

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 64 (1973)
Heft: 1

Artikel: Das Coulombsche Gesetz des Magnetismus für ferromagnetische Umgebung
Autor: Herzog, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-915500>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Coulombsche Gesetz des Magnetismus für ferromagnetische Umgebung ¹⁾

Von W. Herzog

621.318.122

Behandelt werden zwei Ersatzbilder des Magneten. Das Gesetz von Coulomb wird auf die Konstanten der Magnete zurückgeführt und für eine Umgebung aus ferromagnetischem Material abgeleitet. Hierbei ist die Kraft mit der relativen Permeabilität des zwischen den Polen liegenden Materials zu vervielfachen.

Deux images équivalentes de l'aimant sont traitées. La loi de Coulomb est ramenée aux constantes de l'aimant et déduite pour une ambiance en matière ferromagnétique. Ce faisant, la force doit être multipliée par le facteur de perméabilité de la matière se trouvant entre les pôles.

1. Zum Problem

Die übliche Darstellung des Coulombschen Gesetzes ist

$$F = \frac{p_1 p_2}{r^2} \quad (1)$$

wobei p_1 und p_2 die Polstärken, r den Abstand der Pole und F die Kraft bedeuten. Mit dem Proportionalitätsfaktor 1 wird durch diese Gleichung das elektromagnetische Maßsystem eingeführt. In anderen Darstellungen ist p die magnetische «Menge». Schliesslich findet man noch eine Beziehung, in der Polstärke und Fluss proportional sind oder je nach Masssystem sogar gleich. Als Hauptschwierigkeit wird die Bestimmung von r bezeichnet, weil der Magnetismus nicht punktförmig in den Polen konzentriert sei. Dazu wird gesagt, dass es magnetische «Mengen» nicht gibt.

Die Definition einer punktförmig konzentrierten Polstärke aus dem mit Eisenfeilspänen erzeugten Flussbild ist wenig überzeugend, zumal auch noch der Abstand r daraus zu bestimmen ist.

Nach einer kürzlichen Darstellung [1]²⁾ sind zwar die Enden eines Magneten nach wie vor der Austritt der magnetischen Kraftwirkung des Flusses, sie sind aber nicht der Ort der Kraft, genau so wenig, wie ein Wasser liefernder Hahn die Quelle darstellt oder etwas über dieselbe aussagt. Im Gegenteil, die Magnetenden verstreuen die Kraft eines Magneten wie ein nach allen Seiten spritzender Wasserhahn und täuschen so einen Kraftort vor.

Wie bereits dargestellt [1], lässt sich dieses Streubild durch eine geeignet gewickelte Spule erreichen, genauer durch eine schlecht gewickelte Spule. Aus diesem Grund zeigt eine normal – dicht an dicht – gewickelte Spule weniger Streuung, und eine punktförmige Polbildung ist noch weniger zu erkennen.

Der bereits von Ampère durchgeführte Vergleich des Magneten mit einer stromdurchflossenen Spule wird durch das Streubild der entsprechend gewickelten Spule erhärtet. Ein brauchbares Ersatzbild muss sich daher auf diesen Grundlagen aufbauen.

2. Das Ersatzbild eines Magneten

Eine Anordnung oder ein Gebilde, das eine Kraft zu liefern imstande ist, benötigt dazu eine Quelle. Eine solche besitzt eine konstante Grösse, die ihr den Namen gibt. Wird die Quelle nicht benutzt, so ist ausser dieser Grösse keine weitere erforderlich. Bringt man in die Nähe einer Quelle ein sie berührendes

des Ereignis, so wird die Quelle aktiv. Bringt man zum Beispiel in die Nähe eines Magneten – einer magnetischen Quelle – ein Stück Eisen oder einen zweiten Magneten, so entsteht die von Coulomb festgestellte Kraftwirkung, und zwar durch den leeren Raum und durch die Luft. Auch Eisenfeilspäne werden durch die wirkende Kraft ausgerichtet. Eine solche Einwirkung ohne Berührung verdeutlicht man, indem man sich einen von der Quelle ausgehenden Fluss vorstellt. Man kann an Flusslinienbildern zeigen, dass das in die Umgebung des Magneten gebrachte Stück Eisen den Fluss auf sich zieht und sogar selbst zum Magneten wird. Damit ist der Fluss durch das Eisenstück verändert.

Der Fluss eines Magneten ist von seiner Umgebung abhängig.

Die Anziehung der Flusslinien durch das Stück Eisen lässt sich dadurch erklären, dass dasselbe dem Fluss einen geringeren Widerstand bietet als die Luft. Aus dem gleichen Grund findet der an Quelle und Verbraucher geerdete elektrische Strom den Weg durch das gut leitende Grundwasser, falls der näher liegende Weg einen höheren Widerstand aufweist.

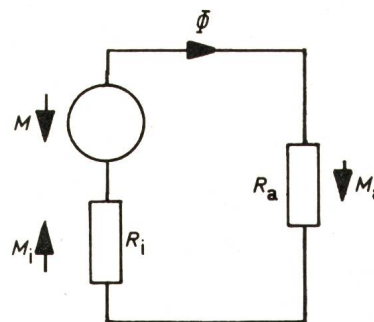


Fig. 1
Ersatzbild eines Magneten

M	Magnetgrösse
Φ	Fluss
R_i	Innenwiderstand
R_a	Aussenwiderstand
M_i	innerer Verlust der Magnetgrösse
M_a	äusserer Verlust (Verbrauch) der Magnetgrösse

Bei einer Spule ist die konstante Grösse – die Quellgrösse – durch den Strom I und die Anzahl der Windungen N also durch das Produkt NI gegeben. Eine ähnliche Möglichkeit bieten die Ampèreschen Molekularströme, deren Summe eine entsprechende Grösse darstellt.

Um nicht einen neuen Namen zu geben, sei die Quellgrösse eines Magneten als Magnetgrösse bezeichnet, als Dimension empfiehlt sich das Ampère.

Fig. 1 zeigt das so gewonnene Ersatzbild eines Magneten. Die Magnetgrösse M liefert einen Fluss Φ an die Umgebung. Der Fluss findet im Magneten selbst einen Widerstand R_i vor (entsprechend dem inneren Widerstand einer Spannungsquelle) und einen Widerstand R_a in der Umgebung. Die dazugehörige Gleichung lautet:

¹⁾ Mitteilung des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz.

²⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$M = \Phi (R_i + R_a) = M_i + M_a \quad (2)$$

M hat eine Richtung, es genügt – auch bei den anderen gerichteten Grössen – sich auf den Betrag zu beschränken. M_i kann man als inneren Verlust der Magnetgrösse bezeichnen, M_a ist der Verbrauch oder der Aussenverlust. Beide Grössen sind nicht konstant.

Aus Gl. (2) entnimmt man

$$\begin{aligned} \Phi R_i &= M_i \\ \Phi R_a &= M_a \end{aligned} \quad (3)$$

so dass man drei Beziehungen für den Fluss bekommt:

$$\Phi = \frac{M}{R_i + R_a} = \frac{M_i}{R_i} = \frac{M_a}{R_a} \quad (4)$$

Für die Widerstände R_i und R_a erhält man in bekannter Weise (nach Hopkinson):

$$R_i = \frac{l_{mi}}{\mu_{ri} \mu_0 A_i} \quad R_a = \frac{l_{ma}}{\mu_{ra} \mu_0 A_a} \quad (5)$$

Hierbei ist l_{mi} die Länge des Magneten – die allerdings nur für den aus den Enden desselben austretenden Hauptfluss gilt (s. Fig. 6) –, A_i der Querschnitt des Magneten und μ_{ri} seine relative Permeabilität. Im SI-System gilt:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (6)$$

Für den Widerstand R_a entspricht l_{ma} einem mittleren Weg aus den verschiedenen langen Flusslinien im Aussenraum und A_a einer resultierenden mittleren Fläche aus dem Querschnitt des gesamten Flusses. Beide Grössen lassen sich näherungsweise aus dem Flussbild bestimmen. Meistens interessiert nur das Verhältnis l_{ma}/A_a , das sich nach Gl. (2) durch Flussmessungen bestimmen lässt. Im Falle des Vakuums ist $\mu_{ra} = 1$, in Luft $\mu_{ra} = 1 + 0,37 \cdot 10^{-6}$.

Entsprechend der Leistung bei einem Stromkreis lässt sich eine Grösse P aus dem Produkt Magnetgrösse mal Fluss bilden

$$P = M \Phi \quad (7)$$

Gleicherweise ist

$$\begin{aligned} P_i &= M_i \Phi \\ P_a &= M_a \Phi \\ P_i + P_a &= P \end{aligned} \quad (8)$$

und mit den Gln. (3):

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{M_i^2}{R_i} = \Phi^2 R_i \\ P_a &= \frac{M_a^2}{R_a} = \Phi^2 R_a \end{aligned} \quad (9)$$

3. Das duale Ersatzbild

Fig. 2 zeigt das in der Form duale Ersatzbild, das einer dem Strom I gleichen oder proportionalen Magnetgrösse besser gerecht wird, da die Quellgrösse eine Stromquelle ist. Sinnvoll muss aber hier gesetzt werden

$$\begin{aligned} M &= I_k \\ R_i &= G_i \\ R_a &= G_a \end{aligned} \quad (10)$$

wobei die G -Werte Leitwerte pro Zeit sind. Jetzt tritt an die Stelle von Gl. (2):

$$I_k = \Phi (G_i + G_a) \quad (11)$$

Diese Formulierung sei im folgenden nicht weiter benutzt, um den Anschluss an bekannte Formeln nicht zu verlieren.

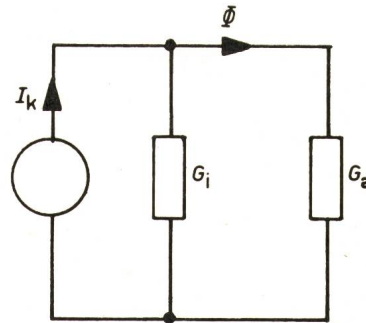


Fig. 2
Duales Ersatzbild
 I_k Magnetgrösse
 G_i, G_a Innen- und Aussenleitwert

4. Das Coulombsche Gesetz

Bringt man einen zweiten Magneten (Fig. 3) in die Umgebung eines Magneten, und zwar derart, dass nur zwei Enden aufeinander einwirken, so entsteht die von Coulomb beschriebene Kraftwirkung. Die Flüsse Φ und Φ' stellen die Verbindung zwischen den beiden Magneten her.

In der bekannten Form lautet die Beziehung für die Kraft F :

$$F = m \frac{B_0'}{\mu_0} \quad (12)$$

wobei m die magnetische «Menge» des einen Magneten und B_0' die Flussdichte des anderen ist. Die magnetische Menge sei durch den Fluss Φ ersetzt. Für die Induktion B_0' gilt:

$$B_0' = \frac{\Phi'}{A_z'} \quad (13)$$

so dass aus Gl. (12) wird:

$$F = \frac{\Phi \Phi'}{\mu_0 A_z'} \quad (14)$$

Entsprechend wird die Kraft am Ende des anderen Magneten

$$F' = \frac{\Phi \Phi'}{\mu_0 A_z} \quad (15)$$

Sind die Flächen A_z und A_z' verschieden (Fig. 4) und würde man geradlinigen Flussverlauf annehmen, so würden an den beiden Enden verschiedene Flüsse, nicht nur wegen der verschiedenen Magnetkonstanten, sondern auch wegen der Abstrahlungsflächen entstehen. Wie schon erwähnt, sucht der Fluss den leichtesten Weg, er füllt also den gesamten Raum zwischen den Flächen aus. Damit stehen die Kräfte nicht mehr senkrecht auf den Flächen, und die Ausgangsgleichung (12) ist nicht mehr ausreichend. Auch für die Widerstände müsste ein

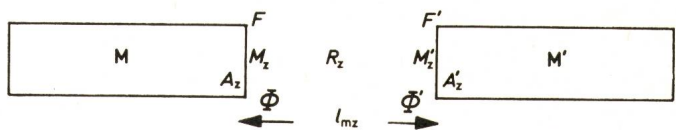


Fig. 3
Zwei Magnete (M und M') im Abstand l_{mz}
 R_z Widerstand des Zwischenteils
 F, F' Kräfte der Magnete
 A_z, A_z' Endflächen des Magneten
 M_z, M_z' Verlust der Magnetgrössen längs l_{mz}
 Φ, Φ' Flüsse der Magnete

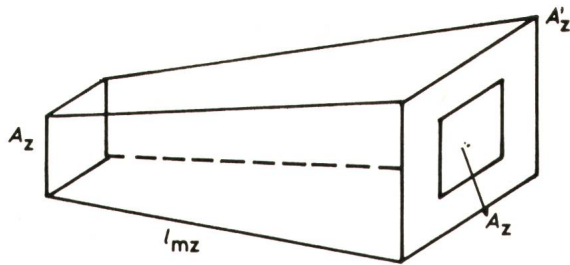


Fig. 4
Flussaufteilung bei verschiedenen Querschnitten der Magnete
Bezeichnungen siehe Fig. 3

Mittelwert eingesetzt werden. Die Betrachtung sei daher auf gleiche Flächen beschränkt:

$$A_z' = A_z \quad (16)$$

Die Anwendung von Gl. (3) ergibt:

$$F = F' = \frac{M_z M_z'}{\mu_0 A_z R_z^2} = \mu_0 A_z \frac{M_z M_z'}{l_{mz}^2} \quad (17)$$

Um A_z zu beseitigen, könnte man anstelle der Magnetgröße eine andere Größe wählen, die noch eine Länge enthält.

Es erscheint sinnvoll, die Kraft F auf die Fläche A_z zu normieren, also den Druck anzugeben

$$\frac{F}{A_z} = \mu_0 \frac{M_z M_z'}{l_{mz}^2} \quad (18)$$

In der bisherigen Darstellung wurde ein homogener in eine Richtung gehender Fluss zwischen den Magneten angenommen wie er etwa durch Fig. 5 (abgesehen vom Streufeld) realisiert ist. Coulomb hingegen ging von punktförmigen Magnetpolen aus, die nach allen Seiten gleich abstrahlen. Der Fluss verteilt sich jetzt auf eine Kugelfläche A_z' , die im Abstand l_{mz} den Wert hat:

$$A_z' = 4\pi l_{mz}^2 \quad (19)$$

In Gl. (14) eingesetzt, erhält man die bekannte Coulombsche Form:

$$F = \frac{\Phi \Phi'}{4\pi\mu_0 l_{mz}^2} \quad (20)$$

Auf die Gl. (18) entsprechende Umwandlung muss verzichtet werden, da die Fläche A_z nur als Grenzwert eingesetzt werden könnte. Ebenso ist ein Widerstand zwischen Punkten nicht definierbar, er wäre unendlich. Hervorzuheben ist, dass bei beiden Darstellungen der Abstand l_{mz} quadratisch im Nenner eingeht. Der Unterschied in der Beschaffenheit des Flusses – mehr oder weniger homogen – lässt sich durch eine Konstante wiedergeben.

5. Ferromagnetisches Material in der Umgebung eines Magneten

Für Luft (Vakuum) im Aussenraum eines Magneten gilt Gl. (2), deren vom Aussenraum abhängige Größen den Index 0 erhalten:

$$M = \Phi_0 (R_i + R_{a0}) \quad (21)$$

Füllt man die Umgebung mit ferromagnetischem Material auf – z. B. mit Eisenfeilspänen der relativen Permeabilität μ_{ra} –, so erhält man, entsprechend Gl. (21):

$$M = \Phi_\mu (R_i + R_{a\mu}) \quad (22)$$

Aus den Gln. (21) und (22) bildet man:

$$\frac{\Phi_\mu}{\Phi_0} = \frac{R_{a0} (1 + R_i/R_{a0})}{R_{a\mu} (1 + R_i/R_{a\mu})} \quad (23)$$

Für die Widerstände gilt:

$$\begin{aligned} R_{a0} &= \frac{l_{ma}}{\mu_0 A_a} \\ R_{a\mu} &= \frac{l_{ma}}{\mu_{ra} \mu_0 A_a} \\ \frac{R_{a0}}{R_{a\mu}} &= \mu_{ra} \end{aligned} \quad (24)$$

(Mit der Annahme, dass sich l_{ma} und A_a bei verschiedenem, jedoch homogenem Material nicht ändern.)

Falls R_i vernachlässigbar klein gegen $R_{a\mu}$ ist, ergibt sich aus den Gln. (23) und (24) die Näherungsgleichung:

$$\Phi_\mu = \mu_{ra} \Phi_0 \quad (25)$$

Bei Material höherer Permeabilität in der Umgebung eines Magneten erhöht sich – nahezu proportional der relativen Permeabilitätskonstanten – der Fluss.

6. Das Coulombsche Gesetz bei ferromagnetischer Umgebung

Bei ferromagnetischer Umgebung ändert sich B_0' in

$$B_\mu' = \mu_{ra} B_0' \quad (26)$$

so dass mit den Flüssen Φ_μ und Φ_μ' Gl. (14) ($A_z' = A_z$) sich ändert in:

$$F_\mu = \frac{\Phi_\mu \Phi_\mu'}{\mu_{ra} \mu_0 A_z} \quad (27)$$

Für den Zwischenraum ($\mu_{ra} = \mu_{rz}$) in Fig. 3 gilt

$$M_z = \Phi_\mu R_{a\mu} \quad M_z' = \Phi_\mu' R_{a\mu} \quad (28)$$

und man erhält

$$F_\mu = \frac{M_z M_z'}{\mu_{rz} \mu_0 R_{a\mu}^2 A_z} = \mu_{rz} \mu_0 A_z \frac{M_z M_z'}{l_{mz}^2} \quad (29)$$

und schliesslich

$$\frac{F_\mu}{A_z} = \mu_{rz} \mu_0 \frac{M_z M_z'}{l_{mz}^2} \quad (30)$$

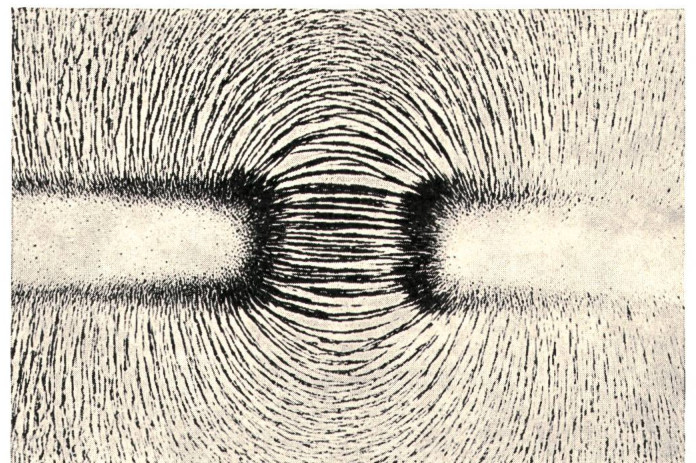


Fig. 5
Annähernd homogener Fluss zwischen zwei Magneten

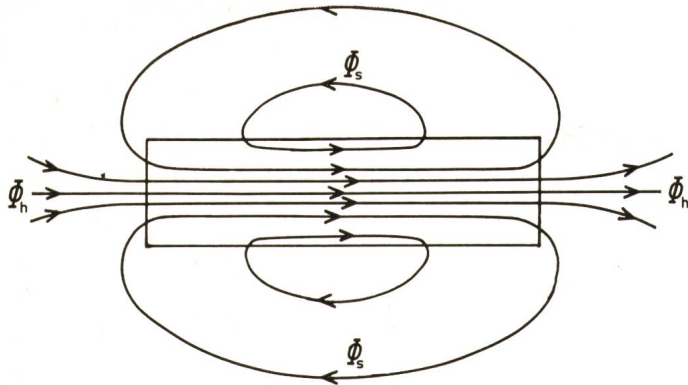


Fig. 6
Aufteilung des Magnetflusses in Hauptfluss Φ_h und Streufluss Φ_s

Der Vergleich der Gln. (30) und (18) zeigt

$$F_\mu = \mu_{rz} F \quad (31)$$

Befindet sich im Zwischenraum zwischen zwei Magneten ein ferromagnetisches Material der relativen Permeabilität μ_{rz} , so vervielfacht sich die Kraft mit μ_{rz} . Auch hier lässt sich für punktförmige Magnetpole die Gl. (19) auf Gl. (27) anwenden. Man erhält unter Hinzuziehung von Gl. (25):

$$F_\mu = \frac{\Phi_\mu \Phi_\mu'}{4 \pi \mu_{ra} \mu_0 l_{mz}^2} = \frac{\mu_{ra} \Phi_0 \Phi_0'}{4 \pi \mu_0 l_{mz}^2} \quad (32)$$

und mit Gl. (20) ebenfalls die Beziehung (31).

Als Versuch wurde der Fluss eines Magneten mit der Umgebung Luft und dann mit Eisenfeilspänen als Umgebung gemessen. Mit Luft ergab sich der Fluss $\Phi_0 = 92$ Skalenteile, umgeben mit Eisenfeilspänen der Fluss $\Phi_\mu = 113$ Skalenteile, der sich nach Erschüttern derselben durch Klopfen auf 115,5 Skalenteile erhöhte.

Als weiterer Versuch wurde ein Magnet mit einem zweiten Magneten, der als Waagebalken einer Coulombschen Waage benützt wurde, austariert. Füllt man in den Zwischenraum zwischen den Magnetenden Eisenfeilspäne, so wurde die Kraft erhöht, gleichgültig, ob gleiche oder ungleiche Magnetpole in Verbindung traten.

Die Formeln (30) und (31) gelten nicht für teilweise Ausfüllung. Hierfür müssten neue Formeln für inhomogenes Material zwischen den Magnetenden aufgestellt werden. Nach einer früheren Betrachtung [1], bildet jedoch ein eingebrachtes Stück mit dem anliegenden Magneten einen neuen Magneten mit einer erhöhten Magnetgrösse. Auf jeden Fall wird die Kraft erhöht, es sei denn, man bringt einen Magneten entgegengesetzter Flussrichtung ein.

Ein Nachteil der Coulombschen Formel und damit der Gln. (18) und (30) besteht in der Ermittlung der Grösse l_{mz} . Dieselbe ist der Abstand zwischen den Polen. In Fig. 3 wurde

sie etwas grösser als der Abstand der Magnetenden eingezeichnet. Es ist zu berücksichtigen, dass wegen der Streuung l_{m1} etwas kleiner als die Magnetlänge ist, entsprechend muss man für l_{mz} etwas zugeben, was sicherlich richtig ist, denn für $l_{mz} = 0$ müsste die Kraft nach den Gln. (18) und (30) unendlich gross werden. Nach den Fig. 1 und 12 des Aufsatzes [1] besteht keine Chance zur Ermittlung von Polen. Es sei daher

$$l_{mz} = r_a + r_0 \quad (33)$$

wobei r_a der Abstand der Magnete und r_0 der nicht zu bestimmende Abstand der Orte der Polstärken von den Magnetenden ist. Für $r_a = 0$ erhält man die maximal mögliche Kraft F_m .

Es ist nach den Gln. (18) und (33) für $r_a = 0$

$$\frac{F_m}{A_z} = \mu_{rz} \mu_0 \frac{M_z M_z'}{r_0^2} \quad (34)$$

und im Vergleich mit Gl. (18) ergibt sich:

$$\frac{F}{F_m} = \frac{r_0^2}{(r_0 + r_a)^2} \quad (35)$$

Aus Gl. (35) lässt sich r_0 berechnen.

Der Gedanke an einen konzentrierten Pol einer Menge wird völlig abwegig, wenn man die im Eisenfeilspänebild eines Magneten zu sehenden Richtungen, weder als von einem Pol kommend noch als zu einem solchen hin führend betrachtet, sondern aufteilt in einen Hauptfluss Φ_h und einen Streufluss Φ_s , der durch schiefes Auftreffen auf der Grenzfläche Magnet-Luft durch Brechung an derselben entsteht [1].

Fig. 6 zeigt eine Skizze einer solchen Aufteilung. Es ist

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_s \quad (36)$$

und mit Gl. (2)

$$M = \Phi_h (R_{ih} + R_{ah}) + \Phi_s (R_{is} + R_{as}) \quad (37)$$

wobei R_{is} kleiner als R_{ih} ist. Auch wenn man dem Hauptfluss einen grösseren Querschnitt zubilligt, dürfte R_{ah} grösser als R_{as} sein. Die kleineren Widerstände beim Streufluss sind vorteilhaft, denn da das Produkt aus dem Streufluss und den Widerständen die Magnetgrösse verringert, so ist die Verschlechterung geringer, als sie der Fluss allein vortäuscht. Messungen ergaben $\Phi_h = 11$ und $\Phi_s = 58$ Skalenteile [1].

Der Autor dankt Dr. *Bodenberger* für die Versuche.

Literatur

- [1] *W. Herzog*: Theorie des Magnetismus. Bull. SEV 63(1972)23, S. 1345... 1350.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Dr. *W. Herzog*, Direktor des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz, Joh. Joachim Becher-Weg 21, D-6500 Mainz.