

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 38 (1947)
Heft: 14

Artikel: Zur Darstellung von Magnetisierungskurven und Hysteresisschleifen
Autor: Landolt, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1061427>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHER ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

REDAKTION: Sekretariat des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins Zürich 8, Seefeldstrasse 301	ADMINISTRATION: Zürich, Stauffacherquai 36 ♦ Telephone 23 77 44 Postcheckkonto VIII 8481
Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet	

38. Jahrgang Nr. 14 Samstag, 12. Juli 1947

Zur Darstellung von Magnetisierungskurven und Hysteresisschleifen

Von M. Landolt, Winterthur

538.2

Für Magnetisierungskurven waren bisher eine lineare oder eine logarithmische Teilung der Achse der Feldstärke üblich. Der Autor zeigt, dass eine neue Teilung wesentliche Vorteile bietet.
 Die mathematischen Ableitungen und die benötigten Funktionswerte sind je in einem Anhang zusammengestellt.

Pour les courbes de magnétisation, il était jusqu'à présent d'usage de prévoir une subdivision linéaire ou une subdivision logarithmique de l'axe de l'intensité de champ. M. Landolt propose une subdivision d'un nouveau genre, qui offre d'importants avantages.
 Les calculs mathématiques et les valeurs numériques des fonctions qui entrent en ligne de compte figurent en annexe.

Die Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Stoffes weist das bekannte Knie¹⁾ auf, wenn man sie mit Hilfe eines geradlinigen, rechtwinkligen Koordinatensystems mit linearer Teilung aufzeichnet. Wünscht man die Feldstärke H sowohl für grosse als auch für kleine Werte der Induktion B ablesen zu können, was in der Praxis meistens der Fall ist, so benötigt man mehrere verschiedene Maßstäbe für die H -Achse. Man kommt so auf Darstellungen von der Art von Fig. 1.

Die Verwendung mehrerer Maßstäbe erschwert die Benützung des Kurvenblattes: Sollen beispielsweise die Magnetisierungskurven von m verschiedenen Stoffen auf demselben Blatt dargestellt werden, und verwendet man je n verschiedene Maßstäbe, so erhält man insgesamt mn verschiedene Kurven! Die Darstellung wird schon bei verhältnismässig kleinen Werten von m und n unübersichtlich. Man ist deshalb im Verlauf der Zeit teilweise dazu übergegangen, für die H -Achse eine logarithmische Teilung zu verwenden. Als Erster hat wohl Richter²⁾ im Jahre 1924 nach

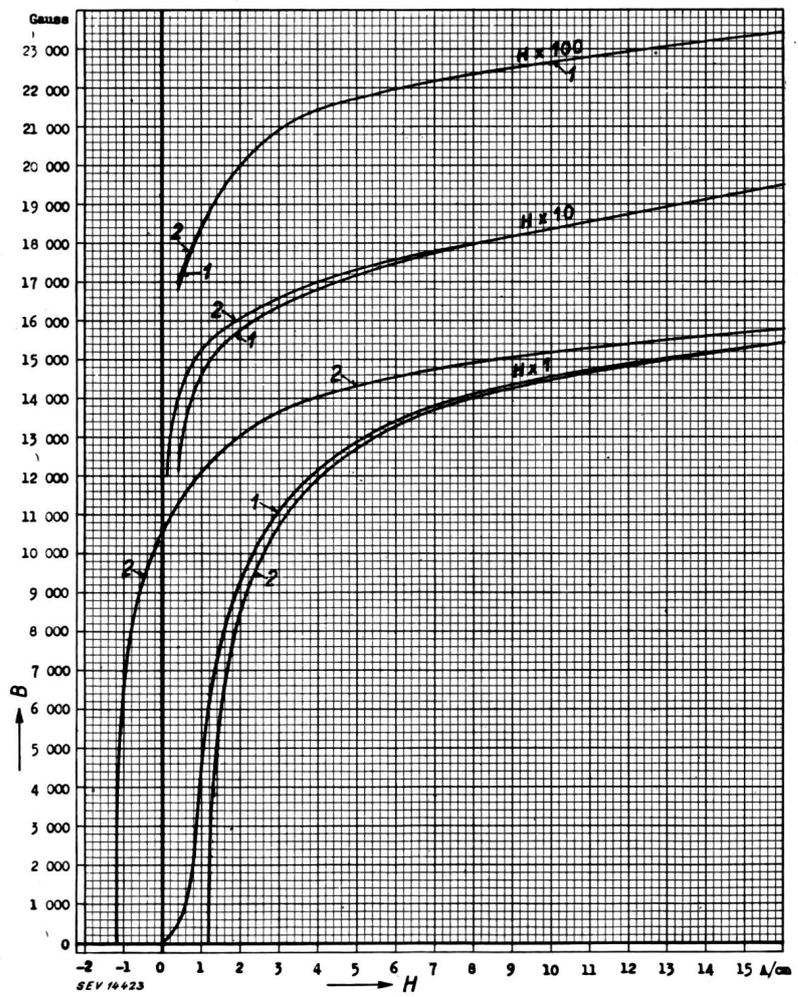


Fig. 1
Magnetisierungskurven (1) und
Hysteresisschleifen (2)

(Quelle: Handbuch der Physik, Bd. 15, S. 235. Berlin, 1927.)

1) Das zum Knie gehörige Wertepaar von B und H ist nicht typisch für das Material; die beiden Werte sind vielmehr wesentlich durch die Abbildungsmaßstäbe bedingt. Vgl.: Kohler, K. M.: Ueber die Lage des sogenannten «Knies» bei der Magnetisierungs-Kurve. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 47(1929), Nr. 52, S. 1141...1148.
 2) Richter, Rudolf: Elektrische Maschinen, Bd. 1, Allgemeine Berechnungselemente — Die Gleichstrommaschinen, S. 147. Berlin, 1924.

einem Vorschlag von Emde³⁾ eine so dargestellte Magnetisierungskurve veröffentlicht. In Fig. 2 sind dieselben Zusammenhänge wie in Fig. 1 dargestellt, jedoch mit logarithmischer Teilung der H -Achse.
 In Fig. 2 ist die Abszissenachse mit den Werten der Feldstärke H beschriftet; als Längen abgetragen
 3) 1. c. S. 145.

sind dagegen, unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes, die Logarithmen x derjenigen Masszahlen h , welche der Feldstärke H zukommen, wenn man mit der Einheit λ A/cm misst. Man erhält diese Masszahlen h , indem man die Feldstärken H durch die Einheit λ A/cm dividiert⁴⁾:

$$h = \frac{H}{\lambda \text{ A/cm}} \quad (1)$$

Abzubilden sind nun die Logarithmen

$$x = \log h. \quad (2)$$

Stellt man die Zahl 1 durch μ cm dar, so findet man mit diesem Maßstab die tatsächlich abzutragenden Längen l wie folgt:

$$l = x \mu \text{ cm} \quad (3)$$

Nullstelle ist die Feldstärke $H = \lambda$ A/cm.

Beispiel. Es soll nachgerechnet werden, welche Länge l die Feldstärke $H = 500$ A/cm darstellt. Es liegen Fig. 2 die Annahmen $\lambda = 0,2$ und $\mu = 2$ zu Grunde. Damit errechnet man nach (1), (2) und (3):

$$h = \frac{500 \text{ A/cm}}{0,2 \text{ A/cm}} = 2500$$

$$x = \log 2500 = 3,398$$

$$l = 3,398 \cdot 2 \text{ cm} = 6,796 \text{ cm.}$$

Der Nachteil der Verwendung der logarithmischen Teilung liegt darin, dass man den Nullpunkt der H -Achse nicht erreichen kann. Diese Tatsache verunmöglicht, Hysteresisschleifen mit logarithmisch geteilter H -Achse befriedigend wiederzugeben. Um diesen Mangel zu beheben, ohne dabei die Vorteile der logarithmischen Teilung preisgeben zu müssen, sollte man eine Funktion verwenden, die in der Gegend des Nullpunkts womöglich linear ist und erst bei grösseren Werten von h in den Logarithmus übergeht. Frägt man einen Mathematiker nach einer solchen Funktion, so weist er auf die Funktion «area sinus hyperbolicus» hin⁵⁾. Für sie gilt die Beziehung:

$$x = \operatorname{ar\,sinh}(h) = \ln(h + \sqrt{h^2 + 1}). \quad (4)$$

Unsern Zwecken dient besser die verwandte Funktion:

$$x = \log \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1} \right) \quad (5)$$

⁴⁾ Die Darstellung der Masszahl als Quotient von Grösse und Einheit schlug *Wallot* vor. Näheres siehe *Landolt, Max: Grösse, Masszahl und Einheit*. Zürich, 1943.

⁵⁾ *Locher, L.: Einführung in die Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendung*. Basel, 1947.

Diese geht für grosse Werte von h über in

$$x \approx \log h, \quad (6)$$

denn neben grossen Werten von $h^2/4$ kann man 1 vernachlässigen. Für sehr kleine Werte von h darf (5) — wie im 1. Anhang gezeigt ist — durch

$$x \approx 0,217147 h \quad (7)$$

ersetzt werden. Die Zusammenhänge, die zwischen der Funktion (5) und ihren Ersatzfunktionen bestehen, veranschaulichen die Kurven von Fig. 3.

Die neue Teilung bietet für das Aufzeichnen von Magnetisierungskurven und von Hysteresisschleifen grosse Vorteile gegenüber der linearen und der einfachen logarithmischen Teilung. Dies zeigt Fig. 4 deutlich. Nachteilig wirkt sich aus, dass der neuen Teilung eine wenig gebräuchliche Funktion (5) zu Grunde liegt. Die tabellarische Zusammenstellung der Funktionswerte, die der 2. Anhang enthält, wird deshalb von Nutzen sein.

Um einen durch Messung gefundenen Zusammenhang $B = f(H)$ mit Hilfe der neuen Teilung als Kurve darstellen zu können, das heisst um Papier mit der neuen Teilung herzustellen, errechnet man wieder nach (1) die Masszahl h , welche der Feldstärke H für die an sich beliebig wählbare Einheit λ A/cm zukommt. Dann entnimmt man der Tabelle des 2. Anhangs den zu h gehörigen Wert x . Um schliesslich x durch eine Länge l darstellen zu können, wählt man den Maßstab

$$1 \hat{=} \mu \text{ cm.}$$

Hiermit findet man die auf der H -Achse abzutragende Länge l nach (3).

Beispiel. Für Fig. 4 wurden $\lambda = 0,5$ und $\mu = 2$ gewählt. Ist z. B. $H = 2$ A/cm abzubilden, so wird

$$h = \frac{2 \text{ A/cm}}{0,5 \text{ A/cm}} = 4.$$

Hierzu entnimmt man der Tabelle $x = 0,6270$. Somit wird schliesslich

$$l = 0,6270 \cdot 2 \text{ cm} = 1,2540 \text{ cm.}$$

Diese Strecke stellt $H = 2$ A/cm dar.

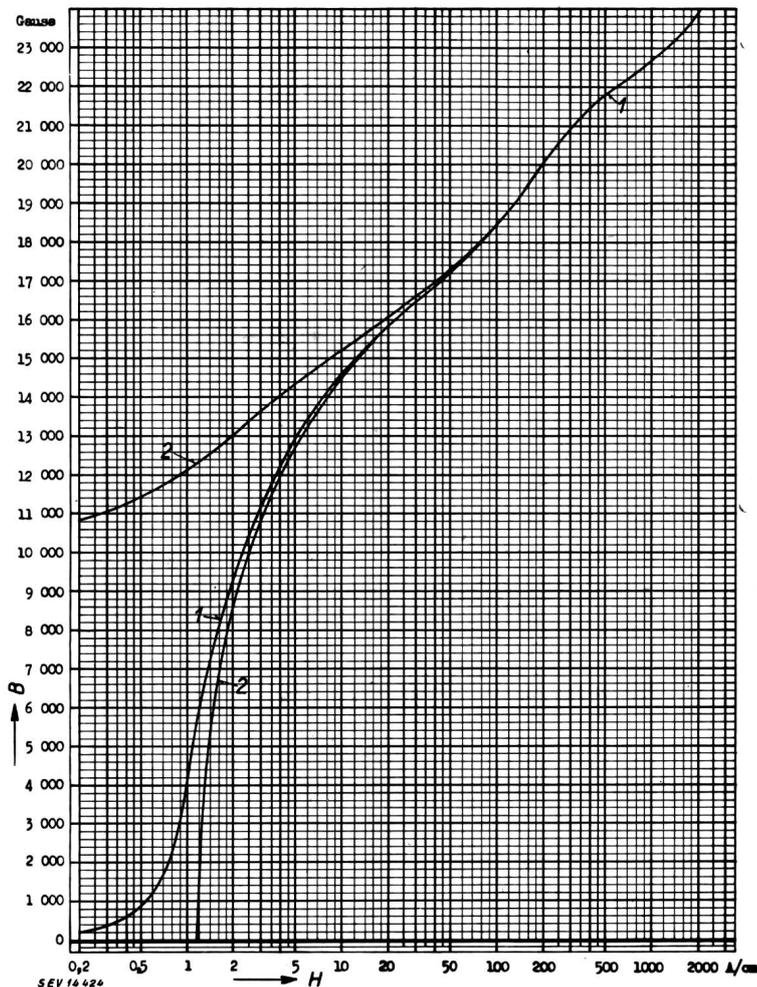
Nun ist noch zu zeigen, welchen Einfluss die Wahl der Konstanten λ und μ auf die Skala der H -Achse ausübt.

Es seien H_1 und H_2 hohe Feldstärken, die sich wie 1 zu 10 verhalten, und deren Masszahlen h_1 und h_2 ebenfalls gross sind. Die Differenz der Längen l_1 und l_2 , welche die Feldstärken H_1 und H_2 darstellen, kann man nach (3), (2) und (1) berechnen:

$$\begin{aligned} l_2 - l_1 &= (x_2 - x_1) \mu \text{ cm} = (\log h_2 - \log h_1) \mu \text{ cm} \\ &= \left(\log \frac{h_2}{h_1} \right) \mu \text{ cm} = \left(\log \frac{H_2}{H_1} \right) \mu \text{ cm} = \\ &= (\log 10) \mu \text{ cm} = \mu \text{ cm} \end{aligned}$$

Man hat somit auf der H -Achse die Strecke μ cm abzutragen, um im Gebiet der hohen Feldstärken auf den zehnfachen Wert zu kommen: *Die Konstante*

man vorerst einem möglichst bequemen Wert, z. B. 2, 4 oder 5 den Vorzug geben wird. Aus diesen drei Annahmen findet man nach (3):



$$x_{max} = \frac{l_{max}}{\mu \text{ cm}} \tag{9}$$

Zu x_{max} entnimmt man einer Logarithmentafel oder der Tabelle des 2. Anhangs den zugehörigen Wert h_{max} . Damit findet man nach (1):

$$\lambda = \frac{H_{max}}{h_{max} \text{ A/cm}} \tag{10}$$

Ist der gefundene Wert von λ für die Rechnung nicht bequem, so kann man allenfalls H_{max} , l_{max} , oder aber μ neu annehmen. Lässt man H_{max} und l_{max} unverändert, so bewirkt eine Erhöhung von λ eine Erniedrigung von μ und umgekehrt.

Beispiel. Erste Annahme: $H_{max} = 3000 \text{ A/cm}$, $l_{max} = 15 \text{ cm}$, $\mu = 4$. Nun findet man nach (9)

$$x_{max} = \frac{15 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 3,75 .$$

Hierzu findet man mit einer Logarithmentafel $h_{max} = 5629,4$. Nach (10) errechnet man schliesslich

$$\lambda = \frac{3000 \text{ A/cm}}{5629,4 \text{ A/cm}} = 0,532 .$$

Fig. 2
Magnetisierungskurve (1) und Hysteresisschleife (2), wie in Fig. 1, jedoch mit logarithmischer Teilung der H -Achse

μ ist ein Mass für die Gedrängtheit der Skala im Gebiet der hohen Feldstärken.

Für sehr kleine Feldstärken, also in der Umgebung des Nullpunkts des Koordinatensystems, gilt näherungsweise (7). Ersetzt man darin x und h nach (3) und (1), so erhält man:

$$\frac{l}{\mu \text{ cm}} = 0,217147 \frac{H}{\lambda \text{ A/cm}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0,217147 \frac{H/\text{Acm}^{-1}}{l/\text{cm}} \tag{8}$$

Der Quotient der Masszahl der Feldstärke (für die Einheit A/cm) und der Masszahl der Länge (für die Einheit cm) ist also dem Quotienten der Konstanten λ und μ proportional: *Der Konstanten-Quotient λ/μ ist ein Mass für die Gedrängtheit der Skala in der Umgebung des Nullpunkts.*

Um die H -Skala zu berechnen, geht man wohl am besten wie folgt vor: Man nimmt zuerst die Feldstärke H_{max} an, die den Endwert der Skala bilden soll. Dann wählt man die Skalenlänge l_{max} , die — vom Nullpunkt aus abgetragen — H_{max} darstellt. Schliesslich wählt man noch die Konstante μ , wobei

Für die Berechnung der verschiedenen Skalenwerte wäre $\lambda = 0,5$ bequemer. Man kann daher folgende zweite Annahme treffen: $\lambda = 0,5$, $\mu = 4$, $H_{max} = 3000 \text{ A/cm}$. Es wird dann nach (1)

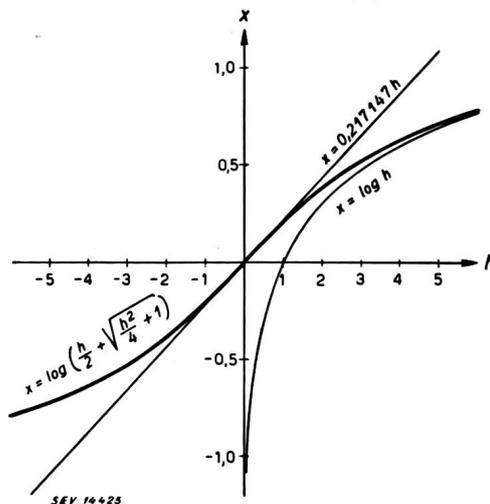


Fig. 3
Graphische Darstellung der Funktion $x = \log\left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1}\right)$, der für kleine Werte von h geltenden Näherung $x = 0,217147 h$ und der für grosse Werte von h geltenden Näherung $x = \log h$

$$h_{max} = \frac{3000 \text{ A/cm}}{0,5 \text{ A/cm}} = 6000.$$

Hierzu findet man $x_{max} = 3,77815$ und nach (3)

$$l_{max} = 3,77815 \cdot 4 \text{ cm} = 15,1126 \text{ cm}.$$

Dieser Wert kann wohl ohne weiteres hingenommen werden, da er von der ersten Annahme nur wenig abweicht.

$$y^2 + 1 = \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{y^2 + 1} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (15)$$

Damit wird nun:

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln e^x = x \quad (16)$$

Somit ist (14) bewiesen, wenn man rechts aussen x noch nach (13) umschreibt.

Aus der Definition (12) folgt, dass

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad (17)$$

gilt. Ändert also x das Vorzeichen, so ändert auch das Vorzeichen von $\sinh(x)$, also von y . Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Für die graphische Darstellung hat (17) zur Folge, dass die Kurve, die durch (13) gegeben ist, symmetrisch zum Nullpunkt des Koordinatensystems liegt.

Zur Darstellung von Magnetisierungskurven verwenden wir nicht (13), son-

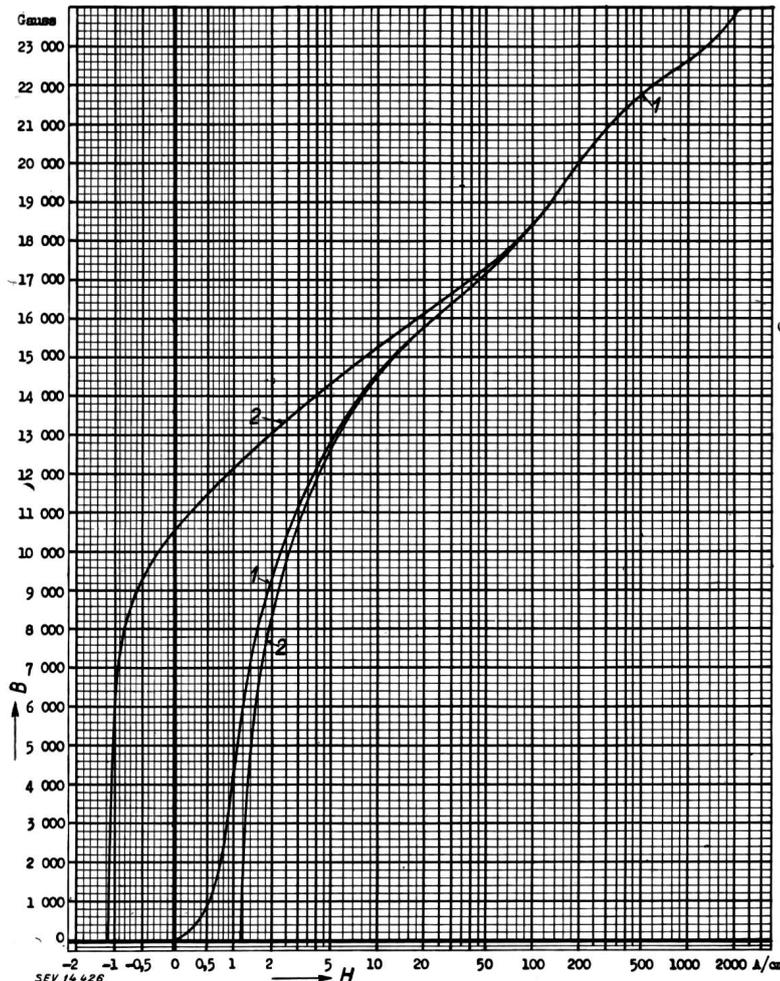


Fig. 4
Magnetisierungskurve (1) und Hysteresisschleife (2), wie in Fig. 1 und 2, jedoch mit neuer Teilung der H-Achse

I. Anhang: Mathematisches

Für die Funktion

$$y = \sinh(x) \quad (11)$$

(«sinh» bedeutet «sinus hyperbolicus») gilt folgende Definition:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (12)$$

Die Umkehrfunktion von (11) schreibt man

$$x = \operatorname{ar sinh}(y) \quad (13)$$

(«ar sinh» bedeutet «area sinus hyperbolicus»). Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$\operatorname{ar sinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (14)$$

ist, wenn man unter der Wurzel nur den positiven Wert versteht. Nach der Definition (2) wird nämlich:

dem die folgende, damit nahe verwandte Funktion:

$$x = \log\left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1}\right) \quad (18)$$

Sie unterscheidet sich von (13) hauptsächlich darin, dass man vom Ansatz

$$x = \log e \cdot \operatorname{ar sinh}(y) \quad (19)$$

ausgeht. Benützt man dann (14) und setzt man

$$y = h/2, \quad (20)$$

so findet man:

$$x = \log e \cdot \operatorname{ar sinh}\left(\frac{h}{2}\right) = \log e \cdot \ln\left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1}\right)$$

Hieraus erhält man (18), wenn man noch die bekannte Beziehung

$$\log e \cdot \ln a = \log a \quad (21)$$

beachtet.

Für kleine Werte von h verschwindet in (18) $\frac{h^2}{4}$ neben 1. Es wird somit für kleine Werte von h :

$$x = \log \left(\frac{h}{2} + 1 \right) = \log e \cdot \ln \left(\frac{h}{2} + 1 \right) \quad (22)$$

Mit der bekannten Reihe

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \quad (23)$$

erhält man dann:

$$x = \log e \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \right) \quad (24)$$

Vernachlässigt man noch die Glieder höherer Ordnung und beachtet man

$$\log e = 0,43429448, \quad (25)$$

so wird:

$$x = 0,434294 \quad y = 0,434294 \frac{h}{2} = 0,217147 h \quad (26)$$

Für kleine Werte von h wird somit die Funktion (18) durch eine Gerade dargestellt, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht. Damit ist die in Fig. 3 enthaltene Gerade begründet.

Für grosse Werte von h ist in (18) die Zahl 1 neben $\frac{h^2}{4}$ vernachlässigbar klein. Die Funktion (18) geht dann über in

$$x = \log h. \quad (27)$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion (18) für hohe positive Werte von h in den gemeinen Logarithmus von h übergeht, was Fig. 3 veranschaulicht.

2. Anhang: Wertetabelle

Die Werte der Funktion (18)

$$x = \log \left(\frac{h}{2} \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1} \right)$$

sind mit Hilfe einer fünfstelligen Logarithmentafel berechnet⁶⁾ und auf vier Stellen nach dem Komma gerundet. Dabei wurde eine 5 der fünften Stelle nach der nächsten geraden Zahl auf- oder abgerundet. Zum Vergleich sind auch die Werte der Nähe-

⁶⁾ Prof. Dr. *Willy Lüssy*, Winterthur, danke ich dafür, dass er durch seine Schüler eine Kontrollrechnung machen liess.

h	$x = \log \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1} \right)$	$x = \log h$	h	$x = \log \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 1} \right)$	$x = \log h$
0	0	$-\infty$	5	0,7154	0,6990
0,1	0,0217	-1	5,2	0,7312	0,7160
0,2	0,0434	-0,6990	5,4	0,7466	0,7324
0,3	0,0649	-0,5229	5,6	0,7614	0,7482
0,4	0,0863	-0,3979	5,8	0,7758	0,7634
0,5	0,1075	-0,3010	6	0,7897	0,7782
0,6	0,1284	-0,2218	6,2	0,8033	0,7924
0,7	0,1491	-0,1549	6,4	0,8164	0,8062
0,8	0,1694	-0,0969	6,6	0,8292	0,8195
0,9	0,1894	-0,0458	6,8	0,8416	0,8325
1	0,2090	0	7	0,8537	0,8451
1,1	0,2282	0,0414	7,2	0,8655	0,8573
1,2	0,2470	0,0792	7,4	0,8770	0,8692
1,3	0,2655	0,1139	7,6	0,8881	0,8808
1,4	0,2835	0,1461	7,8	0,8991	0,8921
1,5	0,3010	0,1761	8	0,9097	0,9031
1,6	0,3182	0,2041	8,2	0,9201	0,9138
1,7	0,3349	0,2304	8,4	0,9303	0,9243
1,8	0,3513	0,2553	8,6	0,9403	0,9345
1,9	0,3672	0,2788	8,8	0,9500	0,9445
2	0,3828	0,3010	9	0,9595	0,9542
2,1	0,3979	0,3222	9,2	0,9688	0,9638
2,2	0,4127	0,3424	9,4	0,9780	0,9731
2,3	0,4272	0,3617	9,6	0,9869	0,9823
2,4	0,4412	0,3802	9,8	0,9957	0,9912
2,5	0,4550	0,3979	10	1,0043	1
2,6	0,4684	0,4150	10,5	1,0251	1,0212
2,7	0,4812	0,4314	11	1,0449	1,0414
2,8	0,4942	0,4472	11,5	1,0639	1,0607
2,9	0,5067	0,4624	12	1,0822	1,0792
3	0,5189	0,4771	12,5	1,0997	1,0969
3,1	0,5308	0,4914	13	1,1165	1,1139
3,2	0,5424	0,5052	13,5	1,1327	1,1303
3,3	0,5538	0,5185	14	1,1483	1,1461
3,4	0,5649	0,5315	14,5	1,1634	1,1614
3,5	0,5758	0,5441	15	1,1780	1,1761
3,6	0,5865	0,5563	15,5	1,1921	1,1903
3,7	0,5969	0,5682	16	1,2058	1,2041
3,8	0,6071	0,5798	16,5	1,2191	1,2175
3,9	0,6172	0,5911	17	1,2320	1,2304
4	0,6270	0,6021	17,5	1,2444	1,2430
4,2	0,6460	0,6232	18	1,2566	1,2553
4,4	0,6643	0,6434	18,5	1,2684	1,2672
4,6	0,6820	0,6628	19	1,2800	1,2788
4,8	0,6990	0,6812	19,5	1,2912	1,2900

rungsfunktion (27) aufgeführt. Für $h \geq 20$ darf mit weniger als 1^{0/00} Fehler die Näherungsfunktion verwendet werden. In umgekehrter Richtung gilt die Näherungsfunktion für $x \geq 1,3$ mit weniger als 3^{0/00} Fehler.

Adresse des Autors:

Prof. *M. Landolt*, Direktor des Technikums des Kantons Zürich, Wartstrasse 66, Winterthur.