

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 64 (1973)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Mechanische Schwingungen von Rohrsammelschienen in Freiluftschaltanlagen  
**Autor:** Möcks, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915512>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Mechanische Schwingungen von Rohrsammelschienen in Freiluftschaltanlagen

Von L. Möcks

621.316.35 : 621.311.47-742 : 62-752

Rohrsammelschienen von Freiluftschaltanlagen können vom Wind zu mechanischen Schwingungen mit beträchtlichen Amplituden angeregt werden. Der Mechanismus des Windantriebes wird erläutert. Nach Lösung der Differentialgleichung für freie und erzwungene Stabschwingungen werden Eigenwerte und Schwingungsformen auch für das mehrfach gelagerte Rohr abgeleitet.

Über das Problem der Rohrschwingungsdämpfung bzw. Tilgung wird in einer später erscheinenden Arbeit berichtet.

Sous l'action du vent, des jeux de barres tubulaires de postes de couplage en plein air peuvent vibrer avec des amplitudes considérables. Le mécanisme de l'action du vent est expliqué. Après solution de l'équation différentielle pour vibrations libres et forcées des barres, on en déduit les valeurs propres et les formes de vibration, également pour un tube supporté à plusieurs endroits.

Dans un autre article, publié ultérieurement, l'auteur s'occupera de l'amortissement ou de la suppression des vibrations des barres tubulaires.

## Verwendete Buchstabensymbole

$h_w$	Breite der Wirbelstrasse
$l_w$	Entfernung zweier benachbarter Wirbel einer Wirbelreihe
$f_w$	Frequenz der Wirbelablösung
$S$	Strouhal-Zahl
$v$	Strömungsgeschwindigkeit
$D$	Durchmesser des zylindrischen Körpers
$P_a$	Windantriebskraft
$c_A$	Auftriebsbeiwert
$E$	Elastizitätsmodul des Stabes
$I$	Flächenträgheitsmoment des Stabes
$\rho$	spezifische Dichte des Stabes
$\rho_L$	spezifische Dichte der Luft
$F$	Querschnittsfläche des Stabes
$\mu$	Massenbelag des Stabes
$t$	Zeit
$\delta$	Abklingkonstante
$p(x, t)$	orts- und zeitabhängige Störkraft
$\omega_n$	Eigenkreisfrequenzen des Stabes
$\varepsilon_f$	Phasenwinkel bei freier Schwingung
$X$	Verschiebung
$\lambda$	charakteristische Wurzel der Ortsgleichung
$l$	Feldlänge
$\varepsilon_e$	Phasenwinkel bei erzwungener Schwingung
$\psi$	Neigung
$M$	Moment
$Q$	Querkraft
$Y$	Vektor
$U, A, B$	Matrix

## 1. Einführung

In Freiluftschaltanlagen werden ausser Seilsammelschienen auch Rohrsammelschienen eingesetzt. Besondere Bedeutung hat das Rohr aus Aluminiumlegierung. Der Rohrdurchmesser liegt je nach Stützweite, Strombelastung und Nennspannung zwischen 80 und 400 mm.

An den Tragpunkten werden die Rohre entsprechend Anordnung und Aufteilung der Anlage auf Stützenisolatoren gelenkig gelagert oder fest eingespannt. Zur Vermeidung von unerwünschten Längskräften durch Wärmedehnungen ist jeweils ein Rohrende eines Teilfeldes in Rohrachsrichtung verschiebbar. An Stützstellen mit ungeschnittenem durchlaufendem Rohr hat die statische Biegebeanspruchung die gleiche Grösse wie bei der festen Einspannung, obwohl das Rohr drehbeweglich und längsverschiebbar gelagert ist (Fig. 1).

Die Art der Lagerung ist massgebend für die Rohr- und Stützerbeanspruchung. Dies gilt sowohl für innere (Eigen-gewicht) als auch äussere (Schaltstoss, Kurzschlußstrom) Kräfte.

Die in Fig. 1 dargestellten Lagerarten bzw. Beanspruchungsfälle gelten in erster Linie für gleichmässig über die

Längeneinheit verteilt angreifende Kräfte. Mit gewissen Einschränkungen gelten diese Beanspruchungsfälle auch für das horizontal oder vertikal schwingende Rohr (Grundschwin-gung).

Die mechanische Beanspruchung von Rohr und Stützer wird nahezu, unabhängig von der Art der angreifenden Kräfte, ein Minimum, wenn das Sammelschienenrohr an jedem Stützpunkt geschnitten und gelenkig gelagert wird. Eine solche Bauweise erfordert erhöhte Kosten und ist deshalb unwirtschaftlich. Die geschnittenen Rohrenden müssen durch relativ teure, allseitig elastisch arbeitende Strombrücken verbunden werden, damit die Rohrschiene ihre Aufgabe als Energie-strasse zuverlässig erfüllen kann (Fig. 2). In der Praxis über-wiegen Lösungen gemäss Fig. 1, Stützpunkte B, C, D.

## 2. Ziel der Arbeit

Sammelschienen-Schwingungen können durch Schaltstösse sowie Betriebs- und Kurzschlußströme angeregt werden. Die im ersten Fall angestossenen freien Schwingungen haben, da sie nur unregelmässig in weiten Zeitabständen auftreten und geringe Intensität besitzen, für die Beanspruchung von Rohr und Stützer kaum Bedeutung. Die Schwingungen klingen durch die vorhandene Eigendämpfung schnell ab.

Erzwungene Schwingungen durch magnetische Felder sind wesentlich gefährlicher. Ihre Auswirkungen wurden deshalb in zahlreichen Untersuchungen studiert [1; 2]<sup>1)</sup>.

Die vorliegende Arbeit befasst sich ausschliesslich mit wind-erregten Schwingungen, die über längere Zeitabschnitte ständig auftreten und deshalb die Gefahr von Ermüdungs-brüchen am Leiter oder Stützer einschliessen. Die Schwingun-gen gefährden ausserdem das sichere Zuschalten von Greifer-trennern.

Zunächst sei der eigentliche Antriebsmechanismus erläutert und anschliessend die Theorie der Rohr- bzw. Stabschwingung behandelt.

## 3. Windantrieb

Wird ein langgestreckter zylindrischer Körper von einem flüssigen oder gasförmigen Medium quer angeströmt, so lösen sich innerhalb eines bestimmten Bandes der Strömungs-geschwindigkeit auf der Leeseite Wirbel ab. Über die ersten experimentellen Beobachtungen dieser Art berichtet V. Strou-hal [3]. Theodor von Kármán [4] entwickelte die Stabilitäts-

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

theorie der Wirbelstrasse mit einem konstanten Verhältnis zwischen Breite  $h_w$  und Teilung  $l_w$  der Wirbelstrasse (Fig. 3).

$$\frac{h_w}{l_w} = 0,281 \quad (1)$$

Die Frequenz  $f_w$  der Kármán-Wirbel folgt bei ruhendem Körper dem Gesetz:

$$f_w = S \frac{v}{D} \quad (2)$$

Die Strouhal-Zahl  $S$  ist entgegen früherer Annahmen nicht konstant, sondern eine Funktion der Reynold-Zahl [5]. Im Bereich der Reynold-Zahlen von  $10^2 \dots 10^5$  schwankt  $S$  etwa zwischen 0,17 und 0,2.

Mit der Wirbelablösung vom Zylinder ist ein Quertrieb verbunden, der versucht, den Zylinder zu rhythmischen Bewegungen quer zur Strömung anzuregen. Gerät der Zylinder in der Strömung in Schwingungen, so wird die Strouhal-Zahl  $S$  kleiner als bei ruhendem Zylinder [6].

Den Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit, Schwingfrequenz und Schwingamplitude hat *Meier-Windhorst* [7] in Versuchen geklärt und übersichtlich dargestellt (Fig. 4).

Nach den Untersuchungsergebnissen von *Meier-Windhorst* schwingt der zylindrische Stab unterhalb seiner System-Eigenfrequenz mit recht kleinen Amplituden. Die Schwingfrequenz deckt sich mit der Kármánschen-Wirbelfrequenz. In der Nähe der Eigenfrequenz springt die Schwingfrequenz des Stabes auf die System-Eigenfrequenz. Die Schwingamplitude steigt steil an. Trotz Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit bleibt Amplitude und Frequenz im «kritischen Bereich» nahezu konstant.

Beobachtungen ähnlicher Art wurden auch von *Maas* [8] festgehalten und als «Mitnahmeerscheinung» im Bereich der System-Eigenfrequenz bezeichnet.

Diese Erkenntnisse sind für die Praxis von entscheidender Bedeutung. Sie besagen allgemein, dass bei annähernder Übereinstimmung zwischen Wirbelfrequenz und System-

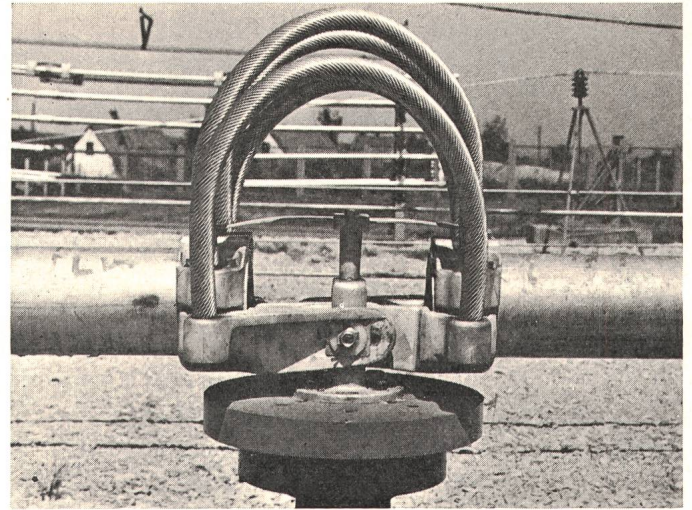


Fig. 2  
Leitungsträger mit Reibdämpfer

Eigenfrequenz der schwingende Körper in einem relativ breiten Toleranzbereich der Strömungsgeschwindigkeit (kritischer Bereich) die Wirbelablösung selbst steuert. Damit gibt es für jedes kreiszylindrische, schwingungsfähige System, das einer Strömung ausgesetzt wird, nicht nur *eine* definierte kritische Strömungsgeschwindigkeit, sondern einen relativ breiten Bereich von Strömungsgeschwindigkeiten, innerhalb dessen Resonanz mit grossen Schwingamplituden auftritt.

Die Windantriebskraft pro Längseinheit (Quertriebs- oder Auftriebskraft) ergibt sich aus [9] zu:

$$P_a = \frac{1}{2} \rho v^2 D c_A \quad (3)$$

Die Antriebskraft nimmt demnach linear mit dem Durchmesser  $D$  und quadratisch mit der Windgeschwindigkeit  $v$  zu.  $c_A$  ist ein instationärer Auftriebswert, dessen Betrag abhängig

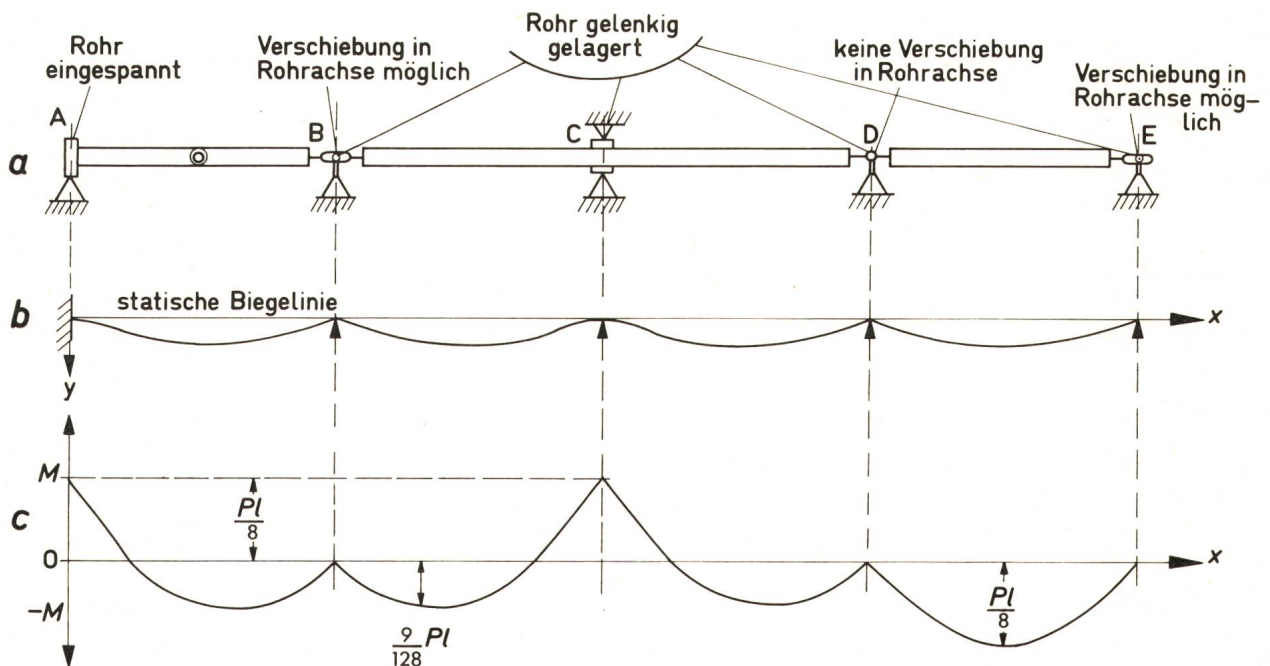


Fig. 1  
Arten der Rohrlagerung (a), Biegelinie (b), Momentenlinie (c)

ist von der Reynold-Zahl, der Strouhal-Zahl und der Zeit. Für Überschlagsrechnungen kann am langgestreckten Zylinder etwa  $c_A = 1,7$  angesetzt werden [6].

Die Praxis hat inzwischen gezeigt, dass die kräftigsten Schwingungen von Windgeschwindigkeiten im Bereich 0,3...2 m/s angeregt werden. Bei Geschwindigkeiten oberhalb 5 m/s wird aus aerodynamischen Gründen die Regelmässigkeit der Kármánschen Wirbel gestört, so dass der harmonische Verlauf des Quertriebes bzw. der Antriebskraft verlorengeht.

Neben der Anregung durch Quertriebskräfte als Folge der Kármánschen Wirbelbildung hat das instabile Verhalten von schwingungsfähigen Körpern im Luftstrom noch eine gewisse Bedeutung. Schwingungen, ausgelöst durch aerodynamische Instabilität, können recht energiereich werden. Voraussetzung für aerodynamische Instabilität sind in der Regel Profile mit vorgegebenen Kanten, an denen die Strömung abreisst. Die Instabilität selbst ist nahezu unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit bzw. der Reynold-Zahl, während die Schwingamplitude mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit wächst.

Schwingungen durch aerodynamische Instabilität haben in Freiluftschaltanlagen nur Bedeutung, wenn als Sammelschiene ein kantiges Profil eingesetzt wird oder das Rundprofil durch Eis- bzw. Rauhreifansatz scharfe Kanten erhält.

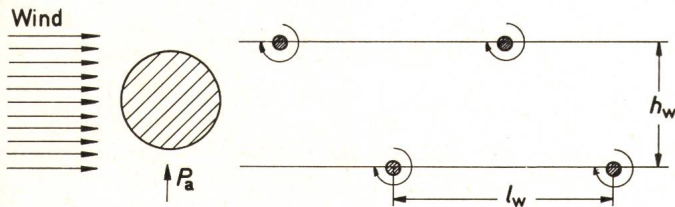


Fig. 3  
Kármánsche Wirbelstrasse  
Bezeichnungen siehe im Text

Beide Möglichkeiten sind in Freiluftschaltanlagen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit gegeben, so dass das Problem der Schwingungen, ausgelöst durch aerodynamische Instabilität, hier nicht berücksichtigt wird.

#### 4. Theorie der Rohr- bzw. Stabschwingung (Fig. 5)

##### 4.1 Differentialgleichung des schwingenden Stabes

Die Biegesteife  $EI$  sowie die Massenbelegung  $\rho F = \mu$  sollen konstant sein. Die Schwingungsamplituden sollen klein bleiben, die Rotationsträgheit des Stabelementes kann dann unberücksichtigt bleiben. Die Stabeigendämpfung soll geschwindigkeitsproportional sein.

Mit diesen Annahmen bzw. Vereinfachungen lautet die Differentialgleichung der erzwungenen gedämpften Biegeschwingung des Stabes:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\mu\delta \frac{\partial y}{\partial t} = P(x, t) \quad (4)$$

Die Lösung der Gl. (4) ohne Störkraft erfolgt mit Hilfe des Bernoullischen Lösungsansatzes [10]

$$y_f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{fn}(t) \cdot X_{fn}(x) \quad (5)$$

und lautet für die Zeitgleichung

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + 2\delta \frac{dT}{dt} + T\omega^2 = 0 \quad (6)$$

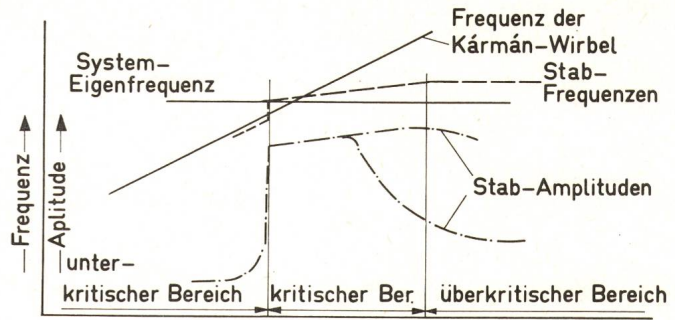


Fig. 4  
Qualitative Darstellungen der Schwingungen eines elastisch gelagerten, zylindrischen Stabes in strömendem Wasser  
Amplitude und Frequenz in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit

und für die Ortsgleichung

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - X\omega_n^2 \frac{\partial \mu}{EI} = 0 \quad (7)$$

Die Lösung der Zeitgleichung schreibt sich mit den Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = j\delta \pm \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2} \quad (8)$$

$$T_f = A e^{-\delta t} \cos\{\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2} \cdot t - \varepsilon_f\} \quad (9)$$

mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (10)$$

und

$$\operatorname{tg} \varepsilon_f = \frac{A_2}{A_1} \quad (11)$$

Die Lösung der Ortsgleichung (7) lautet mit dem Lösungsansatz

$$X_f = C' e^{\frac{\lambda}{l} x} \quad (12)$$

$$X_f = C_1 \cos h \frac{\lambda}{l} x + C_2 \sin h \frac{\lambda}{l} x + C_3 \cos \frac{\lambda}{l} x + C_4 \sin \frac{\lambda}{l} x \quad (13)$$

Die Konstanten der Ortsfunktion werden unter Einschaltung der Randbedingungen bzw. Lagerbedingungen ermittelt.

Die Lösung der Gl. (4) mit Störkraft geht erneut von dem Bernoullischen Lösungsansatz aus. Mit Gl. (4) und (6) erhält man zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu X_{fn}(x) \left\{ \frac{d^2 T_{fn}}{dt^2} + 2\delta \frac{dT_{fn}}{dt} + \omega_n^2 T_{fn} \right\} = P(x, t) \quad (14)$$

Entwickelt man jetzt die längenbezogene harmonische Antriebskraft  $P(x, t)$  nach den Eigenschwingungsformen, so gilt

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) X_{fn}(x) \quad (15)$$

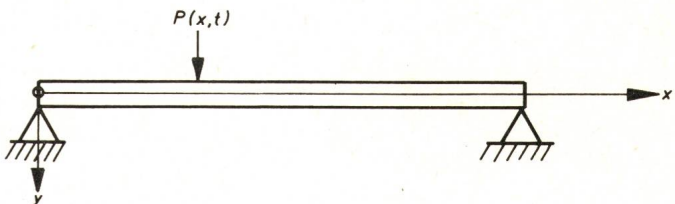


Fig. 5  
Stab mit Koordinaten und Erregerkraft  
 $P$  Kraft;  $t$  Zeit

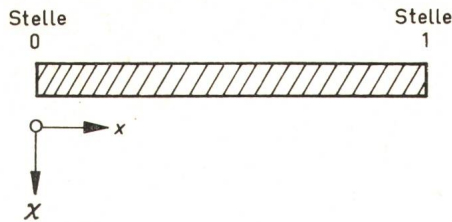


Fig. 6  
Feldbezeichnungen am Stababschnitt

mit

$$P_n(t) = \frac{\int_0^l P(x, t) X_f(x) dx}{\int_0^l X_f^2(x) dx} \quad (16)$$

Im Falle des beiderseits gestützten Stabes gemäss Fig. 5 lautet die Lösung der Gl. (14), wenn die freien Schwingungen vernachlässigt werden

$$Y_e = \frac{2 P_a}{\mu} \cos(\omega t - \varepsilon_e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos \lambda_n) \sin \frac{\lambda_n}{l} x}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \delta^2 \cdot \lambda_n}} \quad (17)$$

mit

$$\operatorname{tg} \varepsilon_e = \frac{2 \omega \delta}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (18)$$

Die Amplitude  $Y_e$  der erzwungenen gedämpften Schwingung wird im Resonanzfall  $\omega_n = \omega$  ein Maximum. Sie wird im Resonanzfall um so kleiner, je höher die Harmonische  $n$  liegt. Gefährlich für die Praxis ist deshalb nur die Grundschiwingung. Für die weiteren Betrachtungen ist diese Erkenntnis von Bedeutung.

#### 4.2 Eigenwert und Schwingungsform

Die Bestimmung von Eigenwert und Schwingungsform gestaltet sich für mehrfach gestützte, ungeschnittene Stäbe besonders übersichtlich und einfach unter Einschaltung der Matrizenrechnung [11].

Da in der Anlagenpraxis mehrfach gestützte Stäbe, d.h. Stäbe bzw. Rohre, die über wenigstens eine Stützstelle ungeschnitten durchlaufen, die Regel bilden, wird dieser Lösungsweg besprochen.

Die Aufstellung der Feldmatrix geht von Gl. (13) aus. Führt man anstelle der mechanisch bedeutungslosen Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  die sinnvollen Konstanten

$X = X(x)$	Verschiebung
$\psi = \psi(x) = -X'(x)$	Neigung
$M = M(x) = -EIX''(x)$	Moment
$Q = Q(x) = -EIX'''(x)$	Querkraft

ein, so erhält man nach Einsetzen der Werte in Gl. (13) die gesuchte Übertragungs- oder Feldmatrix für  $x = l$  (Fig. 6):

$$U_{(1)} = \begin{bmatrix} C & \frac{l}{\lambda} S & \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 c & \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^3 s \\ \frac{\lambda}{l} s & C & \frac{1}{EI} \frac{l}{\lambda} S & \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 c \\ EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 c & EI \frac{\lambda}{l} s & C & \frac{l}{\lambda} S \\ EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^3 S & EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 c & \frac{\lambda}{l} s & C \end{bmatrix} \quad (19)$$

Die vollständige Matrixgleichung lautet dann

$$\begin{bmatrix} X \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \quad (20)$$

mit  $A_{11}, A_{12}, \dots$ , entsprechend den Elementen aus Gl. (19), mit den Konstanten:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} (\cosh \lambda + \cos \lambda) & c &= \frac{1}{2} (\cosh \lambda - \cos \lambda) \\ S &= \frac{1}{2} (\sinh \lambda + \sin \lambda) & s &= \frac{1}{2} (\sinh \lambda - \sin \lambda) \end{aligned} \quad (21)$$

Symbolisch lässt sich Gl. (20) auch in folgender Form schreiben

$$Y = U \cdot Y_0 \quad (22)$$

Für die hier nur am Rande interessierenden Fälle des Stabes gestützt-gestützt und gestützt-ingespannt lauten die Eigenwertgleichungen bzw. die Eigenwerte, deren explizite Herleitung aus Platzgründen nicht durchgeführt wird:

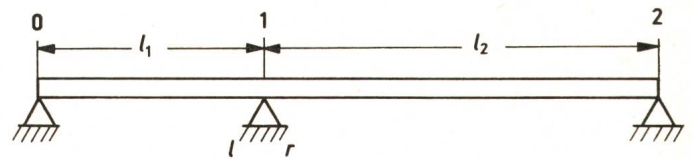


Fig. 7  
Stab, dreifach gestützt  
Bezeichnungen siehe im Text

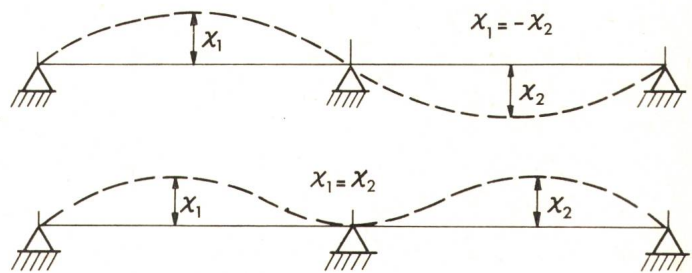
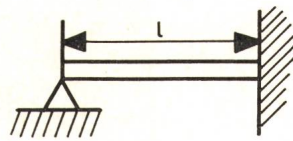
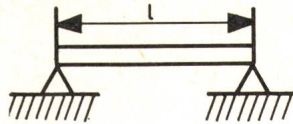


Fig. 8  
Asymmetrische und symmetrische Schwingungsform beim dreifach gestützten Stab  
Bezeichnungen siehe im Text



mit den Lösungen

$$\sin \lambda_n = 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \lambda_n & \pi & 2\pi & 3\pi & 4\pi \end{array} \quad (23)$$

mit den Lösungen

$$\operatorname{tg} \lambda_n = \operatorname{th} \lambda_n \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \lambda_n & 3,93 & 7,07 & 10,2 & 13,4 \end{array} \quad (24)$$

Im Falle des dreifach gestützten Stabes ist die Herleitung der Eigenwertgleichung etwas schwieriger und soll deshalb ausführlich dargestellt werden (Fig. 7).

Mit der Übertragungsmatrix  $\mathbf{A}$  für den linken Abschnitt der Figur lautet der Zustandsvektor hart links von der Stützstelle 1

$$\mathbf{Y}_1^1 = \mathbf{A} \mathbf{Y}_0 \quad (25)$$

mit

$$\mathbf{Y}_0 = \{0, \psi, 0, Q\}_0^2 \quad (26)$$

$$\mathbf{Y}_1^1 = \psi_0 \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{bmatrix} + Q_0 \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ A_{44} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Andererseits gilt für den Zustandsvektor hart links von 1 in Fig. 6:

$$\mathbf{Y}_1^1 = \{0, \psi, M, Q\}_1^1 \quad (28)$$

hieraus folgt

$$X_1^1 = \psi_0 A_{12} + Q_0 A_{14} = 0$$

oder

$$Q_0 = -\psi_0 \frac{A_{12}}{A_{14}} \quad (29)$$

Damit lautet der Zustandsvektor nach Gl. (27)

$$\mathbf{Y}_1^1 = \psi_0 \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22} - A_{24} \frac{A_{12}}{A_{14}} \\ A_{32} - A_{34} \frac{A_{12}}{A_{14}} \\ A_{42} - A_{44} \frac{A_{12}}{A_{14}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Für die Stelle hart rechts vom Stützpunkt 1 gilt:

$$\mathbf{Y}_1^r = \mathbf{Y}_1^1 + \Delta Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \psi_0 \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + \Delta Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

In Gl. (31) wurde berücksichtigt, dass an der Stützstelle 1 die Querkraft um den Betrag  $\Delta Q$  springt. Für das rechte Feldende 2 gilt mit der Übertragungsmatrix  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{B} \mathbf{Y}_1^r \quad (32)$$

$$\text{oder } \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & B_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \psi_0 \\ a_3 \psi_0 \\ a_4 \psi_0 + \Delta Q \end{bmatrix} \quad (33)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{Y}_2 = \{0, \psi, 0, Q\}_2 \quad (34)$$

erhält man die Null-Forderung

$$\begin{aligned} \psi_0 a_2 B_{12} + \psi_0 a_3 B_{13} + (\psi_0 a_4 + \Delta Q) B_{14} &= 0 \\ \psi_0 a_2 B_{32} + \psi_0 a_3 B_{33} + (\psi_0 a_4 + \Delta Q) B_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

und daraus die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} a_2 B_{12} + a_3 B_{13} + a_4 B_{14} \cdot B_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 B_{32} + a_3 B_{33} + a_4 B_{34} \cdot B_{34} \end{vmatrix} \quad (36)$$

Schliesslich lautet damit die Eigenwertgleichung

$$(a_2 B_{12} + a_3 B_{13} + a_4 B_{14}) B_{34} - (a_2 B_{32} + a_3 B_{33} + a_4 B_{34}) B_{14} = 0 \quad (37)$$

Führt man in Gl. (37) die Werte nach Gl. (19) und (21) ein und berücksichtigt, dass die Stabkennwerte in beiden Feldern gleich sind, so nimmt die Eigenwertgleichung folgende Form an

$$\begin{aligned} \sin h \lambda_2 \sin \lambda_2 (\sin h \lambda_1 \cos \lambda_1 - \cos h \lambda_1 \sin \lambda_1) - \\ - \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin h \lambda_1 \sin \lambda_1 (\cos h \lambda_2 \sin \lambda_2 - \\ - \sin h \lambda_2 \cos \lambda_2) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Im Falle  $l_1 = l_2$  vereinfacht sich Gl. (38) zu

$$\sin h \lambda \sin \lambda (\sin h \lambda \cos \lambda - \cos h \lambda \sin \lambda) = 0 \quad (39)$$

Gl. (39) wird erfüllt für:

$$\text{a) } \sin h \lambda \sin \lambda = 0 \quad (40)$$

$$\text{b) } \sin h \lambda \cos \lambda = \cos h \lambda \sin \lambda \quad (41)$$

<sup>2)</sup> Aus Platzgründen wird der Spaltenvektor als Zeilenvektor geschrieben und mit geschweiften Klammern versehen.

Es existieren zwei Eigenschwingungsformen: Eine, bezogen auf die Mittelstütze, asymmetrische Schwingungsform mit den Eigenwerten

$$\begin{array}{c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 \\ \hline \lambda_n & \pi & 2\pi & 3\pi \end{array} \quad (42)$$

und eine symmetrische Schwingungsform mit den Eigenwerten (Fig. 8):

$$\begin{array}{c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 \\ \hline \lambda_n & \frac{5}{4}\pi & \frac{9}{4}\pi & \frac{13}{4}\pi \end{array} \quad (43)$$

Die Gleichung für die Eigenfrequenz lautet:

$$f = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (44)$$

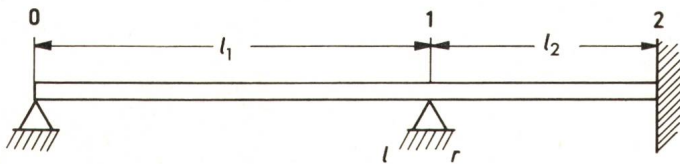


Fig. 9  
Stab zweifach gestützt und eingespannt  
Bezeichnungen siehe im Text

Im Falle des zweifach gestützten und eingespannten Stabes gemäss Fig. 9 lautet die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} & (\sin h \lambda_1 \cos \lambda_1 - \cos h \lambda_1 \sin \lambda_1) (\cos h \lambda_2 \sin \lambda_2 - \\ & - \sin h \lambda_2 \cos \lambda_2) - 2 \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin h \lambda_1 \sin \lambda_1 (1 - \\ & - \cos h \lambda_2 \cos \lambda_2) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Für  $l_1 = l_2$  wird aus Gl. (45):

$$\frac{\cos h \lambda \sin \lambda - \sin h \lambda \cos \lambda}{\cos h \lambda \cos \lambda - 1} = \frac{2 \sin h \lambda \sin \lambda}{\cos h \lambda \sin \lambda - \sin h \lambda \cos \lambda} \quad (46)$$

Die Eigenwerte lauten dann:

$$\begin{array}{c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 \\ \hline \lambda_n & 3,39 & 4,46 & 6,54 \end{array} \quad (47)$$

### 5. Zusammenfassung

In Freiluftschaltanlagen können Sammelschienenrohre vom Wind zu Biegeschwingungen angeregt werden. Der Mechanismus des Windantriebes wird erläutert.

Bei Übereinstimmung zwischen Rohreigenfrequenz und Windantriebsfrequenz kommt es zu gefährlich grossen Schwingamplituden, die bei fehlender Dämpfungsvorrichtung nur durch die Rohreigendämpfung begrenzt werden. Während des Schwingungsvorganges kann sich die Windgeschwindigkeit in einem relativ weiten Bereich verändern, ohne dass damit die Resonanzbedingung verlorengeht. Dieser aerodynamisch bedingte Effekt wird als Mitnahmeerscheinung bezeichnet und kann zu anhaltenden kräftigen Dauerschwingungen führen.

Die Lösung der Differentialgleichung des schwingenden Stabes wird sowohl für freie als auch erzwungene Schwingungen angegeben.

Eigenwert und Schwingungsform werden mit Hilfe der Matrizenrechnung für einige gängige Lagerbedingungen abgeleitet. Für das dreifach gestützte, ungeschnitten über die Mittelstütze laufende Rohr wird eine zur Mittelstütze asymmetrische und symmetrische Schwingungsform nachgewiesen. Im Falle der symmetrischen Schwingungsform wird das Rohr an der Mittelstütze so beansprucht, als sei es hier fest eingespannt.

Das Problem der Rohrschwingungsdämpfung bzw. -tilgung wird zur Zeit untersucht. Hierüber wird in absehbarer Zeit eine selbständige Arbeit vorgelegt.

### Literatur

- [1] W. Lehmann: Elektrodynamische Beanspruchung paralleler Leiter. ETZ-A 76(1955)14, S. 481...488.
- [2] D. Mavromaras und P. Sieber: Zur Berechnung der Beanspruchung von Sammelschienen und Stützisolatoren im Kurzschlussfall. Elektrizitätswirtsch. 65(1966)8, S. 251...259.
- [3] V. Strouhal: Über eine besondere Art der Tonerregung. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 5(1878)9, S. 216...251.
- [4] T. v. Kármán und H. Rubach: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikalische Zeitschrift 13(1912)2, S. 49...59.
- [5] Y. N. Chen: Durch Strömungsnachläufe erregte Schwingungen an Kreiszyllindern bei überkritischen Reynoldszahlen. Techn. Rundsch. Sulzer, Forschungsheft -(1966)-, S. 70...77.
- [6] A. Meier-Windhorst: Flatterschwingungen von Zylindern im gleichmässigen Flüssigkeitsstrom. Mitteilungen des Hydraulischen Institutes der Technischen Hochschule München 9(1939)-, S. 3...29.
- [7] H. Maass: Beobachtungen über das Auftreten und Versuche zur Bekämpfung der mechanischen Freileitungsschwingungen. E und M 52 (1934)2, S. 13...18.
- [8] H. Försting: Zur theoretischen Behandlung aeroelastisch erregter Schwingungen kreiszylindrischer Konstruktionen bei periodischer Wirbelanregung. Zeitschrift für Flugwissenschaft 18(1970)9/10, S. 347...359.
- [9] Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom Akademischen Verein e. V. Berlin. Theoretische Grundlagen. 28. Auflage. Berlin, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, 1955.
- [10] K. Klotter: Technische Schwingungslehre. Bd. II: Schwinger von mehreren Freiheitsgraden. 2. Auflage. Berlin, Julius Springer Verlag, 1960.

### Adresse des Autors:

L. Möcks, Richard Bergner Elektroarmaturen, Postfach, D-8540 Schwabach.

**Berichtigung.** In der Tabelle II des Artikels «Das Système International d'Unités» vom Eidg. Amt für Mass und Gewicht (Bull. SEV 63 (1972) 23, S. 1378), ist ein sinnstörender Fehler enthalten. Die Grösse «Leitwert» (S) sollte richtigerweise heissen:

$$m^{-2} kg^{-1} s^3 A^2$$