ZUR PRAXIS DER VOLKSSCHULE

BEILAGE ZU No. 20 DER „SCHWEIZERISCHEN LEHRERZEITUNG"

1915 MAI No. 5

AUCH ETWAS ZUM AUFSATZ.

Nein, eigentlich nicht zum Aufsatz als solchen. Oder doch? Wir werden sehen.

In der Februarnummer der „Praxis der Volksschule" hat Herr J. St. in A. an einem Beispiel gezeigt, wie er die Stücke seines Lesebuches als Grundlage für Sprachübungen, besonders für Aufsätze verwendet, denn diese ältere Art von Aufsätzen sei besser als die moderne. Gewiss, das Alte ist oft das Rechte und das Neue nicht immer das Beste, — aber auch das Alte ist nicht immer das Beste und das Neue oft das Rechte oder wenigstens das Bessere. Das ausgeführte Beispiel scheint mir mehr für den zweiten Fall zu sprechen. Ich will aber nicht auf die Methodik des Aufsatzes eintreten, sondern das besondere Beispiel des Herrn J. St. auf die darin gelehrte Gesinnung hin betrachten.

Als Zitrone, die dann zu vier Aufsätzchen ausgequetscht wird, dient also Gerstäckers braves Gedicht „Die Bachstelze und der Reiher", das hohe Liedchen von der Zufriedenheit. Und diese Zufriedenheit (wenn man es noch so nennen will) wird nun ausgequetscht zur vollkommenen Trottelhaftigkeit. Die Inhaltsangabe stellt zunächst in ungebundener Rede fest, dass die Bachstelze ohne jeden weitern Anlass ihren Teich rühmte, dass dann ein Reiher ihr den Schnabel wässerig machen wollte mit seinen Schilderungen vom sonnigen Süden mit Meeresbrausen und Palmenhainen, aber die Bachstelze lehnt die Versuchung überlegen ab und weiss auch gleich die Moral von der Geschichte — geschehen ist zwar nichts, bloss geschwatzt worden ist — in einem schönen Spruche, den sie wohl von einem intelligenten Menschen gelernt hat, denn es heisst da, Zufriedenheit mache zum Palaste die Hütte von Stroh. (Wenn auch im allgemeinen der Mensch von der Bachstelze lernen soll, darf doch gelegentlich auch die Bachstelze vom Menschen lernen.)

In der Darstellung des Gedankens konnte natürlich die Inhaltsangabe nicht besser sein als das Gedicht, das eben den Gedanken nicht darstellt, sondern bloss irgendwie auszusprechen sucht. Die Bachstelze spricht nicht aus dem Schatze ihrer Erfahrungen, sondern bloss, weil der Dichter die Lehre verkündigen wollte. In dieser Beziehung ist dann Übung Nr. 2, die „Nachbildung", eigentlich besser geraten als das Urbild. Denn wenn auch jener Otto wie die Bachstelze aus genialer Intuition das Zuhausebleiben der Auswanderung vorzieht und dafür ebenfalls einen schönen Spruch weiss, so macht denn doch wenigstens der wanderlustige Hans die Erfahrung, dass auch in Amerika nicht alles Gold usw., und spricht seinen natürlich ebenfalls schönen Vers aus dieser Erfahrung heraus. Aber in welchem unwahren, süsslichen, abgedroschenen Backfisch-Stil redet da ein Bauernbursche zum andern! Sogar „der muntere Sang der Vögel ertönt vom nahen Walde, und von den Weiden erschallt der melodische Klang der Herdenglocken" — buchstäblich! als ob der Zweck der Übung das Sammeln von Phrasen wäre! Wahrscheinlich ist das „poetisch!"

Diese Nachbildung gebiert fortzeugend ein neues Ungeheuerchen: einen Brief. Was wäre auch natürlicher, als dass der früher so unternehmungslustige Hans nach einem Jahre sein Gut in Amerika wieder verkauft und drei Tage später seinem Jugendfreunde Otto in einem schönen Briefe von Rotacker (Amerika) aus schreibt, warum er in etwa vierzehn Tagen wieder heimkomme. Nämlich: „schon die Meerfahrt wäre stürmisch. Ich wurde von der Seekrankheit heftig befallen." Da täte er freilich besser, er bliebe drüben, denn wer weiss, ob er auf der Heimfahrt nicht wieder von der Seekrankheit heftig befallen wird!

Übung Nr. 4: Darstellung von Selbst-Erlebtem, nämlich: Das verschmähte Mittagessen. Dieses verschmähte Mittagessen mutet merkwürdig selbsterlebt an; hat nicht schon eine gewisse Lesebuch-Amalie jene Mehlsuppe verschmäht? Der neue Selbst-Biograph nimmt dann aber einen kräftigen Rank: er kriegt Durst bei der Arbeit (weil er mittags die Mehlsuppe nicht gegessen!) und trinkt — Wasser! und erinnert sich dabei der Fabel vom Fischweiher: Wer mit Geringem nicht zufrieden ist, muss oft mit dem Geringsten vorliebnehmen. Hm? Es kann doch nur die Fabel von Fischreiher und Bachstelze gemeint sein? Wo steht da so was? Jene Bachstelze war ja von Anfang an zufrieden, und von des Fischreihers Schicksalen wird ja weiter nichts gesagt. Der gute Junge hat also ganz unbegründeterweise des Fischreihers gedacht; so viel Moral steckte gar nicht in der Fabel, und wenn auch, so wäre es wieder eine andere Moral gewesen als in der Geschichte von Hans und Otto.

Man merkt ja bei all dieser Verschwommenheit der Moralbegriffe schon, wo es hinaus will: Bleibe im Lande und nähre dich redlich. Und dass man jungen Leuten das Leben auch einmal in diesem Lichte zeigt, dass man sie warnt vor unbesonnener Auswanderung, dass man sie insbesondere darauf hinweist, dass das Glück besteht in der Zufriedenheit und nicht im Besitz von Geld und Gut, dass man mit wenig sehr glücklich und mit viel recht unglücklich sein kann, das ist ja alles ganz recht, der Zweck ist sehr gut, aber die Mittel sind — nicht etwa unheilig, sondern: — vollkommen untauglich. Zwischen der stolzen Zufriedenheit des einen und der kläglichen Trottelhaftigkeit des andern ist denn doch ein Unterschied. Und was ein gesunder junger Mann ist, das will einmal hinaus in die Welt; es braucht ja nicht gerade Amerika zu sein, aber einmal hinweg vom melodischen Getön der grossväterlichen Herdenglocken, und vielleicht später wieder heim, und wäre es auch nach einem Schiffbruch. Die meisten von denen, die ins Ausland gehen, sind tüchtige Leute; die Schwächlinge bleiben zu Hause. Natürlich sind nicht alle Schwächlinge, die zu Hause bleiben, aber jener Otto in der „Nachbildung" war doch ein erbärmlicher Waschlappen. Unserm Gottfried Keller ist's ja ähnlich ergangen wie jenem armen, seekranken Hans, aber er hat nicht nach einem Jahr die Flinte ins Korn geworfen, sondern sich durchgeschlagen und durchgehungert und später einmal gesagt: Wer unter Heimatliebe nur Zuhausehockerei versteht, wird der Heimat nie froh werden, und sie wird ihm leicht zu einem Sauerkrautfass.

Gegen eine solche Verweichlichung des Volksgemüts durch die Schule möchte man eigentlich „energisch protestieren" — aber man findet die Energie dazu nicht. Warum nicht? Unser Gefühl sagt uns: Reg dich nicht unnötig auf! Nur keine Angst! Und wenn diese Schüler noch sieben weitere Aufsätzchen machen müssten über das Bachstelzengedicht, das würde keinen einzigen gesunden Burschen und auch kein gesundes Mädchen (und wohl auch den Lehrer nicht) abhalten, trotz Bachstelze und Otto und Hans und Amalie hinauszuziehen in die Welt; denn diese ganze Aufsatzfabrikation ist dem Geiste und dem Stiele etwas so unnatürliches, so unjugendliches, so lebensfremdes und weltscheues, ist etwas so papierenes, dass es an einer gesunden Jugend abläuft wie Wasser. Vollkommen unschädlich, oder „nur" insofern schädlich, als es fast vollkommen unnütz ist (für Schön- und Rechtschreibung genügt's). Damit wären wir freilich doch noch auf die Methodik des Aufsatzes gekommen. *A. St.*

□ □ □

DAS AUSZIEHEN HÖHERER WURZELN ALS KOPFRECHNEN.

VON F. MEISTER, HORGEN.

Die Pferde Muhamed und Zarif des Herrn Krall in Elberfeld zogen, wenn sie „aufgelegt“ waren, innert 20—30 Sekunden die vierte oder fünfte Wurzel einer vollständigen Potenzzahl, d. h. einer Zahl, die beim Ausziehen der Wurzel keinen Rest übrig lässt. So beantwortete Muhamed am 30. und 31. August 1912 unter Kontrolle des Herrn Claparède, Prof. der Psychologie in Genf, vierte Wurzel aus 456976 sofort richtig mit 26, aus 3748096 nach kurzem Besinnen richtig mit 44, aus 614656 sofort richtig mit 28. Diese Leistungen verblüffen allgemein und bleiben der Hauptgrund, warum so viele die Echtheit der geistigen Produktionen jener Pferde bezweifeln. Personen mit Hochschulbildung äusseren sich etwa dahin, sie bedürften zur Berechnung einer vierten oder fünften Wurzel notwendigerweise einer Logarithmentabelle. Als vor Jahresfrist Prof. Claparède vor der Akademie der Wissenschaften in Paris einen Vortrag über die denkenden Pferde in Elberfeld hielt, erregte es Aufsehen, wie ein Mathematiker der Akademie sich anheischig machte und sofort den Beweis erbrachte, dass er eine zweistellige vierte oder fünfte Wurzel unmittelbar zu berechnen imstande war, insofern die angegebene Potenzzahl eine vollständige war.

Ich werde in den folgenden Ausführungen zeigen, dass es jedem, der imstande ist, schriftlich eine Kubikwurzel zu berechnen, also beispielsweise jedem Drittklässler der Sekundarschule, möglich ist, mit Leichtigkeit im Kopfe auszurechnen:

a) die zweistellige Kubikwurzel einer Zahl, z. B. $\sqrt[3]{493039}$;

b) die zweistellige m^{te} Wurzel einer Zahl $\sqrt[m]{n}$, wenn m ungerade und nicht durch 5 teilbar ist, z. B. $\sqrt[19]{21670662219970396194714277471}$; *c)* die drei- oder vierstellige Kubikwurzel einer Zahl, z. B. $\sqrt[3]{371694959}$. Etwas mühsamer, aber immer noch im Kopfe lösbar, gestaltet sich *d)* das Ausziehen einer m^{ten} Wurzel, wenn m beliebig gross, ungerade und durch 5 teilbar ist, z. B. $\sqrt[25]{70564100148668166660307396 93}$; *e)* Das Ausziehen der zweistelligen vierten Wurzel einer Zahl, z. B. $\sqrt[4]{88529281}$; *f)* das Ausziehen einer dreistelligen, m^{ten} Wurzel einer Zahl, wenn m ungerade und nicht durch 5 teilbar ist, z. B. $\sqrt[9]{1551725547364667039693 70573}$. In allen Fällen wird hiebei vorausgesetzt, dass die Zahl, aus der die Wurzel zu ziehen ist, eine vollständige Potenzzahl sei.

Vergleichen wir einmal die Potenzen der einstelligen Zahlen mit diesen selbst.

Potenztafel.

n^1	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531444	4782969
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171

Aus der Betrachtung vorstehender Potenztafel ergeben sich ohne weiteres folgende Sätze:

I. Die Einer von n^3 stimmen mit den Einern von n überein, wenn diese letztern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 sind; die Einer von n^3 ergänzen sich mit den Einern von n zur Zahl 10, wenn die einen oder andern gleich 2, 3, 7 oder 8 sind.

II. Die Einer von n^5 stimmen überein mit den Einern von n^1.

a) Das Ausziehen einer zweistelligen Kubikwurzel vollzieht sich nun mit spielender Leichtigkeit, z. B. $\sqrt[3]{39'304}$. Die Einer von n sind gleich den Einern von n^3, also 4 (nach Satz I). Die Zehner der Wurzel sind 3, denn 39 liegt zwischen $3^3 = 27$ und $4^3 = 64$. (Lösung: *34.*)

$\sqrt[3]{804'357}$. Die Einer der Wurzel sind 3 (I), die Zehner sind 9, denn 804 ist grösser als $9^3 = 729$. (Lösung: *93.*)

Die gedächtnismässige Einprägung der fünften Potenzen der Zahlen 1 bis 9 würde nun in gleicher Weise das sofortige Ausziehen einer zweistelligen, fünften Wurzel gestatten. Diese mnemotechnische Leistung liegt aber nicht jedermann bequem, weshalb wir von deren Verwertung hier absehen.

b) Jede ungerade Zahl lässt sich in der Form $4k \pm 1$ darstellen.

III. Die Einer einer höhern, ungeraden Potenz einer Zahl n stimmen mit den Einern von n oder n^3 überein, je nachdem der Exponent von der Form $4k + 1$ oder $4k - 1$ ist.

Wir können also mit Hülfe dieses wichtigen Satzes aus den Einern einer vollständigen Potenzzahl stets auf die Einer der Wurzel schliessen, wenn die Potenz ungerade ist. Die Ableitung des vorstehenden Satzes III erfolgt leicht aus bekannten Sätzen der Zahlenkongruenz.

$$\begin{array}{ll} \text{Es ist} & n^{mk+r} \equiv n^r \bmod p.; \\ \text{also} & n^{4k+1} \equiv n \bmod 10; \\ \text{ferner ist} & n^{4k-1} \equiv n^{4-1} \equiv n^3 \bmod 10. \end{array}$$

Eine andere, elementare Ableitung gründet sich nicht auf Zahlentheorie. Wenn die Einer von n^{4k+1} mit den Einern von n übereinstimmen, so muss $n^{4k+1} - n$ eine durch 10 teilbare Zahl sein. Wir beweisen dieses letztere.

Nun ist $n^{4k+1} - n = (n^{4k} - 1)\, n$ (1).

Der Faktor $(n^{4k} - 1)$ lässt sich zerlegen, er ist teilbar durch $n^4 - 1$.

$$\frac{n^{4k} - 1}{n^4 - 1} = n^{4(k-1)} + n^{4(k-2)} + n^{4(k-3)} + \ldots .1 \quad (2)$$

$$\left(\text{z. B. } \frac{n^{12} - 1}{n^4 - 1} = n^8 + n^4 + 1\right).$$

Es ist also $n^{4k-1} = (n^4 - 1)\, M$, wo M eine ganze Zahl ist (3), folglich $n^{4k+1} - n = n\,(n^4 - 1)\, M = (n^5 - n)\, M = 10\, N M$, denn aus der Potenztafel ist ersichtlich, dass $n^5 - n$ eine durch 10 teilbare Zahl $= 10\,N$ ist, wo N eine ganze Zahl ist. Also ist $n^{4k+1} - n$ durch 10 teilbar, was zu beweisen war. Ferner ist $n^{4k-1} - n^3 = (n^{4k-4} - 1)\, n^3$ (4). Setzen wir in (3) den Wert $k - 1$ statt k, erhalten wir $n^{4k-4} - 1 = (n^4 - 1)\, M'$, wo M' eine ganze Zahl ist. Dies in (4) eingesetzt gibt

$$n^{4k-1} - n^3 = (n^4 - 1)\, n^3 M' = (n^5 - n)\, n^2 M' = 10\, N\, M' n^2,$$

also ist $n^{4k-1} - n^3$ eine durch 10 teilbare Zahl, was zu beweisen war.

Zur Bestimmung der Zehner der Wurzel benutzen wir die Regeln der Teilbarkeit durch 9 und 11. Obwohl wir diese als bekannt voraussetzen dürfen, wiederholen wir dieselben hier der Vollständigkeit wegen. Jede Zahl lässt, durch 9 geteilt, den nämlichen Rest wie ihre durch 9 geteilte Quersumme. Durch 11 geteilt, lässt eine Zahl den nämlichen Rest wie die durch 11 geteilte Differenz der Quersummen der ungeraden und geraden Stellen. Stellen wir die Potenzreste für den Teiler 11 in einer Tabelle zusammen:

Potenzreste zum Teiler 11.

n^1	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
n^{10k+1}	n^{10k+2}	n^{10k+3}	n^{10k+4}	n^{10k+5}	n^{10k-4}	n^{10k-3}	n^{10k-2}	n^{10k-1}	n^{10k}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Aus der Tafel ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

IV. Für den Teiler 11 sind sämtliche Potenzreste bei Potenzen mit einem Exponenten, der ungerade und nicht durch

5 teilbar ist, von einander verschieden und lassen somit eindeutig auf den Rest der Wurzel (n^1) schliessen.

V. Die zehnte Potenz einer beliebigen Zahl ergibt für den Teiler 11 den Potenzrest 1.

VI. Jede ungerade Potenz der Zahl 10 ergibt für den Teiler 11 den Potenzrest 10.

VII. Der zum Teiler 11 gehörige Potenzrest der Zahl n^{10k+a} ist gleich dem Potenzrest n^a.

Letzteres ergibt sich unmittelbar aus V.

Die Berechnung jeder höheren, zweistelligen Wurzel aus einer vollständigen Potenz mit ungeradem Exponenten, der nicht durch 5 teilbar ist, kann nun ohne jegliche Schwierigkeit erfolgen.

Beispiele: $\sqrt[13]{9904578032905937}$. Der Exponent ist von der Form $4k+1$, also die Einer der Wurzel $= 7$ (nach Satz III). Der Potenzrest für den Teiler 11 ist $(7+9+0+2+0+7+4+9)-(3+5+9+3+8+5+0+9) = 38-42 = 38+11-42 = 7$. Diesen Potenzrest 7 suchen wir in der Kolonne $n^{10k+3} = n^3$ und sehen, dass ihm der Wurzelrest $n^1 = 6$ entspricht. Die Differenz zwischen Einer und Zehner der Wurzel ist also 6, d. h. wenn wir die Zehner mit x bezeichnen, so ist $7-x=6$, woraus $x=1$. (Lösung *17.*)

$\sqrt[27]{1192533292512492016559195008117}$. Einer $= 3$ (III). Potenzrest für den Teiler $11 = 68-50 = 7$. Wurzelrest für den Teiler $11 = 2$. Die Einer sind also um 2 grösser als die Zehner, letztere also $= 1$. (Lösung *13.*)

Die Lösung solcher Aufgaben erfordert scheinbar die gedächtnismässige Einprägung der drei Reihen der Potenzreste für n^3, n^7 und n^9, die zum Teiler 11 gehören. Letztere Reihe für n^9 braucht man jedoch nicht auswendig zu kennen. Es ist $n^9 \times n^1 = n^{10}$, der Potenzrest für n^{10} ist aber immer $= 1$! Habe ich für n^9 z. B. den Potenzrest 2, so frage ich mich, um den Rest für n^1 zu erhalten: Mit welcher Zahl muss ich 2 multiplizieren, um eine Zahl zu erhalten, die, durch 11 geteilt, den Rest 1 lässt? Solche Zahlen sind 12, 45 und 56. Im gegebenen Falle ist also der Rest für $n^1 = 6$, denn $6 \times 2 = 12$. Wir haben also nur die beiden Reihen der Potenzreste für n^3 und n^7 im Gedächtnis festzuhalten.

c) Es sei zu berechnen: $\sqrt[3]{18'399'744}$. Die Einer der Wurzel sind 4 (I). Die Hunderter der Wurzel $= \sqrt[3]{18} = 2$. Die Wurzel heisse also vorläufig 2 x 4. Der zum Teiler 11 gehörige Potenzrest ist $28-17 = 11 = 0$. Zum Potenzrest 0 gehört auch der Wurzelrest 0, d. h. wenn die Potenz durch 11 teilbar ist, so muss es offenbar auch die Wurzel sein. Also $x = 2+4 = 6$. (Lösung *264.*)

$\sqrt[3]{49'836'032}$. Die Einer der Wurzel sind 8 (I). Die Hunderter $= \sqrt[3]{49} = 3$; die Wurzel heisse 3 x 8. Potenzrest zum Teiler $11 = 14-21 = 4$. Der zum Potenzrest 4 gehörige Wurzelrest $= 5$. $3+8-x=5$; $x=6$. (Lösung *368.*)

$\sqrt[3]{331'373'888}$. Einer $= 2$ (I). Hunderter $= \sqrt[3]{331} = 6$; Wurzel $= 6$ x 2. Potenzrest nach Teiler $11 = 10$. Wurzelrest $= 10$. $6+2+11-x=10$; $x=9$. (Lösung *692.*) Zur Ausrechnung zwei- oder dreistelliger Kubikwurzeln im Kopfe ist also nur die gedächtnismässige Aneignung der Reihe der Potenzreste 1, 8, 5, 9, 4, 7, 2, 6, 3, 10 notwendig.

Die Zehner der Kubikwurzel einer vollständigen Potenzzahl lassen sich auch auf eine andere Art bestimmen. Es sei die Kubikwurzel aus 49430863 zu ziehen. Die Hunderter sind 3, die Einer 7, die Zehner seien x.

Bezeichnen wir die Hunderter einer dreistelligen Zahl mit a, die Zehner mit x, die Einer mit c und entwickeln

$$(a+x+c)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 + 6axc + 3x^2c + 3xc^2 + c^3 + 3ac^2 + 3a^2c.$$

Nur die beiden Glieder c^3 und $3xc^2$ liefern Zehner, denn alle Glieder, die a oder x^2 enthalten, liefern Hunderter. In obigem Beispiel ist $c^3 = 7^3 = 343$, liefert also 4 Zehner. Der Radikand 49430863 hat aber 6 Zehner, also muss $3xc^2$ zwei Zehner liefern. Nun ist $3c^2 = 3 \cdot 49 = 147$, es fragt sich also, mit welcher Zahl ist 147 (oder 7) zu multiplizieren, um als äusserste Stelle rechts die Zahl 2 zu liefern. Antwort: $6 \cdot 7 = 42$. x ist also 6 und zwar ist es eindeutig bestimmt. Die gesuchte Wurzel ist also *367.*

$\sqrt[3]{15069223}$; die Einer bestimmen sich sofort $= 7$, die Hunderter $= 2$; bezeichnen wir die Zehner mit x, so muss $3 \cdot x \cdot 7^2 + 7^3 = 2$ Zehner liefern; da 7^3 vier Zehner liefert, so muss $3 \cdot x \cdot 7^2 = 2-4$ oder $12-4 = 8$ Zehner liefern, woraus sich eindeutig $x = 4$ ergibt; die gesuchte Wurzel ist also *247.*

$\sqrt[3]{84027672}$ liefert als Hunderter 4, als Einer 8; die Zehner seien x. $8^3 = 1$ Zehner; $7-1 = 6$ Zehner werden also geliefert durch $3 \cdot x \cdot 8^2 = 192\,x$. $3 \cdot 2$ liefert 6 Zehner, aber auch $8 \cdot 2$. Um zu entscheiden, ob die Zehner der Wurzel gleich 3 oder 8 seien, müsste man die Neuner- oder Elferprobe anwenden. Letztere liefert die Zehner unmittelbar. Das hier entwickelte Verfahren, die Zehner zu bestimmen, liefert nur dann eindeutige Resultate, wenn die Einer ungerade sind.

$\sqrt[3]{30'870'492'353}$. Die Einer sind 7, die Tausender $= 3$; die Zehner seien x, die Hunderter y. $353 - 7^3 = 010$. Es muss also $3 \cdot 7^2 \cdot x$ einen Zehner liefern, weshalb $x = 3$. Der Elferrest des Radikanden ist $26 - 18 = 8$, somit der Wurzelrest $= 2$, das heisst $y + 7 - (3+3) = 2$, woraus sich $y = 1$ bestimmt, die ganze Wurzel ist also *3137.*

d) Wenn der Potenzexponent ungerade, aber ein vielfaches von 5 ist, lassen sich die Einer der Wurzel wie in den vorhergehenden Abschnitten nach Lehrsatz III sofort erkennen. Zur Bestimmung der Zehner sind jedoch die zum Teiler 11 gehörigen Potenzreste unbrauchbar, weil der nämliche Potenzrest 5 verschiedenen Wurzelresten entspricht. Wir wählen deshalb den Teiler 9 und erstellen die Tafel der Potenzreste.

Potenzreste zum Teiler 9.

n^1	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7
	n^{6k+2}	n^{6k+3}	n^{6k-2}	n^{6k-1}	n^{6k}	n^{6k+1}
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	7	5	1	2
3	0	0	0	0	0	0
4	7	1	4	7	1	4
5	7	8	4	2	1	5
6	0	0	0	0	0	0
7	4	1	7	4	1	7
8	1	8	1	8	1	8
0	0	0	0	0	0	0

Aus vorstehender Tafel ergibt sich Lehrsatz VIII:

Der natürlichen Zahlenreihe 1—9 als Wurzelreste entsprechen für den Teiler 9

beim Exponenten	$6k$	die Potenzreste	1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0
„ „	$6k+3$	„ „	1, 8, 0, 1, 8, 0, 1, 8, 0
„ „	$6k+1$	„ „	1, 2, 0, 4, 5, 0, 7, 8, 0
„ „	$6k-1$	„ „	1, 5, 0, 7, 2, 0, 4, 8, 0
„ „	$6k+2$	„ „	1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1, 0
„ „	$6k-2$	„ „	1, 7, 0, 4, 4, 0, 7, 1, 0

Die Reihe für	$6k$	braucht man nicht zu merken, da sie keine Verwendung findet.
„ „ „	$6k+3$	ist leicht zu merken.
„ „ „	$6k+1$	weist die Zahlen 1—9 in natürlicher Reihenfolge auf; für die Wurzelreste 3, 6 und 0 treten aber die Potenzreste 0 auf.
In der Reihe	$6k-1$	treten zunächst die ungeraden, hernach die geraden Zahlen in natürlicher Reihenfolge auf.

Bei den Reihen $6k \pm 2$ beachte man die Symmetrie von der Mitte aus. Das $+$ Zeichen in der Exponentenformel ergibt immer die einfachere Restreihe also

bei $6k+2$ die Reihe 1, 4, 0, 7; bei $6k-2$ die Reihe 1, 7, 0, 4.

Beispiele: $\sqrt[5]{1158'56201}$. Einer der Wurzel $= 1$ (I). Die Wurzel heisse vorläufig x 1. Potenzrest zum Teiler $9 = 2$. Zu diesem Potenzrest gehört nach der Reihe $6k-1$ der Wurzelrest 5. Also ist $x+1 = 5$; $x = 4$. (Lösung *41.*)

$\sqrt[5]{6016'92057}$. Einer der Wurzel $= 7$ (II). Die Wurzel heisse vorläufig x 7. Potenzrest nach Teiler $9 = 0$. Der

Wurzelrest kann also 3, 6 oder 0 sein. Also $x + 7 = 12$, 15 oder 9, woraus $x = 5$, 8 oder 2.

Aus der Betrachtung der Potenztafel für n^5 auf Seite 18 ergibt sich nun, dass für die Wurzeln 1—3 die Zifferklasse der Potenz 1—3 stellig ist, für die Wurzeln 4—6 in der Regel 4 stellig, für die Wurzeln 7—9 immer 5 stellig ist. Da nun in unserm Beispiel die Zifferklasse 6016 vierstellig ist, kann von den Werten 5, 8 oder 2 für x nur der erste in Betracht kommen. (Lösung *57.*)

Merkt man sich die fünften Potenzen der einstelligen Zahlen, können die Zehner der Wurzel gleich bestimmt werden, und mit Hülfe der Reihe der Potenzreste für n^{6k-1} können auch dreistellige fünfte Wurzeln ermittelt werden.

$\sqrt[15]{221073919'720733357899776}$. Einer = 6 (III u. I). Die Zehner sind jedenfalls kleiner als 5, da die Ziffernklasse für die Zehner nur 9 Stellen hat. Potenzrest nach Teiler $9 = 0$. Wurzelrest = 3, 6 oder 0. Die Zehner sind also 3, 6 oder 9, da die Zehner aber kleiner als 5 sind, kann nur 3 in Betracht fallen. (Lösung *36.*)

$\sqrt[25]{1923279248993'1358333837813998767870751}$. Einer der Wurzel = 1 (III u. II). Potenzrest für den Teiler $9 = 4$. Wurzelrest für den Teiler $9 = 4$. Zehner $= 4 - 1 = 3$. (Lösung *31.*)

e) Die Bestimmung des Zehners einer zweistelligen, vierten Wurzel ergibt sich ohne weiteres, wenn man die vierten Potenzen der einstelligen Zahlen dem Gedächtnis einprägt. Es ist dies jedoch nicht notwendig. Die Kenntnis der Kuben setzen wir voraus und aus diesen lassen sich die vierten Potenzen durch eine einfache Multiplikation rasch im Kopfe bilden. Die Einer sind gerade oder ungerade, je nachdem die Randziffer rechts der vierten Potenz gerade oder ungerade ist; Randziffer 5 gibt 5 als Einer. Zur genauen Bestimmung der Einer kann man sich des Teilers 11 und der Reihe der Potenzreste 1, 5, 4, 3, 9 || 9, 3, 4, 5, 1 oder des Teilers 9 und der Potenzreste 1, 7, 0, 4 || 4, 0, 7, 1 bedienen. Ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt *d* ist zu merken:

Die vierte Potenz von 1—2 ist zweistellig,
die vierte Potenz von 6—9 ist vierstellig.

Beispiele: $\sqrt[4]{2839'8421}$. Die Zifferklasse für die Zehner ist vierstellig, es kommen also die Zahlen 6—9 in Erwägung. $7^4 = 7 . 343$, $8^4 = 8 . 512$, also sind die Zehner = 7. Die Einer sind ungerade, es kommen die Zahlen 1 oder 3 in Betracht, da 2839 weit näher an 7^4 liegt als an 8^4. Potenzrest nach Teiler $11 = 3$. Wurzelrest nach Teiler $11 = 4$ oder 7. $x - 7 = 4$ oder 7; $x = 0$ oder 3; erster Wert unmöglich, also Lösung *73.*

$\sqrt[4]{3895'0081}$. Die Zehner sind 7, denn $8^4 = 8. 512$; die Einer sind ungerade, es kommen 7 oder 9 in Betracht, da 3895 nahe an 8^4 liegt. Potenzrest nach Teiler $11 = 5$. Wurzelrest nach Teiler $11 = 2$ oder 9. $x - 7 = 2$ oder 9; $x = 9$ oder 5, letzteres ist ausgeschlossen, also Lösung *79.*

$\sqrt[4]{983'4496}$. Die Zehner sind 5. Die Einer sind gerade und zwar kommen, da 983 etwa in der Mitte von 625 und 1296 liegt, nur die Werte 4 und 6 in Betracht. Potenzrest nach Teiler $9 = 7$. Wurzelrest nach Teiler $9 = 2$ oder 7. $5 + x = 2 (+ 9)$ oder 7; $x = 6$ oder 2, letzteres unmöglich: Lösung *56.*

f) Zur Berechnung dreistelliger, höherer Wurzeln bedürfen wir der Kombination von Elfer- und Neunerprobe.

$\sqrt[13]{9323'26015330950 69'1117312417792}$. Die Einer sind = 2 (nach III u. II). Es heisse die Wurzel x y 2. x ist eine der Zahlen 1 oder 2, da die Ziffernklasse für die Hunderter nur vier Stellen hat. Potenzrest zum Teiler $9 = 4$. Wurzelrest zum Teiler $9 = 4$ (nach der Reihe 1, 2, 0, 4, 5, 0, 7, 8). $x + y + 2 = 4$ oder 13; $x + y = 2$ oder 11. Potenzrest zum Teiler $11 = 9$. Wurzelrest zum Teiler $11 = 4$. $x + 2 - y = 4$ (oder $4 + 11$); $x - y = 2$ oder 13, letzter Wert unmöglich. Nun ist $x + y = 2$; $x - y = 2$; aus Summe und Differenz zweier Zahlen lassen sich die beiden Zahlen leicht bestimmen, es ist $x = 2$; $y = 0$. Lösung *202.*

$\sqrt[9]{155172554'736466703'969370573}$. Einer = 3 (nach III und II). Die Wurzel heisse vorläufig x y 3, wo x grösser als 5, da die Ziffernklasse für die Hunderter 9 Stellen besitzt. Potenzrest zum Teiler $9 = 0$. Wurzelrest zum Teiler $9 = 3$, 6 oder 0. $x + y = 6$, 9, 12 oder 15. Potenzrest zum Teiler $11 = 10$. Wurzelrest zum Teiler $11 = 10$. $x + 3 - y = 10$; $x - y = 7$. Eine ganzzahlige, einstellige Lösung für x und y ist nur möglich, wenn $x + y = 9$, dann ist $x = 8$, $y = 1$. Lösung *813.* (Schluss folgt.)

Die römischen Zahlen im ersten Schuljahr. Stöcklin sucht in seiner Rechenfibel die arabischen Zahlzeichen mit den Werten, die sie darstellen, in Übereinstimmung zu bringen. So lässt er die Eins aus einem Striche entstehen, die Vier aus vier Strichen usw. In Wirklichkeit besteht jene arabische Ziffer aus zwei und diese aus drei Strichen und beide widersprechen also direkt ihrem Zahlbegriff. Die arabischen Ziffern sind eben bloss willkürliche Zeichen und geeignet, beim Schreiben die richtigen Vorstellungen des Kindes zu stören. Dem gegenüber sind die römischen Zahlen natürliche Zeichen und haben sich als solche bei unserm Landvolk bis in die neuere Zeit erhalten. Die römische Fünf entspricht dem Bild der ausgestreckten Hand zwischen Daumen und Zeigefinger und die römische Zehn ist nichts anderes als eine doppelte Fünf. Da sich so die römischen Zahlzeichen mit der Hand in Verbindung bringen lassen, leisten sie beim ersten Rechenunterricht vortreffliche Dienste. Hier stehen Bild und Begriff in vollendeter Übereinstimmung. Immer und immer wieder wird der Schüler, wenn er z. B. eine römische Acht oder Neun schreibt, an die Zusammensetzung dieser Zahlen erinnert. Dadurch wird der Zahlbegriff befestigt. Was dies aber für den Anfangsunterricht bedeutet, weiss jeder, der schon auf dieser Stufe unterrichtet hat. — Unsere Meinung geht daher dahin, es seien an der ersten Elementarklasse, wo es sich um einen Zahlenwert von höchstens 20 handelt, nur die römischen Ziffern zu gebrauchen. Die arabischen Zahlen aber seien erst im zweiten Schuljahr zu verwenden.

E. H. in O.

Die Frage. Gegenüber der ausschliesslichen Anwendung der mündlichen Frage bei der Wiederholung des Lehrstoffes schreibt A. B. im Man. Gén.: Seit Jahren wende ich die schriftliche Frage an. Handelt es sich um die letzte Geschichtsstunde, so schreibe ich (für die mittlere oder obere Stufe) auf die linke Seite der Wandtafel zwei oder drei Fragen und ebenso viele auf die rechte Seite. Die Schülerreihe links beantwortet die eine, die Reihe rechts die andere Hälfte der Frage. Nach 15 Minuten werden die Hefte mit den Antworten eingezogen und zu Hause korrigiert. Vorteile dieses Vorgehens sind: Alle Schüler sind beschäftigt: der einzelne nimmt sich Zeit zur Überlegung und die Antworten erlauben ein Urteil über Verständnis und Fleiss des Schülers. Die erforderliche Zeit ist durch den Gewinn mehr als aufgewogen.

Türkische Multiplikation. Es sei 924 mit 57 zu multiplizieren. Entsprechend der Zahl der Ziffern des Multiplikanden (3) und des Multiplikators entwerfen wir ein Quadratnetz mit zwei Reihen von drei Quadraten. Darüber schreiben wir von links nach rechts den Multiplikanden 924, daneben von unten nach oben den Multiplikator 57. Nachdem wir die punktierten Diagonalen gezogen, setzen wir wie in der Tafel des Pythagoras die Produkte der einzelnen Multiplikazionen in die Quadrate ein, indem wir die Zehner unter die Einer über die punktierte Linie setzen. Wir addieren die Zahlen in den punktierten Kolonnen und erhalten 52,668.