

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 46 (1955)
Heft: 13

Artikel: Zwei Gedanken-Experimente von Einstein zur Herleitung des Ausdrucks mc^2 für den Energie-Inhalt einer Masse m
Autor: Boveri, Th.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1060938>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

GEMEINSAMES PUBLIKATIONSORGAN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS (SEV) UND
DES VERBANDES SCHWEIZERISCHER ELEKTRIZITÄTSWERKE (VSE)

Zwei Gedanken-Experimente von Einstein

zur Herleitung des Ausdruckes mc^2 für den Energie-Inhalt einer Masse m

Von Th. Boveri, Baden

530.12

Es werden zwei Gedankenexperimente von Einstein wiedergegeben, aus denen der Ausdruck mc^2 für den Energie-Inhalt einer Masse m gefolgert werden kann. Sie beruhen beide auf dem Impulssatz der klassischen Mechanik und dem Strahlungsdrucke, wie er sich aus der Maxwellschen Theorie ergibt. Relativistische Überlegungen, insbesondere die Lorentz-Transformation, werden nicht herangezogen.

L'auteur expose deux raisonnements d'Einstein desquels on peut déduire l'expression mc^2 pour l'énergie contenue dans une masse m . Ils se basent tous deux sur le théorème de la conservation de l'impulsion de la mécanique classique et sur la pression de rayonnement de la théorie de Maxwell. On ne se sert ni de considérations relativistes ni surtout de la transformation de Lorentz.

1. Einleitung

Der im Titel dieses Aufsatzes umschriebene Satz mit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s gleich der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum hat in der neuesten Zeit eine vielfache experimentelle Bestätigung erhalten, indem bei den Verwandlungen der Atomkerne gewisse Bruchteile der beteiligten Gesamtmasse scheinbar verschwinden, während anderseits ein Energiebetrag neu auftritt, der genau der angegebenen Relation entspricht. Da die Beziehung also durch Versuche einwandfrei erhärtet ist, könnte man zur Not auf ihre Ableitung aus andern Grundtatsachen verzichten. In Anbetracht ihrer ausserordentlich grossen Bedeutung wäre dies jedoch nicht sehr befriedigend. Der menschliche Geist hat das Bedürfnis, das praktisch Bedeutungsvolle auch als Folgerung aus elementaren Grundtatsachen erkennen zu können. Ausserdem ist es eine geschichtliche Tatsache, dass Einstein den Satz schon 1905 als zwingende Folgerung aus seiner speziellen Relativitätstheorie erkannt und ausgesprochen hat. Seinen damaligen Überlegungen zu folgen, bedingt aber auch heute noch ein ziemlich grosses Mass abstrakten Denkens. Daher ist es sehr bemerkenswert, dass Einstein selbst später zwei einfache Gedanken-Experimente mit demselben Ergebnis angestellt hat, die nicht auf spezieller Relativitätstheorie beruhen. Beide machen Gebrauch vom Impuls-Satze der klassischen Mechanik von Newton, wonach in einem abgeschlossenen System die gesamte Bewegungsgrösse, d. h. die vektorielle Summe aller Produkte aus den einzelnen Massen und ihren zugehörigen Geschwindigkeiten konstant bleibt. Dieser Satz ist eine Folge eines andern, ebenfalls von Newton ausgesprochenen über die Gleichheit von Aktion und Reaktion; die Kraft, die der Punkt m auf den Punkt n ausübt, ist entgegengesetzt gleich der von n auf m ausgeübten. Die erwähnten Überlegungen von Einstein

machen es auch ganz klar, dass man jede Art von Energie in die Beziehung einschliessen muss, was bei den relativistischen Beweisen nicht so leicht herauszuarbeiten ist. Beide Gedanken-Experimente setzen die Kenntnis voraus, dass die Emission einer elektromagnetischen Welle vom gesamten Energiegehalt U , die wir uns der Einfachheit halber als eben und polarisiert vorstellen können, einen Rückstoss U/c im Gefolge hat. Dies soll, quasi als Anhang unter Abschnitt 5, der Vollständigkeit halber kurz abgeleitet werden. Beinahe überflüssig ist es wohl, auf den Unterschied hinzuweisen, der besteht zwischen der Energie mc^2 , die der Masse m als solcher zukommen soll und der bekannten potentiellen bzw. kinetischen Energie, die sie haben kann infolge ihrer Lage in einem Kraftfeld, bzw. infolge ihrer Geschwindigkeit in irgendeinem Koordinatensystem. Diese beiden Energiearten werden greifbar nicht durch Verschwinden der Masse, sondern durch ihren Fall, bzw. ihre Abbremsung.

2. Gedanken-Experiment 1

Fig. 1 zeigt die Anordnung des ersten Experimentes ¹⁾. In der evakuierten Röhre wird vom linken Verschlusszapfen aus eine elektromagnetische Welle der Total-Energie U nach rechts emittiert. Sie erteilt der Röhre nach links einen Rückstoss $-U/c$. Ist M die Masse der Röhre, so erhält sie durch den Rückstoss eine Geschwindigkeit v nach links und es ist

$$\frac{U}{c} = Mv$$

Nach einer Zeit l/c ist die Welle vom rechten Verschlusszapfen absorbiert worden; die Bewegung kommt durch den dem ersten entgegengesetzten

¹⁾ siehe auch Laue, M. von: Inertia and Energy in A. Einstein, Philosopher and Scientist. Evanston, Ill.; 1949.

Rückstoss $+ U/c$ zum Stillstand. Der (nach links) zurückgelegte Weg beträgt

$$\delta_1 = - \frac{U}{c} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{l}{c}$$

Es sei m_1 die Masse des rechten Verschlusszapfens, und zwar, wie wir zunächst scheinbar überflüssigerweise betonen, nach Empfang der Energie U .

$$m_1 \ll M \tag{1}$$

Es werde nun dieser Verschlusszapfen mitsamt der eben empfangenen Energie U in der Röhre nach links verschoben bis zur Berührung mit dem linken Verschlusszapfen. Die Kraft, die dazu benötigt wird,

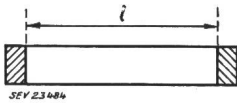


Fig. 1
Evakuierte Röhre für das Gedanken-Experiment 1

greift irgendwo im Innern der Röhre an, sie kann die gesamte Bewegungsgrösse der Röhre nicht verändern. Der Linksverschiebung um l der Masse m_1 muss durch eine Rechtsverschiebung um δ_2 der Masse M entgegengearbeitet werden. Es ist damit

$$M \delta_2 = m_1 l$$

$$\delta_2 = \frac{l m_1}{M} \tag{2}$$

Dieser Vorgang kann sich in einer beliebigen Zeit abspielen, weshalb diese Grösse aus der Betrachtung herausfällt.

Der rechte Verschlusszapfen soll nun bei der angenommenen Berührung mit dem linken die Energie, die ihm vorher zugestrahlt worden war, an den linken abgeben. Er möge nachher die Masse m_2 haben, wobei es für den auf dem Standpunkte der klassischen Mechanik Stehenden selbstverständlich erscheint, dass

$$m_1 = m_2$$

Schreiben wir aber immerhin bei der nun endlich vorzunehmenden Verschiebung des rechten Verschlusszapfens in seine ursprüngliche Lage rechts für die kompensierende Linksverschiebung der gesamten Röhre analog Gl (2):

$$\delta_3 = - \frac{l m_2}{M}$$

Unsere Röhre befindet sich nun wieder vollständig im Zustande, den sie bei Beginn unseres Gedanken-Experimentes hatte. Da sich ihre gesamte Bewegungsgrösse nicht verändert haben kann, hat sie auch keinerlei resultierende Ortsveränderung erlitten. Daher ist

$$0 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = - \frac{U l}{M c^2} + \frac{l m_1}{M} - \frac{l m_2}{M}$$

oder

$$m_1 - m_2 = \frac{U}{c^2} \tag{3}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Masse m_1 sich durch Abgabe der Energie U um den Betrag U/c^2

auf $m_2 = m_1 - U/c^2$ ermässigt hat. Dies ist genau die Beziehung, auf der die Energiegewinnung in der Atomphysik beruht. Wir halten fest, dass der Beweis vollständig auf dem Impuls-Satz der klassischen Mechanik und auf dem Strahlungsdruck der Maxwellschen Theorie beruht. Die Voraussetzung von Gl. (1) ist keine wesentliche Einschränkung, da sie im Gedanken-Experiment mit jeder beliebigen Annäherung verwirklicht gedacht werden kann.

3. Gedanken-Experiment 2

Das zweite Gedanken-Experiment²⁾ beruht auf der sog. Aberration. Denken wir uns, wir wollten aus einem mit der Geschwindigkeit v fahrenden Eisenbahnzuge senkrecht zur Fahrriichtung durchs Fenster hinaus, etwa nach rechts mit der Geschwindigkeit c auf eine stillstehende Scheibe schießen, so würde nach der klassischen Mechanik das Geschoss neben dieser Geschwindigkeit c auch noch eine solche vom Betrag v in Fahrriichtung, also rechtwinklig zur ersten dauernd beibehalten, so dass man, um zu treffen, das Gewehr um einen Winkel nach rechts gegenüber der genauen Querrichtung verdrehen müsste, dessen Betrag für

$$v \ll c$$

unter Gleichsetzung von Bogen und Tangens gleich v/c ist. Im Gedanken-Experiment wird diese Beziehung auf elektromagnetische Strahlung angewandt, für welche die gegebene Ableitung mit der Geschwindigkeit nicht ohne weiteres schlüssig ist, schon deshalb nicht, weil ja für die Beobachtung des Verhaltens von Licht nicht gut selbst wieder Lichtstrahlen zum Zielen benützt werden können. Doch hat sich immerhin der Ausdruck v/c für den Aberrationswinkel in der Astronomie weitgehend bewährt. Es soll nun in Fig. 2 K irgendeinen mate-

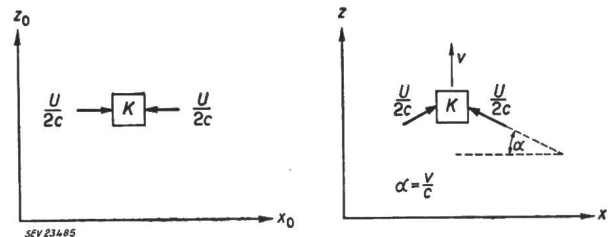


Fig. 2

Empfang zweier entgegengesetzt gerichteter Strahlungs-Pakete durch einen Körper K , entsprechend Gedanken-Experiment 2

riellen Körper bedeuten, der im Koordinatensystem x_0, y_0, z_0 ruht. Es werde ihm in horizontaler Richtung von zwei entgegengesetzten Seiten je ein Energiepaket vom Betrage $U/2$ zugestrahlt, welche beiden Pakete dem Körper zwei sich gegenseitig aufhebende horizontale Stösse je vom Betrage $U/2c$ mitteilen. Der Impulssatz ist erfüllt. Nun betrachten wir den Körper sozusagen vom fahrenden Zuge aus, indem wir uns das zweite Koordinatensystem x, y, z gegenüber K und x_0, y_0, z_0 mit der konstanten Geschwindigkeit v in der negativen z - und z_0 -Richtung (nach unten) bewegt denken. Um den Körper K zu

²⁾ siehe auch Einstein A.: Aus meinen späten Jahren. Stuttgart 1952.

treffen, muss die Strahlung um den Aberrationswinkel v/c schief nach oben gerichtet sein, so dass die beiden Impulse je eine Komponente $U/2c \cdot v/c = Uv/2c^2$ nach oben erhalten, die sich beim Auftreffen der Strahlung dem Körper K mitteilen. Deren Summe, Uv/c^2 muss, um dem Impulssatze Genüge zu leisten, irgendwie kompensiert werden. Es kann dies nicht durch Beschleunigung von K nach oben geschehen, denn K ist ja im System x_0, y_0, z_0 festgehalten und die Geschwindigkeit v des Beobachters soll konstant sein. Es bleibt also wieder nichts anderes übrig, als dem Körper K nach Aufnahme der Energie U eine andere Masse m_1 zuzuschreiben, als die Masse m_2 , welche er vorher besass. Die ursprüngliche nach oben gerichtete Bewegungsgrösse m_2v erhält durch die Bestrahlung einen Vertikalzuwachs Uv/c^2 . Der Impulssatz ergibt für die nach der Energieaufnahme vergrösserte Masse

$$m_1 v = m_2 v + \frac{U v}{c^2}$$

also wieder

$$m_1 - m_2 = \frac{U}{c^2} \tag{4}$$

als Massenzuwachs nach Aufnahme der Energie U .

4. Auswertung der Experimente

Das Gemeinsame der beiden Gedanken-Experimente wurde schon eingangs skizziert. Es seien noch kurz die Unterschiede betrachtet. Experiment 1 hat den Vorteil, nicht mit Relativbewegungen zu arbeiten, und damit Diskussionen darüber zu vermeiden, ob und wo relativistische Korrekturen hätten angebracht werden sollen. Andererseits bleibt die Frage offen, wie sich der Energieaustausch durch blosser Berührung und die Bewegung des rechten Verschlusszapfens im Einzelnen vollziehen. Alles in allem ist Experiment 1 überlegen. Experiment 2 operiert mit Relativbewegung und legt daher Vergleiche mit einem nach Tolman³⁾ benannten Experiment nahe, die leicht zu Irrtümern führen können, weil das Tolman-Experiment im Gegensatz zu den beiden Einsteinschen sich auf die sog. Lorentzsche Transformation, d. h. auf die spezielle Relativitätstheorie stützt. Auch bedeutet die Einführung der Aberrationsformel streng genommen eine Anleihe bei der Astronomie. Ungeachtet dieser scheinbar wesentlichen Unterschiede erhält man aber doch auf beiden Wegen übereinstimmend das Resultat von Gl. (4).

5. Rückstoss der elektromagnetischen Welle

Es werde nun noch ganz kurz der Ausdruck für den Rückstoss U/c der elektromagnetischen Welle begründet. Für eine einwandfreie Ableitung sei auf die Lehrbücher verwiesen. Betrachten wir zunächst ein würfelförmiges Raumelement des elektrischen Feldes im Vacuum von der Kantenlänge l . Sind zwei gegenüberliegende Flächen mit der elektrischen Ladung

$$D = \epsilon_0 E$$

(ϵ_0 Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes)

belegt, so beträgt die Spannung zwischen ihnen E . Ist x eine Zahl, die während der Aufladung dieses Kondensators von 0...1 wächst, so können wir die momentane Spannung mit xE und den jeweiligen Ladungs-Zuwachs mit $\epsilon_0 E dx$ bezeichnen. Die für die Ladung bis zur Spannung E aufzuwendende elektrische Arbeit ergibt sich durch Integration von 0...1 des Produktes $\epsilon_0 E^2 x dx$ zu $\epsilon_0 E^2/2$. Dies ist der Betrag der elektrischen Feldenergie. Da die elektromagnetischen Wellen transversal sind, berechnen wir den Querdruck des Feldes. Es werde die Stirnfläche unseres Würfels von 1 auf $1 + \eta$ vergrössert. Bei festgehaltener Spannung E ist der Zuwachs der Feldenergie $\eta \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Zwecks Festhaltung von E ist die Ladung $\eta \epsilon_0 E$ zuzuführen, also die Arbeit $\eta \epsilon_0 E^2$. Da hiervon nur die Hälfte sich als Feldenergie aufspeichert, wird die andere Hälfte Arbeit des Querdruckes σ_e sein.

$$\sigma_e \eta = \eta \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$\sigma_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Der Querdruck ist also gleich der Energiedichte. Den Längszug würde man gleich gross aber von entgegengesetztem Vorzeichen finden.

Beim magnetischen Feld denken wir uns die beiden Stirnflächen als Quelle der Feldstärke $H = i$, wo i die Stromdichte in den vier andern Flächen parallel zu den Stirnflächen strömend ist. Der Induktionsfluss ist

$$B = \mu_0 H$$

(μ_0 Permeabilität des leeren Raumes)

Die zum Feldaufbau nötige Arbeit ergibt sich durch Integration von 0...1 des Produktes

$$x i \mu_0 H dx = x H \mu_0 H dx$$

zu

$$\frac{\mu_0 H^2}{2}$$

die Arbeitszufuhr zur Aufrechterhaltung von H zu

$$i \eta \mu_0 H = \eta \mu_0 H^2$$

und somit der magnetische Querdruck aus

$$\sigma_m \eta = \eta \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

zu

$$\sigma_m = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Der totale Querdruck ist also

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = u$$

gleich der totalen Energiedichte.

³⁾ siehe auch Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. 4. Aufl., S. 224, Leipzig: 1942.

Schreiben wir nun der elektromagnetischen Welle eine Impulsdichte ψ zu und wächst die Welle wie in unseren Gedanken-Experimenten senkrecht zu einer emittierenden Ebene mit der Geschwindigkeit c in Richtung $+x$ vor, so sammelt sich pro Flächeneinheit in der Zeit t der Impuls ψct an. Die zeitliche Zunahme dieses Ausdruckes ist zahlenmässig gleich dem Strahlungsdruck, also

$$\sigma = u = \psi c$$

$$\psi = \frac{u}{c}$$

Für ein beliebiges Volumen V haben wir

$$\Psi = V\psi; \quad U = Vu$$

und somit

$$\Psi = U/c$$

was wir beweisen wollten.

Einzelheiten zu der hier gegebenen Ableitung findet man bei Max Planck, Einführung in die

Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, Leipzig, S. Hirzel, 1922, Seite 189. Einen noch direkteren Beweis unmittelbar mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen erläutert Planck in Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, 1923, Seite 50 ff. Das viel verwendete Werk von R. Becker, Theorie der Elektrizität, Teubner, Leipzig 1951, gibt auf Seite 216 die Impulsdichte als Energiestrahlungsvektor dividiert durch c^2 . Dass diese Beziehung mit der von uns benützten äquivalent ist, erkennt man daraus, dass die elektromagnetische Welle von der Energiedichte u und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c pro Zeiteinheit die Energie uc durch die Flächeneinheit senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung schiebt. Dieser Wert uc ist also gerade gleich dem Betrag des sogenannten Poyntingschen Strahlungsvektors.

Adresse des Autors:

Dr. h. c. Th. Boveri, Delegierter des Verwaltungsrates der A.-G. Brown, Boveri & Cie., Baden (AG).

Eine kritische Betrachtung der Anforderungen an Motorschutz-Schalter

Von J. Kirchdorfer, Aarau

621.316.1575

Nach einer eingehenden Darstellung der theoretischen Zusammenhänge bei der Erwärmung ungleichförmiger Körper werden die teils stark voneinander abweichenden Motorschutz-Vorschriften einiger Staaten diskutiert. Besonders die schweizerischen werden eingehend betrachtet und eine Änderung wird angeregt.

Après avoir exposé en détail les relations théoriques de l'échauffement de corps de formes irrégulières, l'auteur examine les prescriptions relatives à la protection des moteurs, qui diffèrent en partie considérablement selon les pays. Il considère d'une manière détaillée les prescriptions suisses et propose une modification.

1. Einleitung

Der Motorschutz wird in der Regel durch Auslöseorgane besorgt, welche die Erwärmung der Motorwicklung in Abhängigkeit vom aufgenommenen Strom einigermassen nachbilden. Meist sind dies Bimetall-Streifen oder -Pakete, welche sich proportional der Temperatur ausbiegen und damit die Auslösung bewirken. Dass die Nachbildung der Motor-Erwärmung durch derartige Auslösepakete wegen der teils starken Abweichung der Motoren untereinander und der preislich bedingten Forderung nach einer wirtschaftlichen Fertigung der Schutzschalter keine vollkommene sein kann, liegt auf der Hand. Man wird daher in der Praxis einen Kompromiss eingehen und die Auslöser einem «Norm-Motor» anpassen, dessen Kennwerte in den Vorschriften für Motorschutzschalter angegeben sind. Inwieweit dieser Kompromiss als günstig bezeichnet werden darf, kann ohne statistische Unterlagen über Motoren kaum beurteilt werden. Wenn man jedoch die starken Unterschiede betrachtet, die zwischen den diesbezüglichen Forderungen der einzelnen Staaten bestehen, und die Schwierigkeiten bei der Einhaltung der schweizerischen Vorschriften kennt, scheint es begründet, sich mit der Frage näher auseinanderzusetzen, ob der in der Schweiz getroffene Kompromiss unter den heutigen Bedingungen noch gerechtfertigt ist.

Bei der Behandlung dieser Frage sollen die wärmetechnischen Forderungen der entsprechenden Vorschriften der Schweiz, Englands, Deutschlands, der USA und Kanadas einander gegenübergestellt und diskutiert werden. Um die Forderungen selbst

und die Abstimmung ihrer einzelnen Punkte einigermaßen beurteilen zu können, sei deren Vergleich eine theoretische Betrachtung vorangestellt.

II. Allgemeines über die Erwärmung inhomogener Körper

Um das Erwärmungsverhalten von Motoren und Schaltgeräten möglichst anschaulich darstellen zu können, verwendet man in der Regel den Begriff der Zeitkonstanten. Liesse sich die Erwärmung der Motoren mit Hilfe einer solchen Zeitkonstanten mit ausreichender Genauigkeit beschreiben, so müsste man durch Auslöser mit der gleichen Zeitkonstanten diese Erwärmung ganz genau nachbilden können. Die Zeiten, welche von einem beliebigen Ausgangszustand an gerechnet bis zum Erreichen der Gefahrentemperatur am Motor, bzw. der Auslösetemperatur am Auslöser, verstreichen, wären dann gleich, ohne dass hierzu die Auslöse- und Gefahrentemperatur gleich sein müssten. Erfahrungsgemäss weichen aber die Erwärmungskurven inhomogener Körper ziemlich stark von der Exponentialform ab. Diese Abweichung kommt teils durch reine Wärmeleitung zu kälteren Teilen, teils durch Inkonzanz des elektrischen Widerstandes und des Wärmeüberganges an die Luft infolge ändernder Luftbewegung zustande. Für einfache Anordnungen, wie etwa nach Fig. 1, lassen sich die Zusammenhänge rechnerisch noch verhältnismässig gut erfassen, wie im folgenden gezeigt wird.

Bei Motoren hingegen sind die Verhältnisse schon erheblich komplizierter, und eine Lösung ist dementsprechend schwieriger. Es überlagern sich