_{\alpha, n}$  einfache rationale Verhältniszahlen. Vgl. Tabelle I und Matrix (26).

**B. Der einstufige Kaskaden-Generator.**

1. *Die Schaltvorgänge während einer Periode:*  
Wenn zwischen den Eingangspolen  $P_1$  und  $P_0$  eine Wechselspannung  $u^1 = u_s \sin \varphi$  angeschlossen wird, so kann man allgemein feststellen, dass in jeder Einschwingungsperiode regelmässig vier *Betriebsumschaltungen* vorkommen. Bevor die Eingangsspannung den positiven Scheitelwert durchläuft, herrscht der Betriebszustand Fig. 6c. Deshalb haben zu Beginn der  $k$ -ten Periode (d. h. in der Phase  $\varphi_k^1$ ) die Schaltpunkte  $P_2$  und  $P_3$  gleiche Potentiale:

$$\text{Einsatzpotentiale } u_k^2 = u_k^3 \quad (1)$$

Das mit dem Maximumdurchgang einsetzende *erste Zeitintervall* der  $k$ -ten Einschwingungsperiode (von  $\varphi_k^1 = \frac{4k-3}{2} \pi$  bis  $\varphi_k^2$ , Fig. 6a) ist

gekennzeichnet durch die plötzliche Sperrung des Ventils  $Z_2$ . Währenddem das Einsatzpotential von  $P_3$  weiterhin andauert, bewegt sich  $u^2$  mit derselben Amplitude und Phase wie  $u^1$  bis das Nullpotential erreicht wird:

$$\begin{aligned} u_k^2 &= u_k^3 - u_s + u_s \sin \varphi \\ u_k^3 &= u_k^3. \end{aligned}$$

Das weitere Absinken der Eingangsspannung im *zweiten Zeitintervall* (von  $\varphi_k^2$  bis  $\varphi_k^3 = \frac{4k-1}{2} \pi$ ,

Fig. 6b) hat lediglich ein Aufladen des Kondensators  $C_1$  über das Ventil  $Z_1$  zur Folge:

$$\begin{aligned} u_k^2 &= 0 \\ u_k^3 &= u_k^3. \end{aligned}$$

*Drittes Zeitintervall* (von  $\varphi_k^3$  bis  $\varphi_k^4$ , Fig. 6a): Nach dem Erreichen des negativen Scheitelwertes der Eingangsspannung wird die Verbindung über  $Z_1$  schlagartig unterbrochen und der stromlose Betriebszustand ist in dieser Periode zum zweiten Mal realisiert:

$$\begin{aligned} u_k^2 &= u_s + u_s \sin \varphi \\ u_k^3 &= u_k^3 \end{aligned} \quad (2)$$

*Viertes Zeitintervall* (von  $\varphi_k^4$  bis  $\varphi_{k+1}^1 = \frac{4(k+1)-3}{2} \pi$ , Fig. 6c): Wenn  $u_k^3$  das konstante

Potential von  $P_3$  erreicht hat, zündet  $Z_2$  und die Serieschaltung der beiden Kondensatoren ist wieder hergestellt. Infolge der spannungshalbierenden Eigenschaft dieses Betriebszustandes ist die Amplitude der zu suchenden Funktion nur halb so gross wie  $u_s$ . Die Minima dieser Kurve befinden sich auf halber Höhe zwischen der Abszissenachse und dem Einsatzpotential (vgl. Fig. 10).

$$u_k^2 = u_k^4 = \frac{1}{2} u_k^3 + \frac{1}{2} u_s + \frac{1}{2} u_s \sin \varphi \quad (3)$$

Dieser Spannungsschub kommt erst dann zum Stillstand, wenn der positive Scheitelwert erreicht

wird und der soeben vollendete Zyklus sich ein weiteres Mal wiederholt. Der Uebersichtlichkeit halber sind die Eigenschaften der vier Zeitintervalle in Tabelle I zusammengestellt.

wenn in (3) die Phase  $\varphi_{k+1}^1$  eingesetzt wird:

$$u_{k+1}^0 = u_{k+1}^3 = u_s + \frac{1}{2} u_k^0 = u_s + \frac{1}{2} u_k^3 \quad (5)$$

Tabelle I.

Periode . . . . .	$k - 1$	$k$	$k$	$k$	$k$	$k + 1$
Zeitintervall $n$ . . . . .	4	1	2	3	4	1
Bewegungsrichtung der Eingangsspannung $u^1$ . . . . .	steigend	fallend	fallend	steigend	steigend	fallend
Betriebszustand . . . . .	Fig. 6c	Fig. 6a	Fig. 6b	Fig. 6a	Fig. 6c	Fig. 6a
Spannungsverteilung . . . . .	$0 < u^2 = u^3$	$0 < u^2 < u^3$	$0 = u^2 < u^3$	$0 < u^2 < u^3$	$0 < u^2 = u^3$	$0 < u^2 < u^3$
Potentialteilungsfaktor von $P_2$ . . . . .	$R_{2,4} = \frac{1}{2}$	$R_{2,1} = 1$	$R_{2,2} = 0$	$R_{2,3} = 1$	$R_{2,4} = \frac{1}{2}$	$R_{2,1} = 1$
Potentialteilungsfaktor von $P_3$ . . . . .	$R_{3,4} = \frac{1}{2}$	$R_{3,1} = 0$	$R_{3,2} = 0$	$R_{3,3} = 0$	$R_{3,4} = \frac{1}{2}$	$R_{3,1} = 0$
Ventil $Z_1$ . . . . .	Sperrung	Sperrung	Durchlassung	Sperrung	Sperrung	Sperrung
Ventil $Z_2$ . . . . .	Durchlassung	Sperrung	Sperrung	Sperrung	Durchlassung	Sperrung

2. Einfluss der Einschaltphase: Der besondere Verlauf der Spannungsaufbaukurven ist weitgehend bedingt durch die Einschaltphase der Wechselspannung. Zur Abklärung dieses Verhaltens wird das erste Einsatzpotential als Funktion des Scheitelwertes  $u_s$  geschrieben:

$$u_1^0 = q_1 u_s \quad (4)$$

Der so definierte *Einschaltkoeffizient*  $q_1$  ist einzig und allein von der Einschaltphase  $\beta$  der Wechselspannung bestimmt. Seine Abhängigkeit von dieser Phasenkonstante <sup>13)</sup>  $\beta$  ist leicht zu ermitteln, wenn die soeben durchgeführten Ueberlegungen noch einmal für den Spezialfall der *nullten* Einschwingungsperiode (d. h. vom Zeitpunkt des Einschaltens bis zum ersten Maximumdurchgang) vorgenommen werden. Wie hier nicht einzeln wiedergegeben, lassen sich *alle* Spannungsaufbaukurven,

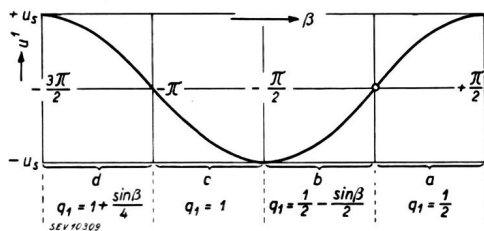


Fig. 8.

Einfluss der Einschaltphase  $\beta$  auf den Spannungsaufbau. Die vier Einschaltmöglichkeiten a, b, c und d.  
Ordinate:  $u^1 = u_s \sin \beta$ . Abszisse: Einschaltphase  $\beta$ .

je nach der Einschaltphase der Wechselspannung, in eine der vier *Einschaltmöglichkeiten* nach Fig. 8 einordnen. Der Einschaltkoeffizient  $q_1$  kann irgend einen Zahlenwert zwischen den Grenzen  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{5}{4}$  annehmen.

3. Rekursionsformel: Das Einsatzpotential der nächstfolgenden Periode lässt sich leicht berechnen,

<sup>13)</sup> Die Phasenkonstante  $\beta$  ist durch  $u^1 = u_s \sin(\omega t + \beta)$  definiert.

Dadurch ist eine einfache *Rekursionsformel* gewonnen, die den Aufladevorgang in geschlossener Form zu berechnen gestattet.

4. Schlussformel: Durch wiederholte Rekursion mit (5) findet man:

$$u_2^0 = u_s \left( 1 + \frac{1}{2} q_1 \right)$$

$$u_3^0 = u_s \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} q_1 \right)$$

$$u_k^0 = u_s \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-1}} q_1 \right)$$

oder

$$u_k^0 = u_s \varepsilon_k \quad (6)$$

$$\text{wo } \varepsilon_k = 2 \left[ \sum_{\lambda=1}^{k-1} \left( \frac{1}{2} \right)^\lambda + \left( \frac{1}{2} \right)^k q_1 \right]$$

gesetzt wird <sup>14)</sup>. Die stossweise Annäherung an den stationären Zustand wird jetzt dargestellt durch diese Grösse  $\varepsilon_k$ . Für den Spezialfall  $q_1 = 1$  (Einschaltung im Spannungsminimum) geht  $\varepsilon_k$  über in eine *konvergente geometrische Reihe*. Durch Anwendung der Summenformel

$$\sum_{\lambda=1}^{k-1} \left( \frac{1}{2} \right)^\lambda = \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}$$

erhält man aus (6)

$$u_k^0 = u_s \left( \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} + q_1 \right) \quad (7)$$

Die ausgerechneten Potentialfunktionen der einzelnen Schaltpunkte sind in Tabelle II eingetragen.

<sup>14)</sup> Die Formel bei Greinacher <sup>2)</sup>, S. 196, ist ein Spezialfall unserer Gl. (6) für  $q_1 = \frac{1}{2}$ .

Tabelle II.

Potentialfunktionen von $P_2$	Spannung am Kondensator $C_1$ $u_k^{1,2} = u_k^2 - u_s \sin \varphi$	Potentialfunktionen von $P_3 =$ Spannung am Kondensator $C_2$ $u_k^3 = u_k^{0,3}$
$u_k^2 = u_s \varepsilon_k - u_s + u_s \sin \varphi$ (8)	$u_k^{1,2} = u_s \varepsilon_k - u_s$ (10)	$u_k^1 = u_s \varepsilon_k$ (6a)
$u_k^2 = 0$	$u_k^{1,2} = -u_s \sin \varphi$ (11)	$u_k^3 = u_s \varepsilon_k$ (6b)
$u_k^3 = u_s + u_s \sin \varphi$ (2)	$u_k^{1,2} + u_s$	$u_k^2 = u_s \varepsilon_k$ (6c)
$u_k^4 = \frac{1}{2} u_s \varepsilon_k + \frac{1}{2} u_s + \frac{1}{2} u_s \sin \varphi$ (9)	$u_k^{1,2} = \frac{1}{2} u_0 \varepsilon_k + \frac{1}{2} u_s - \frac{1}{2} u_s \sin \varphi$ (12)	$u_k^3 = \frac{1}{2} u_s \varepsilon_k + \frac{1}{2} u_s + \frac{1}{2} u_s \sin \varphi$ (9)

5. Umschaltphasen: Die Umschaltphasen  $\varphi_k^{n-1}, \varphi_k^n, \varphi_k^{n+1}$  begrenzen die Zeitintervalle und bestimmen damit die Gültigkeitsbereiche der Potentialfunktionen  $u_k^{\alpha}$  und  $u_k^\beta$ . Unter Nummer 1 wurde festgestellt, dass das erste Zeitintervall immer im Maximum und das dritte Zeitintervall immer im Minimum der Eingangsspannung beginnt:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_k^1 &= +1 \\ \sin \varphi_k^3 &= -1 = -\sin \varphi_k^1 \end{aligned} \quad (13)$$

Die zwei übrigen Umschaltphasen  $\varphi_k^2$  und  $\varphi_k^4$  sind abhängig vom Periodenindex  $k$ . Der Uebergang vom ersten in das zweite Zeitintervall erfolgt immer dann, wenn  $P_2$  Erdpotential angenommen hat. Durch Nullsetzen von (8) (Tab. II) erhält man

$$\sin \varphi_k^2 = +(1 - \varepsilon_k)$$

Zur Bestimmung von  $\varphi_k^4$  macht man von der Tatsache Gebrauch, dass sich in dieser Phase die Kurven (2) und (9) (Tab. II) schneiden:

$$\sin \varphi_k^4 = -(1 - \varepsilon_k) = -\sin \varphi_k^2 \quad (14)$$

6. Uebergang in den stationären Zustand: Beim Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  führen die Gleichungen zu dem in der Einleitung bereits beschriebenen stationären Verhalten. So entspringt beispielsweise die spannungsverdoppelnde Eigenschaft des einstufigen KG unmittelbar aus (6), denn die Reihe  $\varepsilon_k$  konvergiert gegen den Grenzwert 2 (vgl. Fig. 2, Gl. (3)):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^3 = 2u_s$$

Die veränderlichen Umschaltphasen  $\varphi_k^2$  und  $\varphi_k^4$  nähern sich asymptotisch den festen Grenzen

$$\varphi_k^3 = \frac{4k-1}{2} \pi \quad \text{und} \quad \varphi_{k+1}^1 = \frac{4(k+1)-3}{2} \pi$$

Während dem Aufladevorgang findet eine schrittweise Verschiebung der Gültigkeitsbereiche der Potentialfunktionen statt. Mit zunehmender Periodenzahl verkürzen sich die stromführenden Zeitintervalle 2 und 4 auf Kosten der stromlosen Zeitintervalle 1 und 3. Das mit dem Grenzfall sich einstellende *elektrostatische Gleichgewicht* ist dadurch gekennzeichnet, dass die beiden stromlosen Zeitintervalle unbegrenzte Gültigkeit erhalten. Die monotone Aufladekurve  $u^3$  geht über in eine waagrechte Gerade, und die komplizierte Aufladekurve  $u^2$  entartet in eine reine Sinusschwingung [Fig. 2, Gl. (2)].

Als dann lassen die beiden Gl. (10) und (6) (Tab. II) erkennen, dass der Kondensator  $C_1$  nur eine halb so grosse Spannung auszuhalten hat wie  $C_2$ .

7. Stromstärken und Kondensatorladungen: Solange die stromführenden Zeitintervalle 2 und 4 noch auftreten, werden die Kondensatoren von stossartigen Ladeströmen  $i = C \frac{d}{dt} u_c$  durchflossen.

Durch Differentiation von (12) und (9) (Tab. II) erhält man die Kondensatorstromstärken des vierten Zeitintervalles:

$$\text{für } C_1: \quad i_k^{1,2} = -\frac{1}{2} C u_s \omega \cos \varphi \quad (15a)$$

$$\text{für } C_2: \quad i_k^{0,3} = +\frac{1}{2} C u_s \omega \cos \varphi^{15)} \quad (15b)$$

Dieselbe Operation ausgeübt auf (11) führt zum Ladestrom für den Kondensator  $C_1$  im zweiten Intervall:

$$i_k^{1,2} = -C u_s \omega \cos \varphi \quad (16)$$

Das Zeitintegral der Stromstärke über eine Periode  $\lambda$  liefert den Gesamtschub der Elektrizitätsmenge  $q$  während dieser Periode:

$$\Delta q_\lambda = \int_{t = \frac{\varphi_\lambda^1 - \beta}{\omega}}^{t = \frac{\varphi_{\lambda+1}^1 - \beta}{\omega}} i dt = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_\lambda^1}^{\varphi_{\lambda+1}^1} i d\varphi \quad (17)$$

Da beim Kondensator  $C_2$  nur das vierte Zeitintervall stromführend ist, werden in (17) die diesbezüglichen Grenzen (14) und (13) eingesetzt:

$$\Delta q_\lambda^{0,3} = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_\lambda^4}^{\varphi_{\lambda+1}^1} \frac{1}{2} C u_s \omega \cos \varphi d\varphi = +\frac{1}{2} C u_0 (2 - \varepsilon_k)$$

Die Gesamtladung von  $C_2$  setzt sich additiv aus den einzelnen Ladungsschüben  $\Delta q_\lambda^{0,3}$  zusammen:

$$q_k^{0,3} = q_o^{0,3} + \sum_{\lambda=1}^k \Delta q_\lambda^{0,3}$$

<sup>15)</sup>In den Gleichungen (15a) und (15b) handelt es sich natürlich um denselben Strom. Durch den Vorzeichenunterschied wird die entgegengesetzte Stromrichtung in den beiden Kondensatoren zum Ausdruck gebracht.

Die Kondensatorladung zu Beginn der ersten Periode ist durch die Einschaltphase bestimmt:

$$\mathbf{q}_0^{0,3} = C u_0 q_1$$

Zur Berechnung der Summe wird die Form (7) von  $\varepsilon_k$  benützt:

$$\sum_{\lambda=1}^k \Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{0,3} = C u_s (2 - q_1) \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}$$

Daraus ergibt sich für die Gesamtladung des Kondensators  $C_2$  nach Ablauf der  $k$ -ten Einschwingungsperiode

$$\mathbf{q}_k^{0,3} = C u_s \left[ q_1 + (2 - q_1) \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \right] \quad (18)$$

Beim Kondensator  $C_1$  besteht jede Periode aus zwei Ladungsschüben: Aus (16) folgt

$$\Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{1,2} = -\frac{1}{\omega} \int_{\varphi_{\lambda}^2}^{\varphi_{\lambda}^3} C u_s \omega \cos \varphi \, d\varphi = + C u_s (2 - \varepsilon_{\lambda})$$

und aus (15) folgt

$$\Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{1,2} = -\frac{1}{\omega} \int_{\varphi_{\lambda}^4}^{\varphi_{\lambda+1}^1} C u_s \omega \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2} C u_s (2 - \varepsilon_{\lambda})$$

Der Gesamtschub einer Periode ist also gleich gross wie bei  $C_1$ , nämlich

$$\Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{1,2} = +\frac{1}{2} C u_s (2 - \varepsilon_{\lambda})$$

Nach Ablauf der  $k$ -ten Einschwingungsperiode befindet sich auf den Belegungen von  $C_1$  die Gesamtladung

$$\mathbf{q}_k^{1,2} = \mathbf{q}_0^{1,2} + \sum_{\lambda=1}^k \Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{1,2}$$

wo

$$\mathbf{q}_0^{1,2} = C u_s q_1 - C u_s$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^k \Delta \mathbf{q}_{\lambda}^{1,2} = C u_s (2 - q_1) \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}$$

also zusammen

$$\mathbf{q}_k^{1,2} = C u_s \left[ q_1 - 1 + (2 - q_1) \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \right] \quad (19)$$

In Uebereinstimmung mit Abschnitt 6 folgt aus (18) für den stationären Zustand beim Kondensator  $C_2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{q}_k^{0,3} = 2 C u_s$$

und aus (19) beim Kondensator  $C_1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{q}_k^{1,2} = C u_s$$

### C. Der zweistufige Kaskaden-Generator

1. Die Potentialbewegung des Schaltpunktes  $P_4$  während einer Periode: Es soll als Beispiel der zeitliche Potentialverlauf irgendeines Schaltpunktes, z. B.  $P_4$ , vom Anfang bis zum Ende der  $k$ -ten Aufladepériode systematisch berechnet werden.

Immer bevor die Eingangsspannung den positiven Scheitelwert erreicht, herrscht der Zustand der Fig. 7e. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass die Schaltpunkte  $P_2$  und  $P_3$  einerseits, und die Schaltpunkte  $P_4$  und  $P_5$  andererseits gleiche Einsatzpotentiale haben [Analogie zu (1)]:

$$u_k^3 = u_k^0 \quad (19a)$$

$$u_k^4 = u_k^5 \quad (19b)$$

Im Umkehrpunkt  $\varphi_k^1$  werden die Verbindungen  $P_2 - P_3$  und  $P_4 - P_5$  unterbrochen. Das nun einsetzende erste Zeitintervall (von  $\varphi_k^1$  bis  $\varphi_k^2$ , Fig. 7a) dauert an, bis das Ventil  $Z_3$  zündet. Das Verhalten des Schaltpunktes  $P_4$  während des ersten Intervalls der  $k$ -ten Periode wird also beschrieben durch die Funktion

$$u_k^4 = u_k^4 + u_s [1 (\sin \varphi - \sin \varphi_k^1)] \quad (20)$$

Im zweiten Intervall (von  $\varphi_k^2$  bis  $\varphi_k^3$ , Fig. 7b) findet eine Dreiteilung der Spannung statt, die so lange anhält, bis  $Z_1$  die Erdverbindung mit  $P_2$  herstellt und dadurch alle Potentialbewegungen der höher liegenden Punkte zum Stillstand bringt:

$$(21)$$

$$u_k^4 = u_k^4 + u_s \left[ 1 (\sin \varphi_k^2 - \sin \varphi_k^1) + \frac{1}{3} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^2) \right]$$

oder, wenn das Potential von  $P_4$  im Moment der Umschaltphase  $\varphi_k^2$  mit  $u_k^{1,2}$  bezeichnet wird:

$$u_k^4 = u_k^{1,2} + u_s \left[ \frac{1}{3} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^2) \right] \quad (21a)$$

Im dritten Zeitintervall (von  $\varphi_k^3$  bis  $\varphi_k^4$ , Fig. 7c) wird lediglich der Kondensator  $C_1$  aufgeladen:

$$(22)$$

$$u_k^4 = u_k^4 + u_s \left[ \frac{1}{3} (\sin \varphi_k^3 - \sin \varphi_k^2) + 0 (\sin \varphi - \sin \varphi_k^3) \right]$$

In der Schreibweise von (21a) heisst das:

$$u_k^4 = u_k^{2,3} + u_s [0 (\sin \varphi - \sin \varphi_k^3)] \quad (22a)$$

Dem vierten Zeitintervall (von  $\varphi_k^4$  bis  $\varphi_k^5$ , Fig. 7a), das im Minimum der Eingangsspannung beginnt, liegt der gleiche allgemeine Betriebszustand der Stromlosigkeit zugrunde, der bereits vom ersten Zeitintervall her bekannt ist:

$$u_k^4 = u_k^{3,4} + u_s [1 (\sin \varphi - \sin \varphi_k^4)] \quad (23)$$

Fünftes Zeitintervall (von  $\varphi_k^5$  bis  $\varphi_k^6$ , Fig. 7d): Als erste Verbindung zündet das Ventil  $Z_4$ . Dadurch kommt eine Serieschaltung der vier Kondensatoren  $C_1 - C_3 - C_4 - C_2$  zustande, welche die eingangsseitige Potentialschwankung zur Hälfte auf  $P_4$  überträgt:

$$u_k^4 = u_k^{4,0} + u_s \left[ \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^4) \right] \quad (24)$$

Wenn sich zu Beginn des *sechsten Zeitintervalls* (von  $\varphi_k^6$  bis  $\varphi_{k+1}^1$ , Fig. 7e) das Potential  $u^2$  und  $u^3$  angeglichen hat, entsteht eine weitere Verbindung über das Ventil  $Z_2$ , die jedoch auf das Verhalten von  $P_4$  keinen Einfluss hat. Dieser Zustand bleibt bestehen, bis sich mit dem Einsatz der folgenden Periode im Moment  $\varphi_{k+1}^1$  dieser Kreislauf geschlossen hat:

$$u_k^4 = u_k^{4,0} + u_s \left[ \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^6) \right] \quad (25)$$

2. Die Potentialfunktionen eines beliebigen Schaltpunktes: Eine entsprechende Berechnung der übrigen Schaltpunkte  $P_2, P_3$  und  $P_5$  führt zu ähnlichen Resultaten. Die Formeln unterscheiden sich nur durch die unmittelbar vor den runden Klammern stehenden 4 mal 6 = 24 Potentialteilungsfaktoren  $R_{\alpha,n}$ . Wegen ihrer Unabhängigkeit vom Periodenindex  $k$  lassen sich diese ein für alle Male in der folgenden Matrix zusammenstellen:

$$\begin{matrix} \rightarrow \beta \text{ oder } n & (\beta = 1, \dots (n-1)) \\ & (n = 1, \dots 6) \\ \downarrow \alpha & \end{matrix} \begin{matrix} R_{\alpha,\beta} & R_{\alpha,1} & R_{\alpha,2} & R_{\alpha,3} & R_{\alpha,4} & R_{\alpha,5} & R_{\alpha,6} \\ R_{2,\beta} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ R_{3,\beta} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ R_{4,\beta} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ R_{5,\beta} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad (26)$$

$(\alpha = 2, \dots 5)$

An Hand dieser Zusammenstellung lassen sich nun die Formeln (20) bis (25) leicht durch eine allgemeine Potentialfunktion  $u_k^\alpha$  ersetzen:

$$u_k^\alpha = u_{n-1,n}^\alpha + u_s [R_{\alpha,n} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^n)] \quad (26a)$$

wobei

$$u_{n-1,n}^\alpha = u_k^\alpha + u_s \left[ \sum_{\beta=1}^{n-1} R_{\alpha,\beta} (\sin \varphi^{\beta+1} - \sin \varphi_k^\beta) \right] \quad (26b)$$

also ausgeschrieben:

$$u_k^\alpha = u_k^\alpha + u_s \left[ \sum_{\beta=1}^{n-1} R_{\alpha,\beta} (\sin \varphi^{\beta+1} - \sin \varphi_k^\beta) + R_{\alpha,n} (\sin \varphi - \sin \varphi_k^n) \right] \quad (26c)$$

Dabei ist zu beachten, dass sich der Gültigkeitsbereich der Potentialfunktionen mit dem Index  $n$  nur auf das  $n$ -te Zeitintervall der  $k$ -ten Periode erstreckt:  $\varphi_k^n \leq \varphi \leq \varphi_{k+1}^{n+1}$ .

3. Umschaltphasen: Zur Bestimmung der bis jetzt noch unbekanntenen Umschaltphasen wird folgender Weg eingeschlagen: Diejenigen zwei Poten-

tialkurven, die sich am Ende ihres Gültigkeitsbereiches überschneiden, werden gleich gesetzt und nach  $\sin \varphi_k^n$  aufgelöst. Jeder Ansatz der ersten Kolonne in Tabelle III liefert eine Bestimmungsgleichung für eine Umschaltphase. Wenn das Resultat der vorangehenden Rechnung jeweils in der nächst-

Bestimmung der sechs Umschaltphasen

Tabelle III.

Aus $u^1 = +u_s$ folgt $\sin \varphi_k^1 = +1$	(27a)
„ $u_k^4 = u_k^3$ „ $\sin \varphi_k^2 = \frac{u_k^3 - u_k^5 + u_s}{u_s}$	(27b)
„ $u_k^2 = 0$ „ $\sin \varphi_k^3 = \frac{\frac{1}{2} u_k^5 - 2u_k^3 + u_s}{u_s}$	(27c)
„ $u^1 = -u_s$ „ $\sin \varphi_k^4 = -1 = -\sin \varphi_k^1$	(27d)
„ $u_k^4 = u_k^5$ „ $\sin \varphi_k^5 = \frac{u_k^5 - u_k^3 - u_s}{u_s} = -\sin \varphi_k^2$	(27e)
„ $u_k^2 = u_k^3$ „ $\sin \varphi_k^6 = \frac{u_k^3 - u_s}{u_s}$	(27f)

folgenden Bestimmungsgleichung eingesetzt wird, findet man der Reihe nach die in der zweiten Kolonne zusammengestellten Lösungen [Gl. (27a) bis (27f)].

Die soeben berechneten Sinuswerte werden nun in sämtliche Potentialfunktionen eingesetzt. Dadurch nehmen diese die Gestalt einfacher linearer Kombinationen der Einsatzpotentiale  $u_k^5, u_k^3$  und  $u_s$  und des Argumentes  $u_s \sin \varphi$  an.

$$u_k^\alpha = \kappa_{\alpha,n} u_k^5 + \lambda_{\alpha,n} u_k^3 + \mu_{\alpha,n} u_s + \nu_{\alpha,n} u_s \sin \varphi \quad (28)$$

Diese mit den Potentialteilungsfaktoren in engem Zusammenhang stehenden Koeffizienten  $\kappa_{\alpha,n}, \lambda_{\alpha,n}, \mu_{\alpha,n}$  und  $\nu_{\alpha,n}$  sind in den 4 Matrizen (28a) bis (28d) eingetragen.

(28a)	(28b)																																																																						
→ α	→ α																																																																						
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\kappa_{2,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\kappa_{3,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\kappa_{4,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\kappa_{5,n}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,1}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{4}{3}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,3}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{2}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,4}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{2}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,5}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\kappa_{\alpha,6}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	$\kappa_{\alpha,n}$	$\kappa_{2,n}$	$\kappa_{3,n}$	$\kappa_{4,n}$	$\kappa_{5,n}$	$\kappa_{\alpha,1}$	0	0	1	1	$\kappa_{\alpha,2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\kappa_{\alpha,3}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\kappa_{\alpha,4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\kappa_{\alpha,5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\kappa_{\alpha,6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\lambda_{2,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\lambda_{3,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\lambda_{4,n}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\lambda_{5,n}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,1}</math></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{4}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{2}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{2}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{3}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,3}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,4}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,5}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\lambda_{\alpha,6}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> </tr> </table>	$\lambda_{\alpha,n}$	$\lambda_{2,n}$	$\lambda_{3,n}$	$\lambda_{4,n}$	$\lambda_{5,n}$	$\lambda_{\alpha,1}$	1	1	0	0	$\lambda_{\alpha,2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\lambda_{\alpha,3}$	0	0	0	-1	$\lambda_{\alpha,4}$	0	0	0	-1	$\lambda_{\alpha,5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\lambda_{\alpha,6}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\kappa_{\alpha,n}$	$\kappa_{2,n}$	$\kappa_{3,n}$	$\kappa_{4,n}$	$\kappa_{5,n}$																																																																			
$\kappa_{\alpha,1}$	0	0	1	1																																																																			
$\kappa_{\alpha,2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$																																																																			
$\kappa_{\alpha,3}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$																																																																			
$\kappa_{\alpha,4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$																																																																			
$\kappa_{\alpha,5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1																																																																			
$\kappa_{\alpha,6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1																																																																			
$\lambda_{\alpha,n}$	$\lambda_{2,n}$	$\lambda_{3,n}$	$\lambda_{4,n}$	$\lambda_{5,n}$																																																																			
$\lambda_{\alpha,1}$	1	1	0	0																																																																			
$\lambda_{\alpha,2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$																																																																			
$\lambda_{\alpha,3}$	0	0	0	-1																																																																			
$\lambda_{\alpha,4}$	0	0	0	-1																																																																			
$\lambda_{\alpha,5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$																																																																			
$\lambda_{\alpha,6}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$																																																																			



(28c)					(28d)						
→ α					→ α						
↓ n	μ <sub>α,n</sub>	μ <sub>2,n</sub>	μ <sub>3,n</sub>	μ <sub>4,n</sub>	μ <sub>5,n</sub>	↓ n	ν <sub>α,n</sub>	ν <sub>2,n</sub>	ν <sub>3,n</sub>	ν <sub>4,n</sub>	ν <sub>5,n</sub>
	μ <sub>α,1</sub>	-1	0	-1	0		ν <sub>α,1</sub>	1	0	1	0
	μ <sub>α,2</sub>	2	1	1	1		ν <sub>α,2</sub>	2	1	1	1
	μ <sub>α,3</sub>	3	3	3	3		ν <sub>α,3</sub>	3	3	3	3
	μ <sub>α,4</sub>	0	0	0	0		ν <sub>α,4</sub>	0	0	0	0
	μ <sub>α,5</sub>	1	0	1	0		ν <sub>α,5</sub>	1	0	1	0
	μ <sub>α,6</sub>	3	1	1	1		ν <sub>α,6</sub>	3	1	1	1
		4	4	2	2			4	4	2	2
		1	1	1	1			1	1	1	1
		2	2	2	2			2	2	2	2

Als Anwendungsbeispiel dieser Tabelle und zwecks späterer Verwendung seien die partikulären Potentialfunktionen von P<sub>3</sub> und P<sub>5</sub> für das sechste Zeitintervall herausgeschrieben:

$$u_k^3 = \frac{1}{4} u_k^5 + \frac{1}{2} u_s + \frac{1}{2} u_s \sin \varphi \quad (29)$$

$$u_k^5 = u_k^5 - \frac{1}{2} u_k^3 + \frac{1}{2} u_s + \frac{1}{2} u_s \sin \varphi \quad (30)$$

4. *Rekursionsformeln*: Aehnlich wie beim einstufigen KG gewinnt man hier die Rekursionsformeln, indem man in (29) und (30) für φ<sub>k</sub><sup>5</sup> den oberen Grenzwert φ<sub>k+1</sub><sup>1</sup> einsetzt

$$u_{k+1}^3 = \frac{1}{4} u_k^5 + u_s \quad (31)$$

$$u_{k+1}^5 = u_k^5 - \frac{1}{2} u_k^3 + u_s \quad (32)$$

und (31) in u<sub>k+2</sub><sup>5</sup> substituiert.

$$u_{k+2}^5 = u_{k+1}^5 - \frac{1}{8} u_k^5 + \frac{1}{2} u_s \quad (33)$$

5. *Schlussformel*: Die noch zu lösende Frage der geschlossenen Berechenbarkeit des gesamten Spannungsaufbaues besteht in der Herleitung einer Funktion u<sub>k</sub><sup>5</sup> = φ(u<sub>1</sub><sup>5</sup>, k). Dies geschieht so, dass man zunächst für die Rekursionsformel (33) eine stationäre Lösung u<sub>1</sub><sup>5</sup> = u<sub>2</sub><sup>5</sup> = ... = u<sub>k</sub><sup>5</sup> = C sucht. C = 4u<sub>s</sub>. Durch eine Substitution

$$u_k^5 = C + v_k \quad (34)$$

geht die Rekursionsformel in die homogene Gleichung (35) über:

$$v_{k+2} - v_{k+1} + \frac{1}{8} v_k = 0 \quad (35)$$

Für die gesuchte Lösung v<sub>k+2</sub> = φ(v<sub>1</sub>, k) macht man versuchsweise den Ansatz v<sub>k</sub> = λ<sup>k</sup>. Dies in (35) ein-

gesetzt liefert für v<sub>k</sub> die Bedingungsgleichung λ<sup>k</sup>(λ<sup>2</sup> - λ + 1/8) = 0, welche befriedigt wird von

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} + 1)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \text{ und}$$

$$\lambda_3 = 0 \text{ (für } u_k^5 = 4u_s)$$

Als Lösung kommt somit in Frage: λ<sub>1</sub><sup>k</sup> und λ<sub>2</sub><sup>k</sup> oder allgemein jede lineare Kombination dieser beiden Partikularlösungen:

$$A \lambda_1^k + B \lambda_2^k$$

Damit nimmt (34) die allgemein gültige Form

$$u_k^5 = 4u_s + A \lambda_1^k + B \lambda_2^k$$

an. Die Konstanten A und B sind durch die Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u_1^5 &= 4u_s + A \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} + 1) + B \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \\ \text{und} \\ u_2^5 &= 4u_s + A \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} + 1) \right]^2 + B \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \right]^2 \end{aligned} \right\} (36)$$

bestimmt. In Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen beim einstufigen KG [Gl. (4)] wird auch hier die Schreibweise

$$u_1^5 = u_s q_1, \quad u_2^5 = u_s q_2 \text{ verwendet.}$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems (36) erhält man

$$\begin{aligned} A &= u_s \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \left[ q_1 - 4 + 2\sqrt{2} \left( q_2 - \frac{q_1}{2} - 2 \right) \right] \\ B &= u_s \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left[ q_1 - 4 - 2\sqrt{2} \left( q_2 - \frac{q_1}{2} - 2 \right) \right] \end{aligned}$$

Die gesuchte Formel lautet somit:

$$\begin{aligned} u_k^5 &= 4u_s + u_s \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \left\{ q_1 - 4 + 2\sqrt{2} \left( q_2 - \frac{q_1}{2} - 2 \right) \right\} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2}+1) \right]^k + u_s \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left\{ q_1 - 4 - 2\sqrt{2} \left( q_2 - \frac{q_1}{2} - 2 \right) \right\} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2}-1) \right]^k \end{aligned} \quad (37)$$

Es ist zu erwarten, dass die Grösse q<sub>2</sub> nur von der Wahl des Einschaltkoeffizienten q<sub>1</sub> abhängt und dass infolgedessen q<sub>2</sub> in (37) substituiert werden kann. Zur Abklärung dieser Abhängigkeit muss man sich an Hand des Schaltschemas Fig. 5 vergegenwärtigen, dass die besondere Wirkung der zweiten Stufe erst nach dem Durchlaufen des ersten Einsatzpotentials entsteht; also u<sub>1</sub><sup>3</sup> = u<sub>1</sub><sup>5</sup>. Wenn von dieser Gleichheit in der Rekursionsgleichung (32)

Gebrauch gemacht wird, findet man sofort die gesuchte Abhängigkeit:

$$q_2 = \frac{1}{2} q_1 + 1.$$

Dies in (37) eingesetzt, liefert die Schlussformel

$$u_k^5 = 4 u_s + \frac{1}{2} u_s (q_1 - 4 - 2\sqrt{2}) \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} + 1) \right]^{k-1} + \frac{1}{2} u_s (q_1 - 4 + 2\sqrt{2}) \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \right]^{k-1} \quad (38)$$

wobei  $k = 1, 2, 3, \dots n$ .

In diesem Zusammenhang sei noch die Funktion  $u_k^3 = F(q_1, k)$  angegeben, die man leicht aus (38) und (31) berechnen kann:

$$u_k^3 = 2 u_s + \frac{1}{8} u_s (q_1 - 4 - 2\sqrt{2}) \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \right]^{k-2} + \frac{1}{2} u_s (q_1 - 4 + 2\sqrt{2}) \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \right]^{k-2} \quad (39)$$

6. *Vergleich mit dem einstufigen KG:* In Ueber-einstimmung mit dem einstufigen KG stehen im Moment der Umschaltungen alle Potentiale in einfachen rationalen Verhältnissen (Folgerung aus Matrix 28). Wenn das erste Einsatzipotential  $u_1^5$  einen rationalen Zahlenwert hat, so haben sämtliche (d. h.  $\infty$  viele) Umschaltpotentiale rationale Zahlenwerte.

Im Gegensatz zum einstufigen KG beschreibt der Spannungsaufbau nicht mehr eine geometrische Reihe. Aus den Potentialfunktionen  $u^3$  und  $u^5$  ergibt sich ausserdem, dass die Potentiale des rechten «Generatorastes» nicht mehr monoton, sondern *oszillierend* ansteigen. Alle Ladekurven bestehen aus an- und absteigenden Sinuskurvenstücken, die unter sich durch waagrechte Linien verbunden sind (vgl. Fig. 10).

7. *Stationärer Zustand:* Die Spannungsvervierfachung des eingeschwungenen zweistufigen KG entspringt unmittelbar aus der Schlussformel (38). Da die Zahlenwerte der eckigen Klammern in (38) und (39) kleiner als 1 sind, verschwinden im Grenzfall  $k = \infty$  der zweite und dritte Summand:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^5 = 4 u_s$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^3 = 2 u_s$$

[Vergleich mit Fig. 2, Gl. (3) und (5)].

Werden diese Grenzwerte in den Umschaltphasen (27a) bis (27f) substituiert, so erhält man auch beim zweistufigen KG den Beweis dafür, dass alle stromführenden Betriebszustände schlussendlich ersetzt werden durch den stromlosen Zustand Fig. 7a. Für  $k \rightarrow \infty$  folgt  $\sin \varphi_k^5 = \sin \varphi_k^6 = -\sin \varphi_k^2 = -\sin \varphi_k^3 = +1$ .

### D. Zwei numerische Beispiele

Zur quantitativen Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen Oszillogrammen Fig. 12 wird der Aufladevorgang des ein- und des zweistufigen KG für den Fall  $q_1 = \frac{1}{2}$  ( $\beta = 0$ , Einschaltung in der Nullphase) berechnet und graphisch dargestellt (Fig. 10 und Fig. 11).

### E. Wirkungsweise des n-stufigen Kaskaden-Generators

Die am zweistufigen KG vorgenommene Einschwingungsberechnung lässt sich ohne besondere Schwierigkeiten auf den drei- und mehrstufigen KG erweitern. Der dreistufige KG besitzt sieben verschiedene Betriebszustände. Wegen des zweimaligen Auftretens des stromlosen Betriebszustandes zerfällt jede Periode in acht Zeitintervalle. Beim  $n$ -stufigen KG treten  $2n+1$  Betriebszustände auf und jede Periode zerfällt in  $2n+2$  Zeitintervalle. Die Zahl der möglichen Betriebszustände ist also immer gleich dem maximalen Schaltpunktindex (vgl. Fig. 1). Die Aenderungen in der Wirkungsweise, die dann entstehen, wenn dem  $n$ -stufigen KG noch eine weitere Stufe angeschlossen wird, werden mit zunehmender Stufenzahl immer geringer. Die grössten Unterschiede in der mathematischen Behandlung treten naturgemäss beim Uebergang vom ein- zum zweistufigen KG auf. Eine Theorie des dreistufigen KG zeigt, abgesehen vom grösseren Umfang der Formeln, keine grundsätzlich neuen Ergebnisse. Aus diesem Grund soll sich die nun folgende Beschreibung der Einschwingung beim  $n$ -stufigen KG nur auf einige orientierende Bemerkungen beschränken.

Jede Halbperiode beginnt mit dem stromlosen Betriebszustand. Während des Durchlaufens der ersten Halbperiode (d. h. vom Maximum bis zum Minimum) zünden der Reihe nach von oben nach unten alle nach links gerichteten Ventile  $Z_{2n-1}, Z_{2n-3}, \dots Z_3$  und  $Z_1$  (Fig. 1). Dies hat zur Folge, dass ein Teil der im rechten Generatorast aufgestapelten Ladungen auf die linksseitigen Kondensatoren abfließt. In der zweiten Halbperiode (vom Minimum bis zum Maximum) werden die Potentiale des linken Astes gehoben, und nun werden in der gleichen Reihenfolge (wieder von oben nach unten) die nach rechts zeigenden Ventile in Funktion gesetzt. Dadurch werden die linksseitigen Ladungen auf die nächst höher liegenden rechtsseitigen Kondensatoren geschoben. Die verschiedenartige Tätigkeit der beiden Generatoräste kann man dadurch versinnbildlichen, dass man die rechtsseitigen Kondensatoren als *Sammelkondensatoren* und die linksseitigen als *Schubkondensatoren* bezeichnet. Als mechanisches Analogon zum Kaskaden-Generator könnte man sich ein mehrstufiges Wasserpumpwerk vorstellen. Die Sammelkondensatoren wären alsdann zu ersetzen durch die treppenförmig übereinander angeordneten Wasserreservoirs. Die Schubkondensatoren entsprächen den periodisch arbeitenden

Kolbenpumpen, welche je zwei übereinanderstehende Reservoirs miteinander verbinden.

**Stationärer Zustand.** Die Gültigkeitsbereiche aller  $2n$  stromführenden Zeitintervalle schrumpfen während des Aufladevorganges zusammen, um im stationären Zustand ganz zu verschwinden. Die beiden stromlosen Zeitintervalle wachsen mit jeder neuen Periode, bis sie sich im Grenzfall berühren. Alsdann geht die komplizierte Potentialbewegung der Schubkondensatoren in eine Sinusschwingung über. Der gesamte linke Ast schwingt synchron mit dem Eingangspotential  $u^1$ . Der rechte Ast befindet sich im elektrostatischen Gleichgewicht. Seine Potentiale steigen von Stufe zu Stufe um den konstanten Betrag  $2u_s$  (vgl. Fig. 2).

### III. Experimenteller Teil

#### A. Der ideale Kaskaden-Generator

Mit einem Versuchsgerät lässt sich der von der Theorie (Abschnitt II) vorausgesetzte und von der Praxis angestrebte «ideale» KG verhältnismässig leicht realisieren. Da der charakteristische Verlauf der Ladekurven nicht von der Höhe der angelegten Wechselspannung abhängt, liegt die Verwendung einer einfachen Versuchsanordnung an Stelle einer Höchstspannungsanlage auf der Hand.

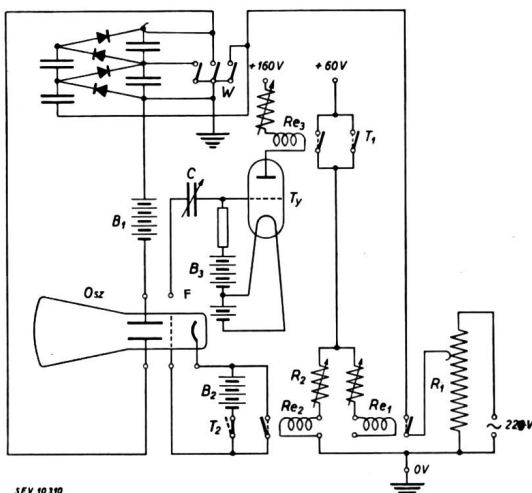


Fig. 9.

#### Schaltenschema für Registriereinrichtung

Osz Elektronenstrahl-Oszillograph. F Anschluss-Lasche für das eingebaute Zeitablenkgerät.  $B_1$  Spannungsquelle für vertikale Punktverschiebung.  $B_2$  Spannungsquelle für Strahlsperrung (Hochspannung). C Kopplungskondensator.  $T_1$  Thyatronröhre.  $T_2$  Thyatronröhre.  $T_1$  Auslösetaster für KG.  $T_2$  Auslösetaster für Strahlsperrung (Öffnungskontakt).  $Re_1$  Einschaltrelais für KG.  $Re_2$  Relais für automatische Strahlsperrung (verzögert).  $Re_3$  Relais für automatische Einschaltung des Messvorganges.  $R_1$  Widerstand zur Regulierung der Eingangsspannung.  $R_2$  Widerstand für die automatische Regulierung der «Belichtungszeit». W Erdungswippe.

(Die Schalter  $T_1$  und  $T_2$  sowie die Relais  $Re_1$ ,  $Re_2$  und  $Re_3$  sind in der Ruhestellung dargestellt.)

Als Ventil wirkt die direkt geheizte Doppelweg-Gleichrichterröhre AZ 12 (Telefunken). Diese Röhre zeichnet sich durch ihren kleinen inneren Widerstand aus, der durch die beiden parallel geschalteten Anoden noch auf die Hälfte herabgesetzt wird. In einem vorgängigen Versuch wurde diejenige Heizspannung ermittelt, bei der die Röhre

den von der Theorie verlangten Eigenschaften (siehe II A) am besten entspricht. Für diese «kritische Heizspannung» wurden je nach dem Exemplar Werte gefunden, die sich zwischen 3,95 und 4,10 V befinden. Als Stromquelle (für 2,5 A) wurden Bleiakumulatoren verwendet. Die Nachregulierung der Heizspannung geschieht mit einem Widerstandsdrath von ca. 60 cm Länge (Konstantan 1 mm  $\varnothing$ ). Die dauernd angeschlossenen Voltmeter gestatten eine ununterbrochene Kontrolle der Heizspannung.

Die runden Wickel-Kondensatoren (Fribourg, 1500 V Prüfspannung), die aus einer grösseren Anzahl ausgesucht wurden, haben praktisch keine Leitfähigkeit (in einer Minute höchstens 2 % Spannungsverlust). Die Kapazität von 0,1  $\mu$ F wird auf 1 % genau innegehalten. Diese Kapazität lässt einerseits eine gut messbare Belastung des KG zu (einige  $10^{-5}$  A); andererseits bleibt der Zeitkonstanten-Einfluss der Kondensatorkreise unterhalb des Auflösungsvermögens des Kathodenstrahles. Wegen der besonderen Empfindlichkeit des Aufladevorganges gegenüber mangelhafter Isolation müssen alle Schaltelemente, auch die Heizbatterien, auf Paraffinunterlagen gestellt werden.

**Der Oszillograph.** Der verwendete Oszillograph GM 3152 (Philips) enthält eine Elektronenstrahlröhre DN 9-3 mit Nachleuchtschirm für grünes Licht, einen linearen Messverstärker und ein Zeitablenkgerät für 2 bis 150 000 Hz. Dieser Bereich wurde durch Parallelschalten von weiteren Kondensatoren auf 0,4 Hz erweitert. Der Anschluss an die Messplatten erfolgt unter Ausschluss des Verstärkers, d. h. direkt über die gut isolierten Anschlussklemmen auf der Rückseite des Gehäuses.

**Die Registriereinrichtung.** Da es sich um die Untersuchung einmaliger Vorgänge handelt, sind gewisse besondere Massnahmen erforderlich.

a) Der einmalige Ablauf des zu messenden Prozesses muss eine genügende Schwärzung des Filmmaterials hervorrufen. Dies wird erreicht

1. durch die lichtstarke Optik der Kamera (Rolleiflex,  $F = 3,5$ ),

2. durch eine kleine Vergrösserung

$$V = \frac{\text{Bild auf dem Film}}{\text{Bild auf dem Schirm}} = 0,33$$

3. durch das grünempfindliche Negativmaterial (panchromatischer Rollfilm Kodak Super XX).

b) Eine weitere Komplikation bei der Registrierung einmaliger Vorgänge liegt in der Synchronisierung; denn Messvorgang, Photoverschluss und in einigen Fällen auch die Zeitablenkung müssen gleichzeitig ausgelöst werden. Die Registrierungen werden im verdunkelten Raum mit dauernd geöffnetem Kameraverschluss vorgenommen. Die «Belichtungszeit» wird durch die Strahlsperrung (mit einer besonderen Vorspannung zwischen Steuer- und Kathode) gehandhabt. Wegen der Fluoreszenzträgheit des Leuchtschirmes muss die Strahlsperrung mindestens 0,2 Sekunden vor Beginn des Messvorganges durch den Taster  $T_2$  (Fig. 9) unterbrochen werden. Die Auslösung des Messvor-

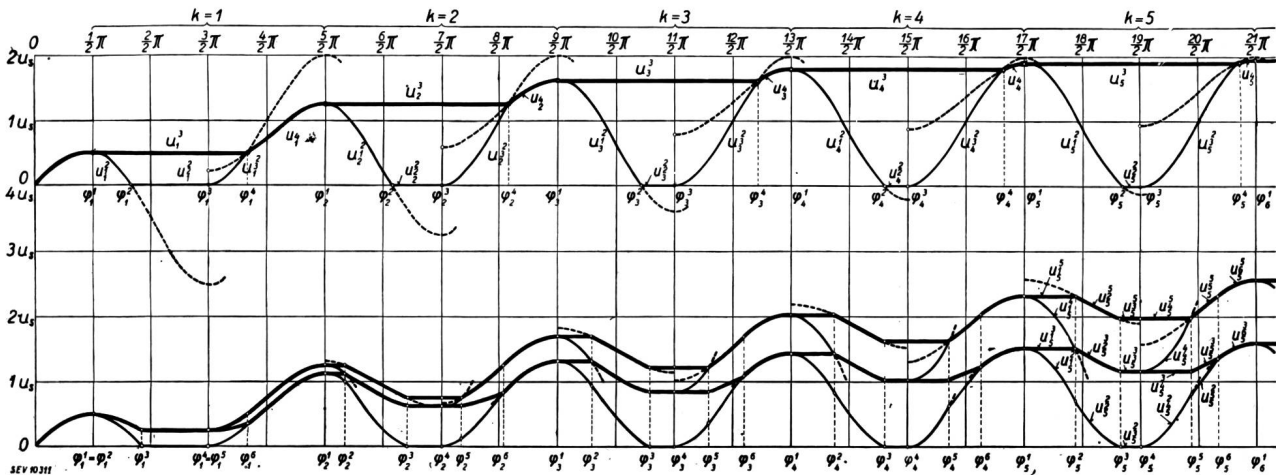


Fig. 10.

Graphische Darstellung des Aufladevorganges

berechnet nach (7), (38), (31) und (28), Einschaltung in der Nullphase ( $q_1 = \frac{1}{2}$ )

Oben: Aufladekurven des einstufigen KG.

Unten: Aufladekurven des zweistufigen KG.

Dick ausgezogene Kurven:  $u^3$  und  $u^5$ ; dünn ausgezogene Kurven:  $u^2$  und  $u^4$ ; gestrichelte Kurven: Die Potentialfunktionen ausserhalb ihren Gültigkeitsbereichen.

ganges geschieht mit dem Taster  $T_1$ , der gleichzeitig das verzögerte Relais  $Re_2$  betätigt. Durch den Widerstand  $R_2$  wird die Ansprechgeschwindigkeit von  $Re_2$  so reguliert, dass der Elektronenstrahl im richtigen Moment wieder auslöscht.

**Betätigung der Apparatur.** Für jede photographische Aufnahme sind insgesamt vier manuelle Betätigungen erforderlich, nämlich 1. das Nachrollen des Films, 2. eine kurzzeitige Entladung des KG mit der Wippe  $W$ , 3. die Strahlauslösung mit dem Taster  $T_2$  und 4. (ca. 0,2 Sekunden später!) die Einschaltung des Messvorganges mit dem Taster  $T_1$ . Bei allen Versuchen wurde der KG an das Stadtnetz (220 V, 50 Hz) angeschlossen.

**Automatische Einschaltung.** In denjenigen Fällen, in denen der Aufladevorgang mit einer einzigen Zeitablenkung registriert werden soll, muss die Kippschwingung so synchronisiert werden, dass sich im Moment des Einschaltens der Fluoreszenzfleck am linken Rand des Leuchtschirmes befindet (Beispiele derartiger Aufnahmen sind die Oszillogramme Fig. 12f und Fig. 12g). Wegen der Unbeeinflussbarkeit der Kippschwingungsphase des eingebauten Zeitablenkgerätes ist eine Schaltung zu konstruieren, die den KG im Moment der Kippung automatisch einschaltet. Zu diesem Zweck ist die mit dem Zeitablenkgerät in Verbindung stehende Lasche  $F$  über einen Drehkondensator  $C$  von maximal 500 cm an das Gitter einer Thyatronröhre  $Ty$  angeschlossen. Der Anodenstrom des Thyatron ist gleichzeitig Speisungsstrom eines Relais  $Re_3$ , das die gleiche Aufgabe wie der Taster  $T_1$  erfüllt.

B. Oszillogramme (Fig. 12)

Mit Ausnahme von Oszillogramm  $a_1$  ist der Ordinaten-Maßstab überall gleich gross gewählt. Um den visuellen Vergleich aufeinanderfolgender Perioden zu erleichtern, wird in den meisten Fällen (Osz.  $a$  bis  $e$ ,  $h$  bis  $n$ ) die Kippfrequenz so ein-

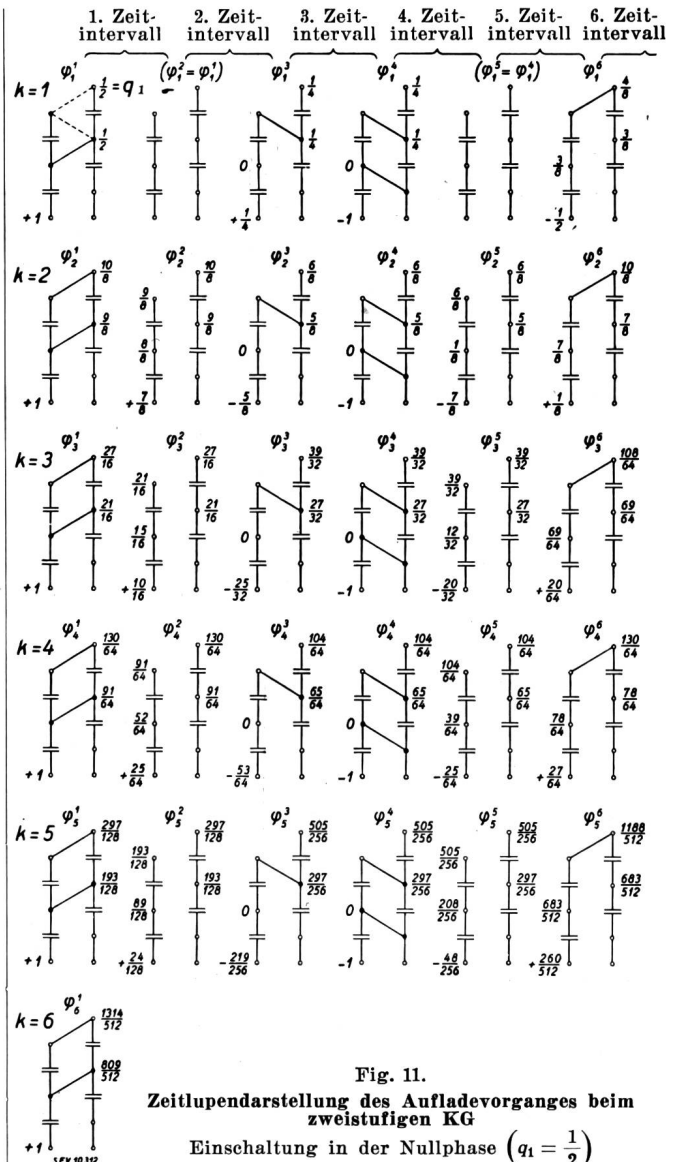


Fig. 11.

Zeitlupendarstellung des Aufladevorganges beim zweistufigen KG

Einschaltung in der Nullphase ( $q_1 = \frac{1}{2}$ )



gestellt, dass übernächste Perioden immer gleiche Abszissen haben.

Die Oszillogramme des unbelasteten einstufigen KG (Osz. a bis e). Die in Fig. 10 rechnerisch ge-

wonnene Kurve findet ihre exakte experimentelle Bestätigung im Osz. a, denn bei dieser Aufnahme geschah der Stromschluss während dem Durchgang durch die Nullphase ( $q_1 = \frac{1}{2}$ ). Die Bilder b bis e, von denen jedes eine der vier Einschaltmöglichkei-

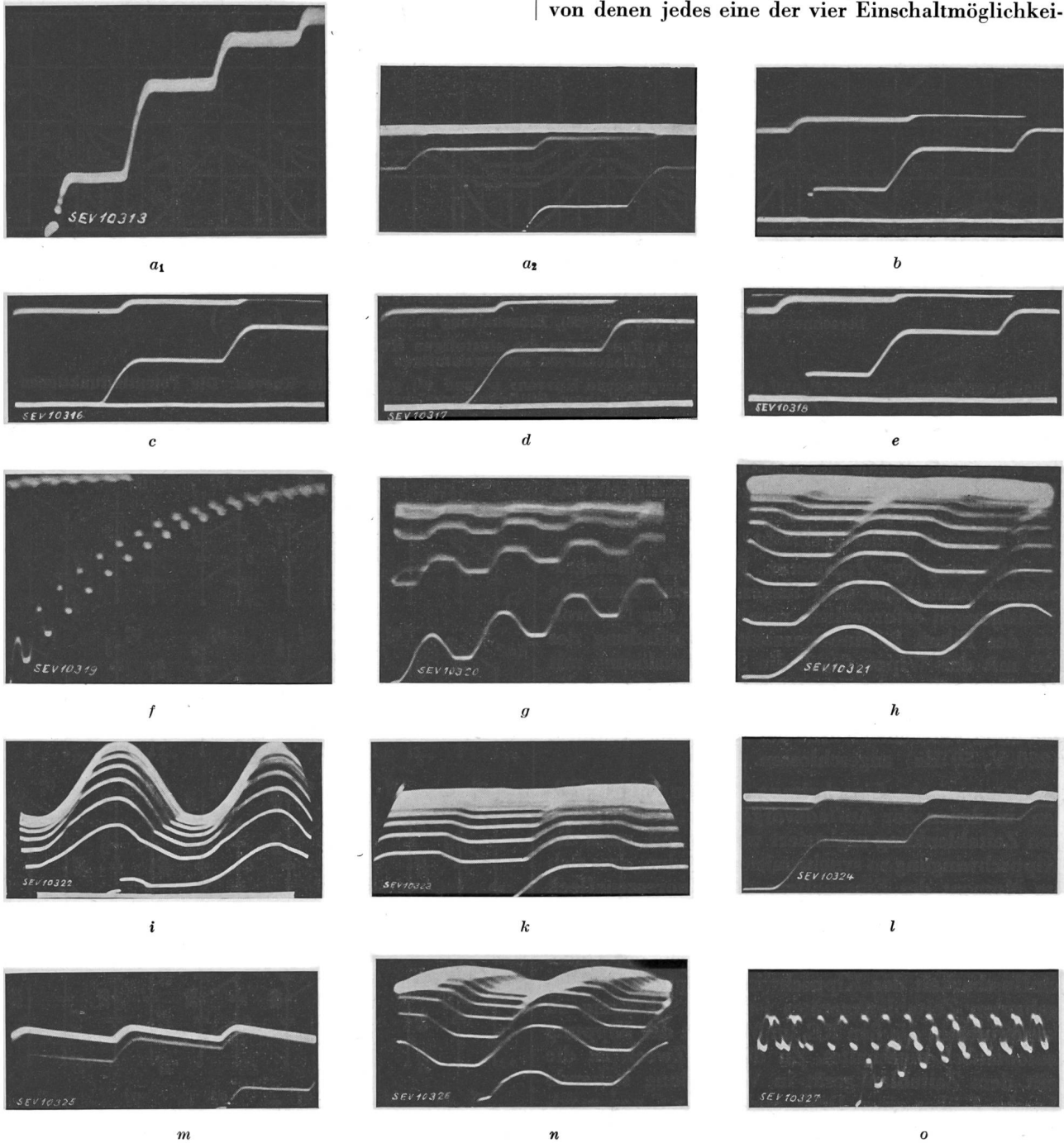


Fig. 12.

Oszillogramme

Osz. a bis e:  $u^3$ -Kurven des einstufigen unbelasteten KG.

- a<sub>1</sub> Einschaltung in der Nullphase ( $q_1 = \frac{1}{2}$ ), photographische Vergrößerung im Verhältnis 2 : 1.
- a<sub>2</sub> Derselbe Vorgang dargestellt mit viermal grösserer Zeitablenkungsgeschwindigkeit.
- b Einschaltmöglichkeit a (siehe Fig. 8).
- c Einschaltmöglichkeit b.
- d Einschaltmöglichkeit c.
- e Einschaltmöglichkeit d.

Osz. f bis h:  $u^3$ -Kurve des zweistufigen unbelasteten KG. Derselbe Vorgang dargestellt mit drei verschiedenen Kippfrequenzen.

Osz. i:  $u^4$ -Kurve des zweistufigen unbelasteten KG.

- Osz. k:  $u^3$ -Kurve des zweistufigen unbelasteten KG.
- Osz. l:  $u^3$ -Kurve des einstufigen KG. Belastungswiderstand 3 Megohm.
- Osz. m:  $u^3$ -Kurve des einstufigen KG. Belastungswiderstand 1 Megohm.
- Osz. n:  $u^3$ -Kurve des zweistufigen KG. Belastungswiderstand 3 Megohm.
- Osz. o:  $u^3$ -Kurve des zweistufigen KG. Belastungswiderstand 1 Megohm (kleine Kippfrequenz).



ten der Fig. 8 vertritt, lassen erkennen, dass der Einfluss der Einschaltphase bereits nach den drei oder vier ersten Einschwingungsperioden ausgeglichen wird.

Die Oszillogramme des unbelasteten zweistufigen KG (Osz. *f* bis *i*). Das gemeinsame Merkmal aller Oszillogramme des zweistufigen KG ist eine periodische Auf- und Ab-Bewegung. Die diesbezüglichen Diagramme enthalten durchweg unsymmetrische, geknickte und mehr oder weniger oszillierende Kurven. Die Aufnahmen *f*, *g* und *h* registrieren denselben Vorgang ( $u^5$ ) bei verschiedener Zeitdehnung. Die einzelnen Kurveneigenschaften kommen erst bei der relativ hohen Kippfrequenz des Bildes *h* zum Vorschein. Der komplizierte Verlauf von  $u^4$  im Osz. *i* ist besonders auffällig und bildet in seinen Einzelheiten eine genaue Bestätigung der Theorie (vgl. Fig. 10). In diesem Oszillogramm ist die schrittweise Verbreiterung des stromlosen Betriebszustandes mit der resultierenden Angleichung an die Sinuskurve besonders auffällig.

Das folgende Oszillogramm *k* des Schaltpunktes  $P_3$  bestätigt, dass die für den mehrstufigen KG charakteristische Oszillation bereits in der untersten Stufe vorhanden ist.

### C. Einige Bemerkungen zur Wirkungsweise des belasteten Kaskadengenerators

Eine eingehende Behandlung des belasteten KG liegt ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit. Wenn im folgenden dennoch diese Frage kurz berührt wird, so geschieht dies deshalb, weil die Ergebnisse von Abschnitt II eine einfache Beschreibung des Grenzzustandes beim belasteten KG zulässt.

Wird der Hochspannungspol  $P_{2n+1}$  (Fig. 1) über einen genügend grossen Verbrauchswiderstand (Röntgenröhre, Beschleunigungsrohr usw.) mit der Erde  $P_0$  verbunden, so setzen sich die einzelnen Ladungsschübe zu einem Entladestrom zusammen, der die charakteristische Welligkeit<sup>16)</sup> der Gleichspannung verursacht. Diese andauernde Entladung verhindert die Ausbildung des *elektrostatischen*

<sup>16)</sup> Vgl. <sup>9)</sup> Bouwers, S. 55.

Gleichgewichtszustandes; der Spannungsaufbau wird nie über ein bestimmtes Einschwingungsstadium hinaus kommen. Die Potentialkurve des im *elektrodynamischen* Gleichgewicht schwingenden belasteten KG befindet sich somit annäherungsweise auch irgendwo im Potentialdiagramm des mit gleicher Einschaltphase einschwingenden unbelasteten KG. Es lässt sich also der dynamische Gleichgewichtszustand eines belasteten KG dadurch kennzeichnen, dass man den Periodenindex *k* einer gleichartig verlaufenden unbelasteten Einschwingungskurve bestimmt.

Als Beispiele mögen die Oszillogramme Fig 12 *l* bis *o* dienen.

Oszillogramme des belasteten einstufigen KG (Osz. *l* und *m*). Bei einer Eingangsscheitelspannung von  $u_s = 60$  V wurde der Schaltpunkt  $P_3$  über einen Widerstand von 3 Megohm mit der Erde  $P_0$  verbunden. Ein Vergleich mit dem entsprechenden Oszillogramm *d* (annähernd gleiche Einschaltphase) zeigt, dass der dynamische Gleichgewichtszustand von Osz. *l* schon vor der vierten Leerlaufperiode erreicht wird. Bei der noch grösseren Belastung im Osz. *m* (Verbrauchswiderstand = 1 Megohm) bleibt der Einschwingungsvorgang bereits in der zweiten und dritten Leerlaufperiode stecken (Vergleich mit Osz. *b*).

Oszillogramme des belasteten zweistufigen KG (Osz. *n* und *o*). Die im Oszillogramm *n* registrierte Potentialkurve  $u^5$  (Verbrauchswiderstand = 3 Megohm) würde bei Leerlauf bereits in der achten Periode durchlaufen (Vergleich mit Osz. *h*). Das nächste Oszillogramm (*o*) zeigt den Spannungsverlauf  $u^5$  bei einem Widerstand von 1 Megohm auf verkürzter Zeitachse. Bei dieser hohen Belastung sinkt die Ausgangsspannung auf die Hälfte des Leerlaufwertes, und die Welligkeit erreicht bereits den dritten Teil der effektiven Gleichspannung.

Herrn Prof. Dr. H. Greinacher, auf dessen Anregung diese Arbeit im Physikalischen Institut der Universität Bern ausgeführt wurde, möchte ich für eine Reihe wertvoller Hinweise, sowie für das Interesse, das er diesen Untersuchungen entgegengebracht hat, bestens danken.

## Umänderung von ältern Trockentransformatoren auf Oeltransformatoren, verbunden mit einer Leistungs-Steigerung

Von A. Stoecklin, Sissach

621.314.21

Es wird an einem günstigen Beispiel gezeigt, dass es bei den heutigen Verhältnissen vorteilhaft sein kann, Trockentransformatoren in Oel zu stellen, um deren Leistung zu erhöhen. Beim konkreten Beispiel kann die Leistung auf diese Art ohne weiteres verdoppelt werden, wobei die Aenderung in einen Oeltransformator nur 68 % des Preises eines äquivalenten neuen Oeltransformators kostet.

Bei den Trockentransformatoren treten bei verhältnismässig niedriger Leistung Schwierigkeiten in der Wärmeabfuhr auf, weil die Wärme abgebende Oberfläche nicht beliebig vergrössert werden kann. Speziell die Kupferverluste machen sich stark bemerkbar. Das ist auch der Grund, warum der Trok-

Il peut être actuellement avantageux de loger des transformateurs à sec dans un bain d'huile, afin d'augmenter leur puissance. Un exemple concret prouve que la puissance peut ainsi être doublée. Le coût de la transformation n'atteint que le 68 % du prix d'un nouveau transformateur à bain d'huile de même puissance.

kentransformatoren schon bei relativ niedriger Leistung im Wettbewerb mit dem Oeltransformator ausscheidet. Zu hohe Temperatur gefährdet die verwendeten Werkstoffe. Mit zunehmender Temperatur wird auch die Isolationsfestigkeit stark in Mitleidenschaft gezogen. Die Temperatur steigt so