SCHWEIZERISCHE LEHRERZEITUNG

26. MÄRZ 1948 93. JAHRGANG Nr. 12

MATHEMATIK

Inhalt: Zur Didaktik der elementaren Algebra und des Rechnens — Ein Abstandsproblem der analytischen Geometrie — Schüler finden Lösungen — Thema mit Variationen — Dezimalbrüche — Zum Anfang des Rechenunterrichtes — Kantonale Schulnachrichten: Aargau, Luzern, Schaffhausen, St. Gallen, Thurgau — Ausländisches Schulwesen — SLV

Zur Didaktik der elementaren Algebra und des Rechnens

Die Erfüllung der Forderung nach deutlichen Begriffen

«Einer neuen Wahrheit ist nichts schädlicher als ein alter Irrtum.»

«Eine nachgesprochne Wahrheit verliert schon ihre Grazie, aber ein nachgesprochner Irrtum ist ganz ekelhaft.»

Aus Goethes «Maximen und Reflexionen.»

In einer früher erschienenen Darstellung zu obigem Thema (SLZ Nr. 41/1947) wurde zu zeigen versucht, dass die übliche Methode im Unterricht der elementaren Algebra an einer Reihe von Ungenauigkeiten krankt; diese äussern sich besonders eklatant in den üblichen Definitionen für die Begriffe, die sich auf die Gliedrigkeit eines Rechenausdruckes beziehen. Es wurde auch die Behauptung gewagt, das moderne Buch *«Elementare Algebra»* von Viktor Krakowski habe dem Begriff Schulmathematik eine neue Gestalt verliehen und enthalten durch die klare Erfassung der Bedeutung der Klammersymbole eine neue Wahrheit [1]). Die folgenden Betrachtungen sollen nun diese Auffassung begründen.

Schon der Titel des Werkes von Krakowski lässt etwas vom Geiste seines Verfassers vermuten. Die üblichen Bezeichnungen Lehrbuch oder Leitfaden wurden wahrscheinlich deshalb gemieden, weil darin allzusehr der Beigeschmack von trocken oder ledern liegt. Mit dem Untertitel «für Mittelschule und Technikum» will der Verfasser wohl seine Auffassung kundtun, dass (abgesehen von der Stoffauswahl) für beide Schultypen die «gleiche» Algebra gilt und nicht etwa für ein Technikum eine solche mit weniger präzisen Begriffen. Wenn man an die vielen Feinheiten denkt, welche die beiden Bände enthalten, möchte man tatsächlich lieber von einer mathematischen Komposition oder gar von einem Kunstwerk sprechen als etwa von einem Leitfaden. Die Architektur dieses nicht leicht zu überblickenden Gebäudes des Geistes, für dessen Erbauung dem Verfasser natürlich alle bis heute gemachten Entdeckungen zur Verfügung standen und «nur» noch souverän zu meistern waren, wird sich nur demjenigen offenbaren, der bereit ist, die Mühe eines eingehenden Studiums dieses Werkes auf sich zu nehmen. Leider lässt dieser Umstand befürchten, dass das Werk anfänglich nur Lehrer mit einer gewissen Bereitschaft für eine neue Methode als Freunde gewinnen wird.

Im Vorwort zum ersten Band sagt der Verfasser: «Durch den schon äusserlich vom üblichen Schema abweichenden Aufbau des Stoffgebietes hofft das Buch... eine Lücke in der Lehrbuchliteratur auszufüllen», und dass er gerne sein Werk noch weiter vervollkommnen möchte, geht daraus hervor, dass er sich für «Verbesserungsvorschläge sehr dankbar» erklärt. Wenn man im Sinne dieses Buches unterrichtet, kommt man zur Ueberzeugung, dass jetzt gelingt, was nach der üblichen Methode unmöglich ist, nämlich, dem Lernenden von Anfang an eine Ahnung davon zu vermitteln, dass die Mathematik nicht nur nützlich, sondern auch schön ist. Dass der Mathematiker davon nicht nur eine Ahnung hat, sondern davon überzeugt ist, drückt Prof. Dr. A. Speiser in seinem Buche «Die mathematische Denkweise» so aus:

«Dass ... die Musik und die bildenden Künste Geschwister der Mathematik sind, bildet eine Hauptthese unserer Ausführungen. Heute wird dies ebensosehr bestritten, wie es früher bejaht wurde. Die Kunst ist aber die eigentliche Quelle unseres Gefühlslebens; ohne sie gäbe es nur trockene Nützlichkeits- und Verstandesmenschen; daher kann die Mathematik diese Position nicht unbesehen aufgeben, sondern sie muss sie einer neuen sorgfältigen Prüfung unterwerfen ...»

Man darf wohl sagen, Krakowski habe sich für diese Prüfung mit grosser Sorgfalt eingesetzt und dabei Entscheidendes gefunden. Musik und bildende Künste gelten bei uns wahrscheinlich deshalb nicht allgemein als Geschwister der Mathematik, weil für unsere Schulmathematik, wenn sie in den Händen Unberufener liegt, leider gilt, was Novalis in seinen «Fragmenten» sagt:

«Im Morgenlande ist die echte Mathematik zu Hause. In Europa ist sie zur blossen Technik ausgeartet.»

Der echte Mathematiker ist» für Novalis «Enthusiast per se». Wenn das auf Krakowski nicht zutreffen würde, hätte er nicht die folgenden Worte gefunden: «Wer die Mathematik wirklich erlebt hat, muss sie lieb bekommen haben. Er wird diese Erlebnisse nicht für sich behalten wollen, sondern sie in die breiten Massen tragen, damit auch das Volk die Schönheit der Mathematik preise und sich an ihr begeistere» [2]). Darum also hat er sich derart bemüht, den üblichen Weg zur Erlernung der Algebra in einen überall wirklich gangbaren Weg umzubauen. Dass der übliche Weg nicht überall gangbar ist, sondern an gewissen Stellen mehr Virtuosität als Denkfähigkeit vom Lernenden verlangt, zeigt sich besonders krass darin, dass der Nichtmathematiker Colerus in seinem Buche «Vom Einmaleins zum Integral» die Mathematik mit einer Mausefalle vergleicht, aus der man selten den Ausgang in den vormathematischen Zustand finde. (Es ist aber auch Colerus nicht gelungen, diesem Uebelstand abzuhelfen.) Krakowskis Weg stellt allerdings keine geringen Anforderungen an Lehrer und Schüler, aber erfahrungsgemäss ist es dabei möglich, die Lernenden von Anfang an so zu fesseln, dass ihre Aufnahmebereitschaft und die unbedingt nötige Bereitschaft zu williger Mitarbeit stark gefördert wird. Es braucht auf diesem Weg nirgends Verständnis durch Fertigkeit ersetzt zu werden, wie das nach der üblichen Lehrmethode da und dort nötig ist. Krakowski sagt zwar selbst: «Der Lehrer braucht sich keineswegs sklavisch an das Buch zu halten», und diese Bemerkung darf vielleicht so ergänzt werden: Derjenige

[1]) Von den vorgesehenen drei Bänden sind bis jetzt die beiden ersten erschienen, und der Schlüssel zum ersten Band erscheint demnächst.

[2]) Aus einem Vortrag «Ueber die Notwendigkeit präziser Begriffsbildungen im elementaren Mathematikunterricht», gehalten an der Gewerbeschule Zürich.

Lehrer, der den Weg von Krakowski überblickt, wird abzuwägen wissen, wo er diesen Weg verlassen darf, ohne die Fundamente für den weitern Aufbau grob zu vernachlässigen. Der folgende Grundsatz aber, der im Vorwort des zweiten Bandes steht, sollte unter keinen Umständen preisgegeben werden:

«Das Beibringen von blossen Fertigkeiten soll ja nicht das wesentliche Ziel des mathematischen Unterrichtes, auch nicht am Technikum, sein, sondern die Erziehung zum Denken.»

Wie man dieses Ziel erreichen kann, sagt Krakowski in der Broschüre «25 Jahre Abendtechnikum Zürich» so: «Mathematische Denkfähigkeit kann beim intelligenten Menschen nur durch einen durchgehend in allen Teilen klar aufgebauten Unterricht ausgebildet werden...» und im Vorwort zum ersten Band heisst es:

«Die Anlage des Buches ist auf den Anfänger-Standpunkt des denkfähigen Schülers zugeschnitten. Durch bewusst logische Schulung (möglichst präzise Ausdrucksweise, keine verflachenden Konzessionen) lässt es den Schüler erkennen, wie sein Standpunkt von Stufe zu Stufe höher steigt.»

Auf diesem Weg sind tatsächlich erfreuliche Resultate erreichbar, und niemand wird angesichts des sonst oft kläglichen Erfolges des Unterrichts ernsthaft bedauern, wenn dabei unter Umständen gewisse Abstriche in den meistens überladenen Stoffprogrammen unserer Schulen sich als nötig erweisen. Der Unterricht nach dem Buche Krakowskis zeigt, wie wenig es auf den Umfang der vermittelten mathematischen Kenntnisse ankommt, wieviel aber auf die Art, wie diese Kenntnisse vermittelt wurden.

Es ist unmöglich, auf gedrängtem Raum allem Neuen des Buches von Krakowski gerecht zu werden. Es kann sich deshalb hier nur um einen Versuch handeln, einige Hauptpunkte zu erwähnen.

Das wesentlichste Merkmal dieses Werkes ist wohl sein *organischer, lückenloser Aufbau mit durchwegs präzisen Begriffen, wobei keine Vorkenntnisse in Algebra vorausgesetzt werden.* Der organische Aufbau erforderte teilweise einen ganz neuartigen, «vom üblichen Schema abweichenden Aufbau des Stoffgebietes», und der Autor sagt weiter: «So ist es begreiflich, dass der Schüler beispielsweise vom Koordinatensystem erst erfahren darf, nachdem er im Besitze der reellen Zahlen ist. Dass dabei die Einführung der Irrationalzahlen und das Rechnen mit ihnen noch vor der Proportionen- und Wurzellehre vorgenommen wird, ist wohl ein Novum. Die Absicht ist, zu verhüten, dass der Schüler sich einen unzulänglichen Begriff des Irrationalen zurechtlegt.» Für die Lückenlosigkeit des Aufbaus waren neuartige Begriffe nötig, wie z. B. «Zahligkeit eines Rechenausdruckes». Wer es erlebt hat, wieviel klarer der Algebra-Unterricht auf der Unterstufe bei Einführung dieses Begriffes wird, kann sich kaum mehr denken, dass es ohne diesen Begriff einen wirklich erspriesslichen Unterricht geben könnte. (Es wäre nur wünschenswert, dass dieser Begriff in der zweiten Auflage etwas ausführlicher erklärt würde.) Vorkenntnisse setzt der Verfasser deshalb keine voraus, weil sein Gebäude ein eigenes, sehr solides Fundament benötigt. Es zeigt sich nämlich allzuoft, wie wenig man sich auf die sogenannten Vorkenntnisse verlassen kann, und dass sie sogar gelegentlich hinderlich sind. Man könnte dem Buch von Krakowski den Vorwurf machen, es behandle am Anfang fast ausschliesslich solche Gesetzmässigkeiten, die schon dem Primarschüler geläufig seien. So wird z. B. nicht als bekannt vorausgesetzt, in welchem Sinne das Gleichheitszeichen oder die Klammerzeichen in der Algebra verwendet werden, oder es wird genau erklärt, weshalb $1 \cdot 1 = 1$ ist. Die Absicht ist klar: der Lernende wird angehalten, jeden Schritt bewusst und keinen Schritt mechanisch auszuführen. Nur so kann der Schüler vor dem schematischen Arbeiten, mit dem sich manchmal auch der «Routineschlendrian» (Pestalozzi) des Lehrers, zufrieden gibt, bewahrt werden.

Ein weiterer wichtiger Wesenszug des Werkes ist der folgende: Mit der Einführung neuer Begriffe wird immer so lange zugewartet, bis alles Nötige sorgfältig vorbereitet ist und der Schüler gewissermassen auf diese Einführung drängt, weil ihm «das Messer am Hals steht», wie sich der Verfasser schon ausgedrückt hat. So werden beispielsweise die Zahl Null und die negativen ganzen Zahlen erst eingeführt, nachdem das Prinzip von der Fortgeltung der Rechnungsregeln (Hankel) aufgestellt und das Rechnen mit den natürlichen Zahlen (1, 2, 3, ...) so weit getrieben worden ist, dass man die Beschränkung auf den Bereich dieser Zahlen schon längstens als lästig empfindet. Dadurch gelingen zwangslose Definitionen, die man wohl in Gegensatz zu den von Pestalozzi so scharf verurteilten anschauungslosen Definitionen stellen darf.

Beschränken wir uns nun zur Hauptsache auf den ersten Band. Dieser ist ausschliesslich den Operationen erster und zweiter Stufe und dem Potenzieren mit einer natürlichen Zahl gewidmet und führt dadurch nirgends aus dem Bereich der reellen Zahlen heraus. Er ist gegliedert in: I. Die natürlichen Zahlen, II. Die ganzen Zahlen, III. Die rationalen Zahlen, IV. Die reellen Zahlen.

Im Abschnitt I wird, ausgehend vom Begriff der Menge, der Begriff der natürlichen Zahl eingeführt und anhand dieser Zahlen ein ausgedehntes Fundament von äusserster Tragfähigkeit für den ganzen spätern Aufbau errichtet. Bei diesem Aufbau wird der Bereich der natürlichen Zahlen zuerst, zur unbeschränkten Ermöglichung der Subtraktion, zum Bereich der ganzen Zahlen $(\ldots, -2, -1, 0, +1, +2 \ldots)$ erweitert, dieser wieder, zur unbeschränkten Ermöglichung der Division (Ausnahme: Division durch Null), zum Bereich der rationalen Zahlen (z. B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8}, \ldots$); und durch Hinzunahme der irrationalen Zahlen, die Krakowski als unendlichstellige unperiodische Dezimalbrüche einführt, gelangt man schliesslich zu den reellen Zahlen, von denen der Verfasser beweist, dass ihre Bildpunkte die ganze Zahlengerade erschöpfen. Dadurch kommt dieser Lehrgang in schönster Weise den folgenden Ansichten von Kronecker und Voss entgegen. Der grosse Mathematiker Kronecker soll über die natürlichen Zahlen einmal gesagt haben, sie seien vom lieben Gott gemacht, während alles andere in der Mathematik Menschenwerk sei; und Voss sagt in seinem Buche «Ueber das Wesen der Mathematik:

«Man kann nicht genug hervorheben, dass schon mit der Bildung der Brüche und der negativen Zahlen das Gebiet des «Imaginären» beginnt. Dies empfanden schon die Alten; bei uns wird das Gefühl dafür durch die hergebrachte Form des elementaren Rechenunterrichtes abgestumpft.»

Dieser hergebrachten Form ist es zuzuschreiben, dass der elementare Rechenunterricht oft so klägliche Erfolge zeitigt, wie Johannes Kühnel in seinem Bändchen «Vier Vorträge über neuzeitlichen Rechenunterricht» es u. a. an folgendem Beispiel zeigt: «Mein Vater ist Werkmeister in einer grösseren Fabrik. Er ist letzthin mit seinen Arbeitsgenossen in einer Frühstückspause an die Frage geraten, ob es denn möglich sei, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{8}$ zusammenzuzählen. Und nach längerer Besprechung dieses schwierigen Falls ist man zu dem Ergebnis gekommen, das sei nicht möglich.» Es ist undenkbar, dass eine solche Diskussion über das Rechnen mit natürlichen Zahlen zustande kommen könnte; dass sie aber über Brüche möglich ist, zeigt, dass der übliche Rechenunterricht dem Schüler zu wenig Gelegenheit gibt, die Brüche (und die negativen Zahlen) gewissermassen selber zu erfinden und sie zu erleben. Dass man dieses Erlebnis schon im elementaren Rechenunterricht so eindrücklich gestalten sollte, wie es Krakowski in seinem ersten Bande tut, kommt dann recht zum Bewusstsein, wenn man sich vergegenwärtigt, dass schon der Uebergang von den natürlichen zu den ganzen Zahlen in Parallele gesetzt werden kann mit dem Uebergang von den reellen zu den komplexen Zahlen.

Und nun sei auf einige Feinheiten, die fast ausschliesslich dem ersten Band entstammen, etwas näher eingegangen.

1. *Konsequente Auffassung der Klammerzeichen als Symbole, mit denen man ein Resultat andeuten will,* und nie als Symbole, die andeuten, dass eine gewisse Operation «zuerst ausgeführt» werden soll. Krakowski scheint der erste zu sein, der diese Auffassung klar ausgesprochen hat (Bd. I, S. 4, Vereinbarung c), obschon dazu schon in Eulers «Vollständiger Anleitung zur Algebra» gewisse Ansätze zu erkennen sind. Diese Auffassung ist deshalb von ausserordentlicher Tragweite, weil sie *der Schlüssel genannt werden kann, womit es dem Verfasser gelungen ist, einen einwandfreien Weg zu eröffnen für den Aufbau der elementaren Algebra.* Untersuchen wir die Bedeutung dieser Auffassung für das Rechnen mit natürlichen Zahlen:

Bei den *Operationen erster Stufe* bedeutet sie folgendes: Ein Ausdruck wie etwa $a + b$ (gelesen «a plus b») ist Kurzschrift für «Addiere die Zahl b zur Zahl a». Also stellt $a + b$ eine Aufgabe dar, und das Resultat dieser Aufgabe, die «Summe von a und b», wird dargestellt durch $(a + b)$. Analog verhält es sich mit einem Ausdruck wie $a - b$ (gelesen «a minus b»). Dieser stellt eine Subtraktionsaufgabe dar, deren Resultat (Differenz) durch $(a - b)$ angedeutet wird.

Bei den *Operationen zweiter Stufe* tritt etwas Neues hinzu. Der Ausdruck $a \cdot b$ (gelesen «a mal b») deutet eine Multiplikationsaufgabe an, deren Resultat (Produkt) entweder durch $(a \cdot b)$ angegeben werden kann oder, wenn keine Verwechslungen möglich sind, auch durch ab (ohne «mal» zu lesen!). Ein Beispiel, wo die Klammern und der Multiplikationspunkt nicht weggelassen werden können, ist $(2 \cdot 3)$; natürlich kann man aber dafür auch 6 schreiben. Analog kann man das Resultat (Quotient) der Aufgabe $a : b$ (gelesen «a durch b») auf zwei Arten angeben, nämlich durch $(a : b)$, oder, wenn keine Verwechslungen möglich sind, auch durch $\frac{a}{b}$ (gelesen «a über b»). Ein Beispiel, wo die Klammern auch bei Verwendung der «Bruchform» nötig sind, wäre $(a : b)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Die Ausdrücke ab und $\frac{a}{b}$ stellen gewissermassen einen handlichen, aber nicht immer verwendbaren Ersatz dar für $(a \cdot b)$ und $(a : b)$.

Bei den *Operationen dritter Stufe* zeigt sich wieder etwas Neues: Ein Ausdruck wie etwa a^b ist (leider!) sowohl als Symbol für die Andeutung einer Aufgabe als auch als Symbol für die Andeutung eines Resultates (Potenz) aufzufassen. Hier kann man durch die Lesart «a potenziert mit b» bzw. «a hoch b» die Aufgabe vom Resultat unterscheiden. Dort, wo Verwechslungen möglich wären, sind auch hier wieder Klammersymbole zu verwenden, z. B. bei $(a^3)^2$.

Analog wie mit a^b verhält es sich mit $\sqrt[b]{a}$ und $\log_b a$. Hier kann auch wieder die Aufgabe vom Resultat durch die Lesart unterschieden werden: «a radiziert mit b» und «b-te Wurzel a» bzw. «a logarithmiert mit b» und «b-ter Logarithmus a».

Zu beachten ist noch, dass Ausdrücke wie $\frac{a}{b + c}$, a^{b+c}, ${}^{a}\sqrt{b+c}$ vereinfachte Schreibweisen sind für $\frac{a}{(b + c)}$, $a^{(b+c)}$, ${}^{a}\sqrt{(b+c)}$, und dass ein Ausdruck wie ab^2 nach den obigen Verabredungen doppeldeutig wäre, weil man ihn so $(ab)^2$ oder so $a(b^2)$ auffassen könnte. Für diesen Fall ist eine weitere Verabredung nötig: ab^2 ist aufzufassen als Produkt, das entstanden ist durch Multiplikation der beiden Faktoren a und b^2.

Mit diesen scharfen Unterscheidungen gelingt, was vor Krakowski wahrscheinlich keinem gelungen ist: *die stichhaltige Definition der Begriffe ein- und mehrgliedriger Ausdruck, Monom und Polynom.* Darauf kann aber hier nicht eingegangen werden [3]).

Für das Rechnen mit speziellen Zahlen hat die Auffassung Krakowskis über die Klammerzeichen Konsequenzen, die besonders den Schülern Spass bereiten, weil sie z. B. sagen können, eine Aufgabe wie $13 \cdot 26$ sei «gelöst», wenn man schreibe $(13 \cdot 26)$. Bei einer Divisionsaufgabe wie zum Beispiel $2 : 5$ gibt es für den Schüler sogar drei Arten, um das Resultat anzugeben: $(2 : 5)$ oder $\frac{2}{5}$ oder 0,4.

Für das Rechnen mit allgemeinen Zahlen hat Krakowskis Auffassung über die Klammersymbole Konsequenzen, deren Feinheit besonders dem Mathematiker Freude machen sollte. Man kann nämlich jetzt auch eine Aufgabe «lösen» wie $(a + b) \cdot c + d : e$, von der im Abschnitt «Die Forderung nach deutlichen Begriffen» gesagt worden ist, die Grundregel könne ihr nicht gerecht werden. Diese Aufgabe enthält nach der oben geschilderten Auffassung die vier Zahlen: $(a + b)$, c, d und e. Wenn darin die Operationen zweiter Stufe «ausgeführt» werden, erhält man $(a + b)\,c + \frac{d}{e}$, d. h. einen Ausdruck mit zwei Zahlen: $(a + b)\,c$ und $\frac{d}{e}$. Wenn man noch die Addition «ausführt», erhält man die Zahl $[(a + b)\,c + \frac{d}{e}]$.

2. *Neuartige Symbole zur Andeutung von Rechenoperationen.* Gleichzeitig mit den Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen führt Krakowski «allgemeine Operationszeichen» ein. Dadurch wird es möglich, gewisse Aussagen in voller Gültigkeit für alle Operationen zu formulieren.

«Es ist eben die besondere Kraft und die Bedeutung des mathematischen Denkens, den allgemeinen Gedanken vor dem besonderen Beispiel zu betonen und zu entwickeln, und die

---

3) In der 2. Auflage sollte gesagt werden, dass die Redeweise «Operationen mit Polynomen» eine Abkürzung für «Operationen mit algebraischen Summen» ist.

Mathematik würde ihren Hauptcharakter verlieren, wenn sie sich in die Besprechung von Einzelbeispielen auflösen würde.»

(R. Fricke: Differential- und Integralrechnung, Vorrede.)

Für die Operationen dritter Stufe werden die folgenden (hier zu gross geratenen) Zeichen eingeführt:

a $\square$ b für «a potenziert mit b»; Resultat: (a $\square$ b)

a $\overset{\square}{\perp}$ b für «a radiziert mit b»; Resultat: (a $\overset{\square}{\perp}$ b)

a $\underset{\square}{\top}$ b für «a logarithmiert mit b»; Resultat: (a $\underset{\square}{\top}$ b)

Mit diesen neuen Operationszeichen kann man deutlicher, als es mit den üblich verwendeten Symbolen möglich ist, dem Schüler zum Bewusstsein bringen, wie aus zwei Zahlen, an denen eine Rechenoperation vorgenommen wird, eine neue Zahl entsteht [4]). Die neuen Zeichen gestatten die Unterscheidung zwischen Aufgabe und Resultat und weisen auf den Zusammenhang zwischen den Operationen dritter Stufe hin. Wenn der Schüler mit diesen Zeichen umzugehen versteht, kann man anschliessend unbedenklich die üblichen Symbole einführen. Vergleich: Beim Erlernen einer Fremdsprache bedient man sich oft anfänglich der phonetischen und erst später der historisch gebundenen Schrift.

3. *Genau abgewogene Verwendung von Fachausdrücken.* Gewisse, sonst allgemein gebräuchliche Fachausdrücke werden solange konsequent gemieden, als ihre Einführung nicht durch geschichtliche oder sachliche Gründe gerechtfertigt ist. Dazu gehört z. B. «Wurzel einer Bestimmungsgleichung», was an den Glauben der Mathematiker zu Zeiten Eulers erinnert, jede Gleichung n-ten Grades mit einer Unbekannten könne mit Hilfe von Wurzelausziehungen gelöst werden. Das sonst übliche «Rationalisieren des Nenners» wird ersetzt durch «Nenner von Wurzelzeichen befreien», weil die übliche Benennung erst dann einen Sinn bekommt, wenn man den Begriff einer rationalen Operation einführt. Den wenig geeigneten Fachausdruck: «entgegengesetzt-gleiche Zahlen» ersetzt Krakowski durch «konträre Zahlen.»

4. *Genau abgewogene sprachliche Formulierungen.* Krakowski vermeidet z. B. die übliche, aber nicht einwandfreie Bezeichnung «graphische Darstellung (Diagramm, Schaubild) einer Funktion»; da doch z. B. im Falle eines funktionalen Zusammenhanges zwischen zwei Variablen (Funktion und Argument) nicht die Funktion (= abhängige Variable) graphisch dargestellt wird, sondern das Abhängigkeitsgesetz, das die beiden Variablen miteinander verknüpft, spricht Krakowski vom «Schaubild einer Funktionsgleichung» oder noch genauer vom «Schaubild des funktionalen Zusammenhanges zwischen zwei Variablen». Dieses ist in der Regel eine Kurve, kann aber auch aus diskreten Punkten bestehen. (Bei Funktionen, die von zwei Argumenten abhängen, ist das Schaubild in der Regel eine «Landschaft».) Schlagwortartige Formulierungen, sogenannte Faustregeln, wie etwa «Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert», werden streng gemieden, weil sie dem Sachverhalt nicht gerecht werden und den Lernenden verwirren.

5. *Neuartige Anordnung ähnlichlautender Aussagen.* Als Beispiel dafür diene das folgende, das zugleich ein Musterbeispiel einer genau abgewogenen sprachlichen Formulierung bildet:

Eine Grösse heisst

konstant oder eine Konstante,	veränderlich (variabel) oder eine Variable,

wenn sie bzw. ihre Masszahl
(immer auf dieselbe Masseinheit bezogen)
im Laufe einer Rechnung oder Ueberlegung

stets den gleichen Wert	jeden Wert eines bestimmten Zahlenvorrates, den man den Definitionsbereich der Variablen nennt,

annimmt oder annehmen

soll.	darf.

Zu dieser Anordnung, die drucktechnisch in der ersten Auflage vielleicht noch nicht optimal gelöst ist, sagt Krakowski: «Um die Darstellung möglichst übersichtlich und eindrücklich zu gestalten, fasst das Buch Verbindendes zusammen und stellt Trennendes augenfällig gegenüber.» Sie ist aber auch erfahrungsgemäss «für den Lehrer didaktisch überaus wertvoll». Vielleicht hat diese Darstellung den Verfasser direkt zur Entdeckung des wirklich reizvollen Zusammenhanges zwischen seiner «ersten und zweiten Klammerregel» geführt. Die zweite Klammerregel, welche erlaubt, fast alle Gesetze über Brüche schon bei den natürlichen Zahlen zu behandeln, dürfte damit geeignet sein, dem Unterricht im Bruchrechnen neue Wege zu weisen. Sie leistet auch für den Unterricht im Rechenschieberrechnen sehr gute Dienste, besonders bei Benützung der Reziprokskala; Beispiel: Einen Ausdruck wie $\frac{a}{b\,c}$ berechnet der Unbeholfene meistens so, dass er zuerst das Produkt bc berechnet und dann die Division ausführt. Mit Benützung der zweiten Klammerregel aber ergibt sich: $\frac{a}{b\,c} = a : (b \cdot c) = a : b : c$, und diese Aufgabe ist bei Benützung der Reziprokskala oft mit einer einzigen «Zungenstellung» lösbar.

6. Schliesslich darf man wohl auch erwähnen, dass «ein ausführlich gehaltenes *Lehrbuch der elementaren Algebra mit völlig durchgerechneten Uebungsbeispielen* und vielen (bewährten Aufgabensammlungen zum Teil entnommenen) Uebungsaufgaben, sowohl Schülern wie Autodidakten willkommen sein dürfte.» Reinen Autodidakten allerdings kommt das Buch durch seine konzentrierte Abfassung wenig entgegen, und auch die Zahl der Aufgaben zu gewissen Abschnitten ist als Minimalzahl anzusprechen und genügt nur dann zur Einübung der vorangehenden Theorie, wenn der Lernende wirklich alles verstanden hat. Dann aber kommt man mit diesen sorgfältig ausgewählten, nie monotonen Aufgaben (die leider da und dort durch Druckfehler entstellt sind), tatsächlich aus.

Und nun noch einige Betrachtungen, zu denen das besprochene Werk Anregung gegeben hat. Krakowskis präzise Begriffsbildungen erforderten eine weitgehende Vermeidung von Homonymen. Das gibt Anlass dazu, allen Homonymen Aufmerksamkeit zu schenken. Die besondere Aufmerksamkeit des Mathematiklehrers verdient das Gleichheitszeichen; es hat doch in einer Bestimmungsgleichung einen andern Sinn als in einer identischen Gleichung und wieder einen andern in einer Proportion usw.

---

4) In den Aufgaben $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ und a $\square$ b hat es einen Sinn, a die passive und b die aktive Zahl zu nennen. Daher müsste man konsequenterweise $3 \cdot 4$ als $3 + 3 + 3 + 3$ (und nicht als $4 + 4 + 4$) deuten, was auch Krakowski tut. Vielleicht wäre deshalb vorzuziehen, $3 \cdot 4$ als «3 multipliziert mit 4» statt «3 mal 4» zu lesen.

Vielleicht würde es sich lohnen, wenigstens das «Forderungsgleichheitszeichen» einer Bestimmungsgleichung für didaktische Zwecke durch ein neues Zeichen zu ersetzen. Prof. Dr. Helmut Hasse verwendet z. B. in seiner «Höheren Algebra» das Zeichen $\doteq$. (In neueren Büchern der Amerikaner wird dieses Zeichen für die «Näherungsgleichheit» verwendet, z. B. $\sin x \doteq x$ für kleine x.) Man kann aber auch die oft schädliche Wirkung des Homonyms «gleich» dadurch parieren, dass man im Unterricht (mindestens gelegentlich) verlangt, das Gleichheitszeichen nicht nur als «gleich» zu lesen, sondern beispielsweise als

«forderungsgleich» bei Bestimmungsgleichungen wie z. B. $2x + 3 = 7$;
«identischgleich» bei identischen Gleichungen wie z. B. $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$;
«näherungsgleich» in einer Gleichung wie $2{,}38 \cdot 4{,}56 = 10{,}85$;
«gibt» in einer Gleichheit wie $2 + 3 = 5$;
«definitionsgleich» in einer Gleichung wie $a^3 = (a \cdot a \cdot a)$;
«gleich (im Sinne von deckungsgleich)» bei Strecken u. Winkeln, z. B. in $a = b$ oder $\alpha = \beta$;
«flächengleich» in Gleichungen wie etwa $\Delta\, ABC_1 = \Delta\, ABC_2$;
«deutungsgleich» bei Verwendungen wie z. B. x = Anzahl der Arbeiter;
«grössengleich» (aber nicht «numerischgleich») in Gleichungen wie $2\,m = 200\,cm$ oder $90^0 = 100^g$.

In den Proportionen wird das Gleichheitszeichen üblicherweise als «wie» gelesen; es wäre auch sinnvoll, «verhältnisgleich» zu sagen. Man könnte sich auch fragen, wie sich das Gleichheitszeichen in einer Funktionsgleichung wie z. B. $F = \pi r^2$ am sinnvollsten lesen liesse. Auf jeden Fall sollte jede besondere Verwendungsart des Gleichheitszeichens explizite erklärt (z. B. auch bei Gleichungen wie $CaCO_3 = CaO + CO_2$) und darauf aufmerksam gemacht werden, dass jede Verwendungsart widerspruchsfrei sein muss.

Verheerend wirkt es für einen späteren Mathematik-Unterricht, wenn man das Gleichheitszeichen im Rechenunterricht so verwendet, dass der Sinn für eine korrekte Verwendung zerstört wird. Man denke etwa an eine «Gleichung» wie 2 kg = 5 Fr. Eine andere missbräuchliche Verwendung des Gleichheitszeichens ist ersichtlich aus der folgenden Aufgabe, die samt Lösung einem Rechenbuch entnommen ist: «Wieviel Eisenblech ist zu einem 3 m langen Rohr notwendig, wenn der Durchmesser 13 cm sein soll und für den Falz 2 cm gerechnet werden?

$$M = 13 \cdot 3{,}14 = 40{,}82 + 2 =$$
$$42{,}82 \cdot 300 = 12846\ cm^2.$$» [5])

In diesen Beispielen wäre wohl «sinnlosgleich» die richtige Lesart für die Gleichheitszeichen (mit Ausnahme des letzten).

Das Zeichen : ist ein weiteres Homonym der mathematischen Zeichensprache. Schon im elementaren Rechenunterricht wird es gewöhnlich für «geteilt durch» und «gemessen durch» benützt. Der Mathematiker benützt es für «dividiert durch» und für verhält sich zu». Da Krakowski bei der Besprechung der Division die Bedeutung eines Ausdruckes wie a : b : c angibt mit (a : b) : c (im Gegensatz zu ähnlichen Büchern, die solche Ausdrücke vermeiden und daher auch deren Bedeutung nicht zu erklären brauchen), kann eine Gleichung wie

$$6 : 4 : 1 = 3 : 2 : 1$$

richtig und falsch sein; wenn man nämlich die Doppelpunkte auffasst als Divisionszeichen, ist diese Gleichung richtig; sie ist aber falsch, wenn sie als fortlaufende Proportion aufgefasst wird. (Es wäre deshalb wünschenswert, dass Krakowski in der zweiten Auflage auf die Doppeldeutigkeit des Zeichens : nachdrücklich hinweisen würde). Vielleicht wäre es am besten, wenn man sich auch bei uns zweier verschiedener Zeichen für «dividiert durch» und «verhält sich zu» bediente, wie das in den angelsächsischen Ländern geschieht, wo das Zeichen : für Proportionen reserviert ist, während als Divisionszeichen $\div$ benützt wird. In diesen Ländern wird auch in Proportionen an Stelle unseres Gleichheitszeichens das Zeichen :: geschrieben, so dass also eine Proportion z. B. so aussähe:

$$a : b : c :: 3 : 2 : 1,$$

während die obige Gleichung $(6 : 4 : 1 = 3 : 2 : 1)$ sich so schreiben liesse:

$$6 \div 4 \div 1 = 3 \div 2 \div 1.$$

Für eine Proportion wie

$$(a + b) : (c + d) = e : f$$

ist in den Büchern noch gelegentlich die folgende Schreibweise anzutreffen:

$$a + b : c + d = e : f,$$

die im Sinne Krakowskis natürlich nicht gangbar ist. Ebenso wäre es nicht erlaubt, zu schreiben

$$b : 2 \cdot \pi \cdot r = \alpha^0 : 360^0;$$

hingegen wäre dafür zulässig:

$$b : 2\,\pi\, r = \alpha^0 : 360^0 \text{ oder } b : (2 \cdot \pi \cdot r) = \alpha^0 : 360^0.$$

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass die mathematischen Zeichen nur dann nicht falsch verstanden werden, wenn ihre Bedeutung peinlich genau erklärt worden ist. Ebenso steht es mit gewissen Ausdrücken der mathematischen Terminologie. Es sei dazu noch als Beispiel angeführt, dass Krakowski (leider in der 1. Auflage noch nicht restlos konsequent) unterscheidet zwischen Probe und Kontrolle und bei jeder Aufgabe, die dazu Gelegenheit bietet, das eine oder andere verlangt. Man sollte sich dabei nie beeindrucken lassen, wenn für sorgfältige Erklärungen, Proben und Kontrollen viel Zeit aufgewendet werden muss. Man wird dafür reichlich entschädigt.

Hoffentlich vermögen diese Betrachtungen eine Ahnung davon zu geben, dass das Werk von Krakowski ein Helfer von unschätzbarem Wert für denjenigen Mathematiklehrer ist, der seine Schüler zu sorgfältigem Denken erziehen will und ihnen damit Grundlagen zu Selbstvertrauen, Selbständigkeit und Wahrhaftigkeit vermitteln möchte.

E. Treichler.

* * *

Die beiden bis jetzt (im Verlag T. Huonder, Postfach H. B. Zürich) erschienenen Bände «Elementare Algebra» von Dr. Viktor Krakowski sind in Leinen gebunden, Format 16 × 23 cm. I. Teil 203 S., Fr. 9.—; II. Teil 273 S., Fr. 13.—.

Einen Einblick in den hoffentlich bald erscheinenden III. Teil gewährte Krakowski durch den Artikel «Ueber die Einführung komplexer Zahlen im Mittelschulunterricht» (SLZ Nr. 5/1946).

---

[5]) Zum Resultat 12 846 cm² sei nebenbei bemerkt, dass es bei Verwendung des besseren Näherungswertes 3,1416 für die Kreiszahl π lauten würde 12 852,24 cm². Das Resultat 12 846 cm² täuscht also eine zu grosse Genauigkeit vor und würde besser etwa lauten 1,285 m².

Ein Abstandsproblem der analytischen Geometrie

Gibt man sich 2 feste Punkte vor und fordert, dass die Summe, die Differenz, der Quotient oder das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes von den 2 festen konstant bleibe, so sind die Lösungen in der gleichen Reihenfolge Ellipsen, Hyperbeln, Kreise und Cassinische Ovale, letztere algebraische Kurven 4. Ordnung. Ersetzt man den einen festen Punkt durch eine feste Gerade und verlangt, dass die Differenz der beiden Abstände verschwinde, so erscheinen die noch fehlenden Kegelschnitte, die Parablen.

Es liegt nun nahe, die Problemstellung gehörig zu verallgemeinern. *Man gibt n_1 feste Punkte, n_2 feste Geraden und n_3 feste Ebenen vor und fordert die Konstanz einer gegebenen Funktion der Abstände eines Punktes von diesen Elementen.*

Bei der Lösung analytischer Probleme muss man sehr darauf achten, ein günstiges Koordinatensystem zu benützen, weil Missgriffe an dieser Stelle auf unlösbare technische Schwierigkeiten führen können. Aeusserst wichtig ist ferner die Benützung geeigneter Parameter. Selbst wenn man das dem Problem am besten angepasste Koordinatensystem getroffen hat, ist mühsame Kleinarbeit nicht immer zu vermeiden. Hier ist nun die Einführung der Vektoren von grösstem Nutzen. Die rechnerische Arbeit wird auf ein Minimum reduziert, der direkte Zusammenhang der Rechnung mit der dem Problem zugeordneten Figur bleibt bis in die Endformeln gewahrt, und die geometrische Interpretation der gewonnenen Resultate wird sehr erleichtert.

Der 1. Abschnitt der vorliegenden Arbeit enthält die nötigen Definitionen und Vektorformeln.

Im 2. Abschnitt wird die Lösung soweit gefördert, als es ohne Spezialisation möglich ist.

Anmerkungen

[1]) $\mathfrak{n}$ vertritt überall die restlichen Elemente.
[2]) Diese Argumente sind nicht unabhängig!
[3]) Vergleiche etwa: Bôcher, Algebra.
[4]) Es gelangen die Kreis- und Hyperbelfunktionen von α und β zur Anwendung. Die jeweilige Auswahl hängt von den Vorzeichen ab.

I. *Definitionen und Formeln*

1. *Punkte*: P (x_1, y_1, z_1), Q (x_2, y_2, z_2), R (x_3, y_3, z_3)
2. *Ortsvektoren:* $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathfrak{b} = (b_1, b_1, b_3)$, $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, c_3)$
   Der Anfangspunkt ist fest.
3. *Vektoren*: Differenzen von Ortsvektoren.
   Sie sind invariant gegenüber Translationen.
4. *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:*
   $$\lambda \cdot \mathfrak{x} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
5. *Länge eines Vektors:* $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\mathfrak{x}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
6. *Einheitsvektor:* Vektor von der Länge 1
   $$\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$$
7. *Lineare Abhängigkeit:* $\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots \lambda_n \mathfrak{a}_n$
   Im n-dimensionalen Raum sind $n + 1$ Vektoren immer linear abhängig.
8. *Skalares Produkt zweier Vektoren:*
   $$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
9. *Bedingung für Orthogonalität:* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$.
10. *Vektorielles Produkt zweier Vektoren:*
    $$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = (a_2 b_3 - b_3 a_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
    $$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2 = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2$$
11. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{c}, \mathfrak{d}] = \mathfrak{a}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d}$
12. *Polarkoordinaten:* $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$
13. *Räumliche Polarkoordinaten:*
    $$x = r \cdot \sin\Theta \cos\varphi$$
    $$y = r \cdot \sin\Theta \sin\varphi$$
    $$z = r \cdot \cos\Theta$$
14. *Zylinderkoordinaten:* $x = R \cdot \cos\psi$, $y = y$, $z = R \cdot \sin\psi$

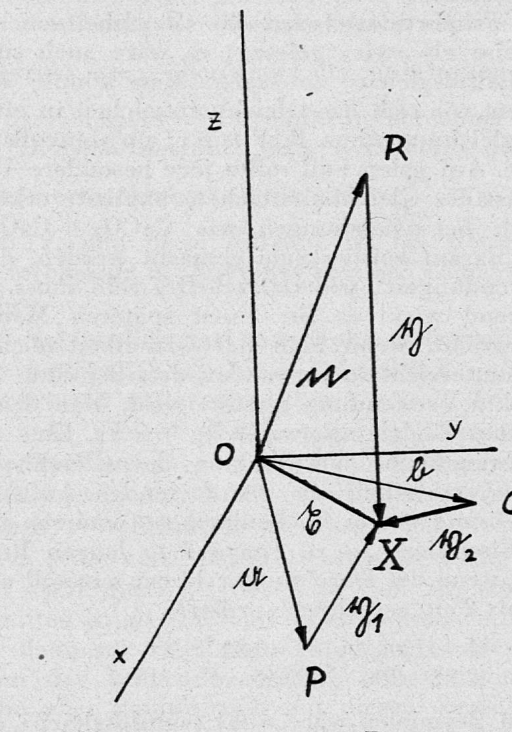
II. *Lösung*

Eine Klassifikation der zahllosen Einzelprobleme erfolgt zweckmässig nach folgende Schema:

a) Nur feste Punkte.
b) Nur feste Geraden.
c) Nur feste Ebenen.
d) Punkte und Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen u. Punkte, Punkte, Geraden u. Ebenen.

Vor allem ist die Berechnung der Abstände erforderlich. Hernach folgt Ermittlung geeigneter Parameter.

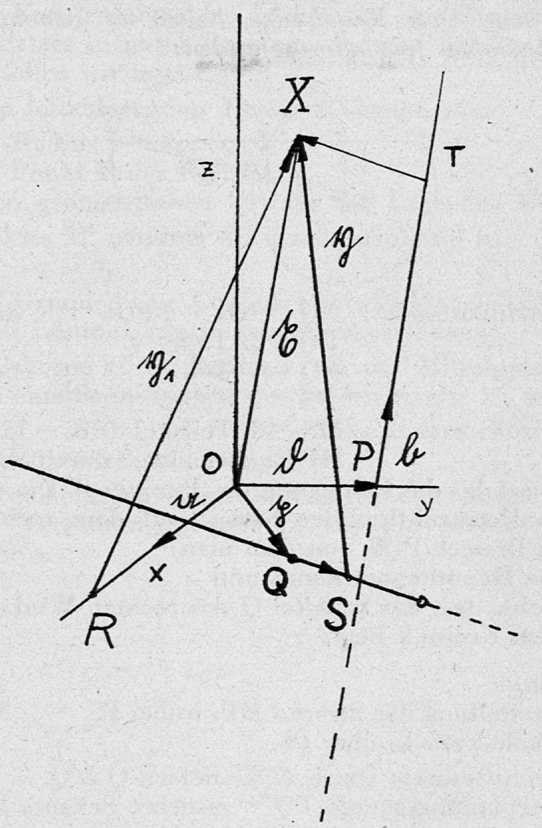
a) Ein rechtwinkliges Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Nullpunkt mit dem 1. Punkt und die x-y-Ebene mit derjenigen Ebene zusammenfällt, welche durch die 3 ersten Punkte festgelegt wird (Abb. 1).



Es gilt nun:	Daraus folgt:
$\mathfrak{a} + \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x} = 0$	$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}$
$\mathfrak{b} + \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x} = 0$	$\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x} - \mathfrak{b}$
$\mathfrak{n} + \mathfrak{y} - \mathfrak{x} = 0$ [1])	$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{n}$

und wir haben die Abstandsfunktion F mit den Argumenten $\sqrt{\mathfrak{x}^2}$, $\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})^2}$, $\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{b})^2}$, $\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{n})^2}$ zu bilden. [2])

b) Als x-y-Ebene wird die durch die 1. Gerade und ihren kürzesten Abstand von der 2. Geraden bestimmte, als x-Achse die 1. Gerade und als y-Achse die Gerade durch den kürzesten Abstand gewählt (Abb. 2).



Man setzt an:

$$\lambda_1 \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x} = 0$$
$$\mathfrak{d} + \lambda_2 \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x} = 0$$
$$\mathfrak{p} + \lambda \cdot \mathfrak{n} + \mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x} = 0$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x} - \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x} - \mathfrak{d} - \lambda_2 \cdot \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p} - \lambda \cdot \mathfrak{n}$$

Die letzten Gleichungen werden der Reihe nach skalar mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ multipliziert. Da die Abstände senkrecht auf den zugehörigen Geraden stehen, erhält man:

$$0 = \mathfrak{a}\mathfrak{x} - \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}^2; \quad 0 = \mathfrak{b}\mathfrak{x} - \lambda_2 \cdot \mathfrak{b}^2;$$
$$0 = \mathfrak{n}\mathfrak{x} - \lambda_2 \cdot \mathfrak{n}^2$$

und weiter:

$$\lambda_1 = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}^2}; \quad \lambda_2 = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}^2}; \quad \lambda = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{x}}{\mathfrak{n}^2}.$$

Mit diesen Werten und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ als Einheitsvektoren gewählt werden können, wird:

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}^2} \cdot \mathfrak{a}; \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x} - \mathfrak{d} - \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}^2} \cdot \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{x}}{\mathfrak{n}^2} \cdot \mathfrak{n}$$

$$\mathfrak{y}_1^2 = \mathfrak{x}^2 - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2}{\mathfrak{a}^2} = \mathfrak{x}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 = [\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]^2$$

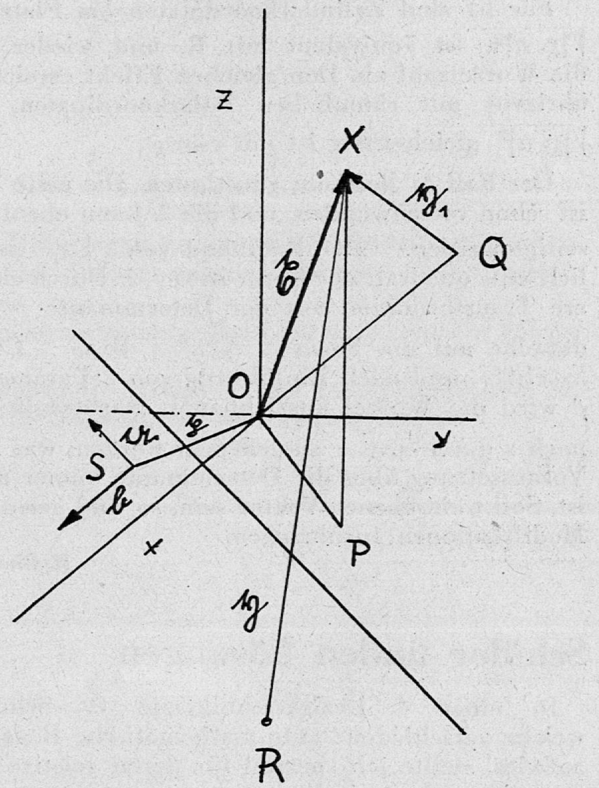
$$\mathfrak{y}_2^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{d})^2 - \frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{x})^2}{\mathfrak{b}^2} = (\mathfrak{x} - \mathfrak{d})^2 \mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{x})^2 = [\mathfrak{x} - \mathfrak{d}, \mathfrak{b}]^2$$

$$\mathfrak{y}^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{p})^2 - \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{x})^2}{\mathfrak{n}^2} = (\mathfrak{x} - \mathfrak{p})^2 \mathfrak{n}^2 - (\mathfrak{n}\mathfrak{x})^2 = [\mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{n}]^2$$

und wir haben die Abstandsfunktion F mit den Argumenten $\sqrt{[\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]^2}$, $\sqrt{[\mathfrak{x} - \mathfrak{d}, \mathfrak{b}]^2}$, $\sqrt{[\mathfrak{x} - \mathfrak{y}, \mathfrak{n}]^2}$ aufzustellen.

c) Die 1. Ebene dient als x-y-Ebene, die Spur der 2. Ebene als x-Achse und der Schnittpunkt der Spuren von 2. und 3. Ebene als Nullpunkt (Abb. 3).

Der Abstand des Punktes X von der x-y-Ebene ist offensichtlich identisch mit z.
Es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ zwei Einheitsvektoren der 2., $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ebensolche der 3. Ebene. $\mathfrak{p}$ sei das Lot auf die 3. Ebene.



Wegen

$$\mathfrak{p} + \lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{y} - \mathfrak{x} = 0$$
$$\lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \mu_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x} = 0$$

folgt:

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x} - \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 - \mu_1 \cdot \mathfrak{b}_1;$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p} - \lambda \cdot \mathfrak{a} - \mu \cdot \mathfrak{b}$$

Es ist ausreichend, die 2. dieser Gleichungen weiter zu verfolgen. Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gibt

$$0 = \mathfrak{a}\mathfrak{x} - \lambda \cdot \mathfrak{a}^2 - \mu \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$
$$0 = \mathfrak{b}\mathfrak{x} - \lambda \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mu \cdot \mathfrak{b}^2$$

$$\lambda = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{b}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2} = \frac{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2}$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2} = \frac{-[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2}$$

Mit diesen Werten wird

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2 + \mathfrak{a}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,[\mathfrak{b}, \mathfrak{x}] + \mathfrak{b}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2}$$

und somit

$$\sqrt{\mathfrak{y}^2} = \sqrt{\frac{\{(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}) \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^2 + \mathfrak{a} \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}][\mathfrak{b}, \mathfrak{x}] + \mathfrak{b}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}][\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]\}^2}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^4}}$$

Die massgebende Funktion besitzt also hier recht komplizierte Argumente. Glücklicherweise lässt sich noch eine weitgehende Vereinfachung erzielen.

Im Falle a) ist die Einführung räumlicher Polarkoordinaten sehr zweckmässig; denn $\sqrt{\mathfrak{x}^2}$ geht über in r, und somit vermindert sich die Anzahl der Wurzeln um 1. Sucht man nur Kurven, so gehen die oben erwähnten Koordinaten über in gewöhnliche

Polarkoordinaten. Auch die Abstände sind als Parameter günstig. Aus den Gleichungen $\sqrt{\mathfrak{x}^2}=\mathfrak{u}$; $\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})^2} = \mathfrak{v}$; $\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{b})^2} = \mathfrak{w}$; $\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{n})^2} = r$ lassen sich nämlich die Komponenten von $\mathfrak{x}$ bequem berechnen.

Für b) sind Zylinderkoordinaten am Platz; denn $\sqrt{[\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]^2}$ ist äquivalent mit R, und wieder nimmt die Wurzelzahl ab. Den gleichen Effekt erreicht man übrigens mit räumlichen Polarkoordinaten, indem $\sqrt{[\mathfrak{x}, \mathfrak{a}]^2}$ gleichwertig ist mit $r \sin \varphi$.

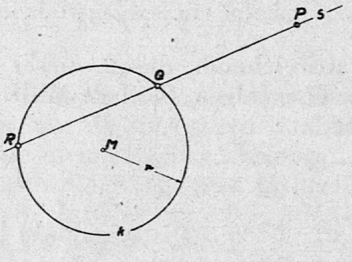
Der Fall c) liegt am günstigsten. Die erste Wurzel ist schon verschwunden, und die 2. kann ebenfalls beseitigt werden. Der Radikand von $\sqrt{\mathfrak{y}_1^2}$ ist nämlich eine quadratische Form in x, y, z. Durch eine lineare Transformation mit der Determinante $+1$ wird dieselbe auf die Form $\pm A^2\bar{x}^2 \pm B^2\bar{y}^2 \pm C^2\bar{z}^2$ gebracht [3]), und nach Einführung von 2 Parametern α, β wird die Wurzel ausziehbar [4]). Nachträglich muss noch z durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ausgedrückt werden, was bei der Voraussetzung über die Determinante immer möglich ist. Soll $\mathfrak{x}$ ein ebener Vektor sein, so sind geringfügige Modifikationen anzubringen.

H. Bieri, Bern.

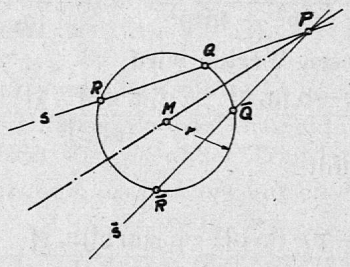
Schüler finden Lösungen

In einer 4. Bezirksschulklasse (9. Schuljahr), welche verschiedene gute mathematische Begabungen aufwies, stellte ich speziell für deren geistige Betätigung folgende Aufgabe:

An einen Kreis k soll von einem ausserhalb liegenden Punkte P eine Sekante s so gezogen werden, dass der äussere Sekantenabschnitt gleich dem Sehnenstück wird.



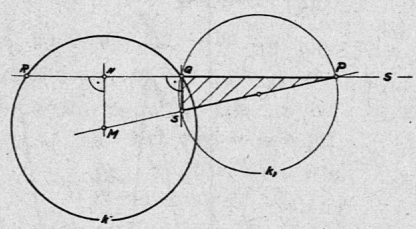
Problem: s so legen, dass PQ = QR wird.



Vorbemerkung:

Das Problem besitzt für alle Annahmen $PM \leqq 3r$ stets 2 Sekanten s und $\bar{s}$, welche die vorgeschriebene Bedingung erfüllen. Aus Symmetriegründen liegen s und $\bar{s}$ axialsymmetrisch zur Zentralen MP als Achse. In der Grenze $PM = 3r$ fallen die beiden mit der Achse zusammen. Die 2. Lösung ist jeweils im Texte angedeutet, zeichnerisch jedoch nicht durchgeführt.

Vorerst wollten wir mit einem Lösungsweg zufrieden sein. Drei Kameraden haben in gemeinsamen Diskussionen folgendes gefunden:

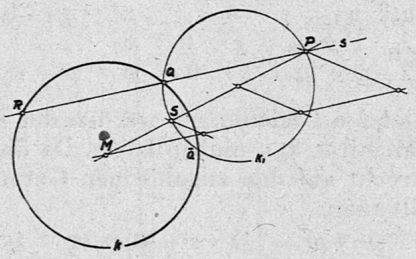


Konstruktionsidee: NQ = NR = ½ PQ daher
PQ = 2 Teile
NQ = 1 Teil ebenso
PS = 2 Teile
MS = 1 Teil
MP ist bekannt; durch Dreiteilung erfolgt die Festlegung des Punktes S. Die eigentliche Konstruktionsidee basiert auf dem rechtwinkligen Dreieck PQS, von dem man:

1. die Hypothenuse kennt und
2. weiss, dass der Scheitel Q des rechten Winkels auf dem Kreise k liegt.

Lösung:

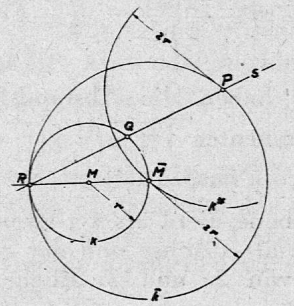
1. Dreiteilung der Strecke MP, wobei $PS = \frac{2}{3}$ MP ist.
2. Thaleskreis k_1 über PS.
3. Schnittpunkte von k & k_1 liefern Q & $\bar{Q}$.
4. Verbindungsgerade PQ = gesuchte Sekante s.
   Verbindungsgerade $P\bar{Q}$ = Sekante $\bar{s}$ (2. Lösung!)



Nach eingehender Besprechung und allgemein gewalteter Diskussion versicherte ich den Schülern, dass mir noch 4 weitere Lösungswege bekannt seien und ermunterte sie dadurch zu geometrischen Entdekkungsfahrten. Um die Kräfte nicht in alle Richtungen dispergieren zu lassen, gab ich ihnen den Ratschlag, sich sowohl der Hilfsmittel der Symmetrie wie des Satzes über die Mitten von Sehnen, welche vom selben Peripheriepunkt ausgehen, zu bedienen.

Unsere Entdeckungsfahrt hatte Erfolg. Ein Schüler konnte dank einiger Mithilfe des älteren Bruders eine weitere Lösungsart vorweisen.

Ihr zugrunde liegt der Satz: Die Mitten sämtlicher Sehnen eines Kreises $\bar{k}$ mit dem Radius $\bar{r}$, welche von demselben Punkte R der Kreisperipherie ausgehen, liegen auf einem Kreise k mit dem Radius $r = \bar{r}/2$, welcher $\bar{k}$ von innen in R berührt.



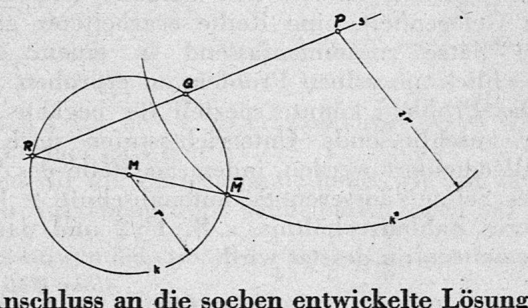
Die Konstruktionsidee beruht auf der Einbettung dieses Satzes in unser Problem. Anhand der Analysisfigur stellen wir fest:

Vom festzulegenden Kreise $\bar{k}$ kennen wir:

1. den Radius $\bar{r} = 2r$;
2. den Punkt P der Peripherie;
3. einen geometrischen Ort für die Lage des Mittelpunktes $\bar{M}$, nämlich die Kreisperipherie k;
4. $P\bar{M} = \bar{r} = 2r$.

Auf Grund dieser Gedankenentwicklungen können wir den Lösungsgang folgendermassen fassen:

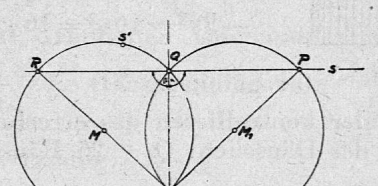
1. Kreisbogen k^* mit Radius $\bar{r} = 2r$ und Mittelpunkt P.
2. Der eine Schnittpunkt der beiden Kreise k^* und k sei $\bar{M}$ = Mittelpunkt von $\bar{k}$ (der andere führt zur 2. symmetrischen Lösung!).
3. Die gemeinsame Zentrale $M\bar{M}$ schneidet k in R.
4. Die Verbindungsgerade PR ist die gesuchte Sekante s.



Im Anschluss an die soeben entwickelte Lösung besprachen wir nochmals eingehend Wesen und Bedeutung der axialen und zentralen Symmetrie. Durch einige Hinweise demonstrierte ich den Schülern elegante Möglichkeiten mit deren Hilfe und ermunterte sie zu entsprechenden Versuchen.

Verschiedene Knaben, deren Väter als Ingenieure oder Techniker tätig sind, diskutierten das Problem im Familienkreise und brachten schliesslich die Lösung freudestrahlend mit der Bemerkung, dank der väterlichen Hilfe sei es gelungen.

Die axial-symmetrische Lösung beruht auf folgendem: 2 kongruente sich schneidende Kreise bilden eine axial-symmetrische Figur; Symmetrieachse ist die durch die beiden Schnittpunkte verlaufende Sekante.



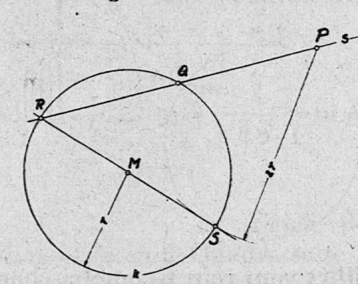
Idee: In der axial-symmetrischen Figur steht PR senkrecht auf der Achse, daher sind die beiden Winkel α und β bei Q je 90^0 und die beiden Sehnen PS und RS Durchmesser der kongruenten Kreise k und k_1.

Die Konstruktionslösung findet sich durch Einbau dieser Figur in unser Problem.

Lösungsgang:

1. Durchmesser des gegebenen Kreises k von P aus nach S abtragen (der entsprechende Punkt S' führt zur 2. Lösung).
2. SM schneidet den Kreis k in R.
3. RP = gesuchte Sekante s.

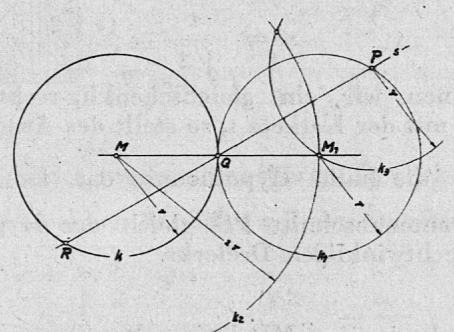
Anmerkung: Der Konstruktionsgang der beiden vorangehenden Lösungen hat denselben Aufbau und durchschreitet die gleichen Phasen. Die dazugehö-



renden Ueberlegungen, sowie die ihnen entsprechenden Mittel jedoch entspringen ganz verschiedenen Motiven.

Die zentralsymmetrische Lösung beruht auf folgendem:

2 kongruente Kreise k und k_1 berühren sich im Punkte Q. Die Figur ist zentralsymmetrisch;



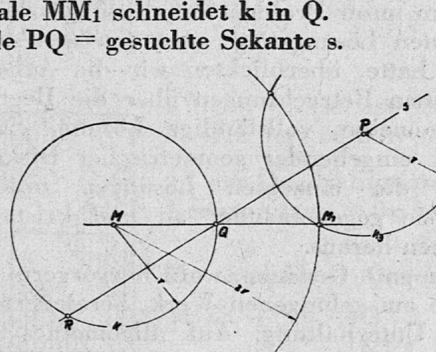
Symmetriezentrum ist Q. Aus allen Sekanten durch Q werden von den beiden Kreisen gleiche Sehnenstücke herausgeschnitten.

Idee: In der Analysisfigur sind k und P gegeben. Zu suchen ist der zu k kongruente Kreis k_1 und damit der Berührungspunkt Q. Der Mittelpunkt M_1 des Kreises k_1 kann als Schnittpunkt zweier geometrischer Oerter festgelegt werden.

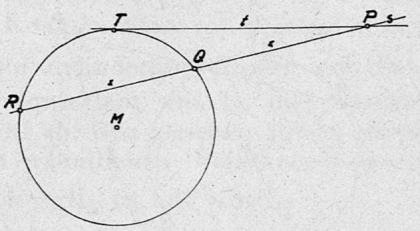
Wir ziehen den zu k konzentrischen Hilfskreis k_2 mit dem Radius $r_2 = 2r$ und den Hilfskreis k_3 mit dem Radius r und dem Mittelpunkt P. Einer der zwei Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist der Mittelpunkt M_1 des gesuchten Kreises k_1 (der andere Schnittpunkt führt zur 2. Lösung).

Lösungsgang:

1. Kreis k_2 konzentrisch k mit Radius 2r.
2. Kreis k_3 mit Radius r und Mittelpunkt P.
3. Gesuchter Schnittpunkt von k_2 und $k_3 = M_1$.
4. Zentrale MM_1 schneidet k in Q.
5. Gerade PQ = gesuchte Sekante s.



Schliesslich brachte ein Schüler noch eine Lösung, beruhend auf dem Sekanten-Tangentensatz. Diesen Satz, welcher ausserhalb unseres Pensums steht, entwickelte ihm eine Schwester, welche zur Zeit das Seminar besucht. Er erläuterte denselben und entwickelte wie folgt:



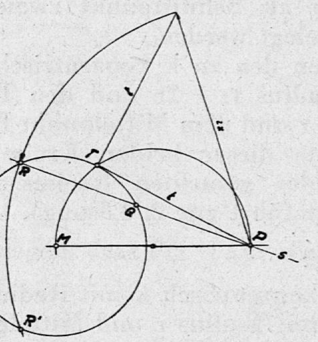
Der Weg führt vom rein Geometrischen zum Hilfsmittel der algebraischen Berechnung, durch welche die Konstruktion gewährleistet wird.
Es ist der Tangentenabschnitt

$$PT = t$$
$$PQ = QR = x$$
$$x \cdot 2x = t^2 \text{ (Sekanten-Tangentensatz)}$$
$$2x^2 = t^2$$
$$x = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{t \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Zeichnen wir ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete t, so stellt der Ausdruck $x = \frac{t \cdot \sqrt{2}}{2}$ die halbe Hypothenuse dar. Es wird also der Sekantenabschnitt PR gleich der Hypothenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks.

Lösung.

1. Thaleskreis über MP liefert den Tangentenberührungspunkt T und damit die Grösse des Tangentenabschnittes t.
2. Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit t als Kathete.
3. Hypothenuse = PR, womit die gesuchte Sekante s gefunden ist (PR' liefert die 2. Lösung).



Nachdem unser Problem durch die Darlegung der verschiedenen Lösungswege eine gewisse Abrundung gewonnen hatte, überblickten wir die Arbeit nochmals, spannen Betrachtungen über die Begriffe spezielle, allgemeine, vollständige Lösung, erläuterten den Zweck eingehender geometrischer Diskussionen, verglichen die einzelnen Lösungen miteinander, schätzten sie gegeneinander ab und kristallisierten die eleganten heraus.

Mancher gute Gedanke, wohl hervorgerufen durch die Freude am gelungenen Werk, bereicherte die gegenseitige Unterhaltung. Auf allgemeines Interesse stiess ganz besonders folgende Schülerbemerkung. Ein Knabe meinte, es sei ihm schon oft aufgefallen, dass die einfachsten und elegantesten Lösungswege im allgemeinen erst zuletzt und nach Ueberwindung komplizierter Gedankengänge sich finden lassen. Diese Tatsache besteht. In der Einfachheit liegt eine gewisse Vollkommenheit, die gewöhnlich nicht direkt, sondern erst auf verschiedensten Umwegen erreichbar wird. Ich erinnere mich dabei eines anregenden Gesprächs, das ich während des Aktivdienstes an einem Winterabend mit dem derzeitigen Vorsteher einer kunsthandwerklichen Schule führte. Er, ein begabter Künstler, versicherte mir, die Vollendung eines Werkes wäre für ihn nicht anregend, würde er auf direktestem Wege zur Schlussform gelangen. Nur die mühevolle Ueberwindung von Schwierigkeiten, wie sie sich auch normalerweise einstellen, vermöge ihn im künstlerischen Schaffen zu befriedigen. Diese Prinzipien haben auch in der Mathematik beim Suchen nach Lösungen ihre volle Gültigkeit.

Das ziemlich umfassende Durchdenken der gestellten Aufgabe liess uns diesen Gesichtspunkt an eigener Arbeit erleben. Es eröffnete uns Schönheiten und Entdeckerfreuden, in die auch interessierte Familienkreise Einblick fanden. Die Aufgabe verschaffte zudem Gelegenheit, eine Reihe erarbeiteter geometrischer Sätze zusammenfassend in einem gewissen Ueberblick am selben Problem zu erproben.

Das Problem könnte speziell für begabte Schüler oder anschliessende Unterrichtsstufen noch weiter verallgemeinert werden, indem an Stelle des Verhältnisses Sehne : äusseren Sekantenabschnitt = 1 : 1 ein anderes Zahlenverhältnis, z. B. 1 : 2 und dann ganz allgemein m : n gesetzt wird.

Albin Walti, Baden.

Thema mit Variationen

(Schluss) (Siehe in Nr. 4/1948 der SLZ den I. Teil.)

II. Aufgabengruppe: Sechsecke verschiedener Breite.

Wir variieren die *Breite* des Streifens.

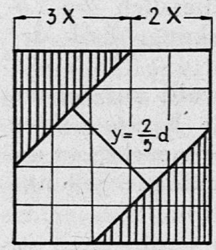


Fig. 10

Beispiel:

$$\text{Sechseckbreite} = y = \frac{2}{5}\,d$$

$$S = Q_1 - Q_2 = (5x)^2 - (3x)^2 = 25x^2 - 9x^2 = 16x^2 = 16 \cdot \frac{1}{25}\,s^2 = \frac{16}{25}\,s^2$$

Die Schüler kontrollieren das errechnete Resultat auf Grund der Häuschen: $Q_1 = 25$ Häuschen, $S = 16$ Häuschen.

Jedem Schüler teilen wir eine besondere Breite zu. Die Lösungen verwenden wir zur Aufstellung einer Tabelle:

$$y = \frac{d}{2},\ \frac{d}{3},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{5},\ \frac{d}{6} \qquad \frac{d}{n}$$

$$S = \frac{3}{4}s^2,\ \frac{5}{9}s^2,\ \frac{7}{16}s^2,\ \frac{9}{25}s^2,\ \frac{11}{36}s^2,\ \frac{2n-1}{n^2} \cdot s^2$$

Auf Grund der Tabelle lassen wir die Schüler die Formel für den allgemeinen Fall ablesen, wo y der n-te Teil von d ist.

$$y = \frac{d}{n}, \quad S = \frac{2n-1}{n^2} \cdot s^2$$

Nachfolgend deren geometrische Ableitung:

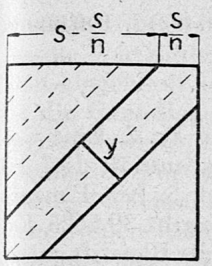


Fig. 11

$$S = Q_1 - Q_2$$
$$= s^2 - \left(s - \frac{s}{n}\right)^2 = s^2 - \left(s^2 - \frac{2\,s^2}{n} + \frac{s^2}{n^2}\right)$$
$$s^2 - s^2 + \frac{2\,ns^2 - s^2}{n^2} = \frac{2\,n - 1}{n^2} \cdot s^2$$

Für die Fälle, wo $y = \frac{2}{3}\,d, \frac{3}{4}\,d, \frac{7}{10}$ d, usw. ist, gilt folgende allgemeine Formel:

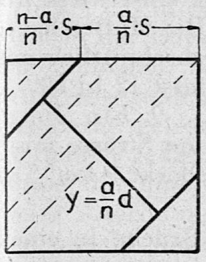


Fig. 12

$$S = Q_1 - Q_2 = s^2 - \left(\frac{n - a}{n} \cdot s\right)^2$$
$$= s^2 \cdot \left[\frac{n^2 - (n^2 - 2\,a\,n + a^2)}{n^2}\right]$$
$$= \frac{2\,an - a^2}{n^2} \cdot s^2$$

Setzen wir für $a = 1$, so erhalten wir $\frac{3n - 1}{n^2} \cdot s^2$, also die Formel zu Figur 11.

Wollten wir die Zerlegungsmethode, wie wir sie in der ersten Aufgabengruppe geübt haben, auch auf die Sechsecke anwenden, wo $y = \frac{1}{4}\,d, \frac{1}{5}\,d, \frac{2}{5}$ d, usw. ist, so erhielten wir ein Uebungsmaterial, das kaum auszuschöpfen wäre.

III. Aufgabengruppe: Sechseckumfänge.

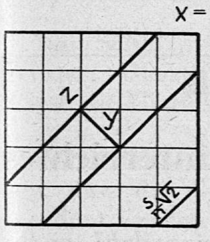


Fig. 13

$$U = 4x + 2z$$

B e i s p i e l : Fig. 13, $y = \frac{1}{5}$ d.

$$U = 4x + 2z = 4 \cdot \frac{s}{5} + 2 \cdot 4y =$$
$$\frac{4}{5}\,s + 8 \cdot \frac{d}{5} = \frac{4 + 8\sqrt{2}}{5} \cdot s$$

Weitere Beispiele: $y = \frac{3}{4}\,d, \frac{2}{5}\,d$, usw. Kontrolle der Ergebnisse auf Grund der Anschauung: Eine Häuschenseite $= \frac{s}{n}$, eine Häuschendiagonale $= \frac{s}{n}\sqrt{2}$ (siehe Fig. 13).

Allgemeine Lösung:

Wenn $y = \frac{a}{n} \cdot d$, so wird $x = \frac{a}{n} \cdot s$

und $z = \frac{n - a}{n} \cdot d$

Wenn wir die Figuren 12 und 13 betrachten, so taucht die Frage auf nach der obern und untern Grenze für den Sechseckumfang. Was wird aus $U = 4x + 2z$, wenn y grösser, resp. kleiner wird?

Für $y = d$, wird $x = s$ und $z = 0$. Für $y = 0$, wird $x = 0$ und $z = s\sqrt{2}$

$$4s > U > 2s \cdot \sqrt{2}$$

In diesen Zusammenhang gehört auch die Frage nach der Konstruktion des *gleichseitigen* Sechsecks, das einem Quadrat eingeschrieben ist. (Siehe Gassmann und Weiss, III. Teil, Seite 27, Nr. 13.)

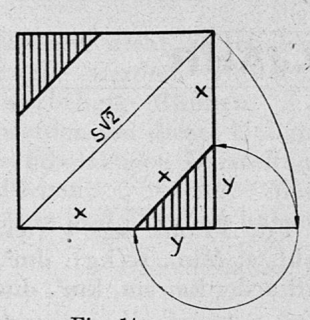


Fig. 14

Im schraffierten Dreieck ist $x = y. \sqrt{2}$. Also gilt für die Quadratseite:

$$s = x + y = y \cdot \sqrt{2} + y$$
$$= y\,(\sqrt{2} + 1)$$
$$y = \frac{s}{\sqrt{2} + 1} = s\,(\sqrt{2} - 1) =$$
$$s\sqrt{2} - s$$

y ist gleich der Differenz aus Quadratdiagonale und Quadratseite (Fig. 14).

IV. Aufgabengruppe: Die Sechseckfläche ist gegeben.

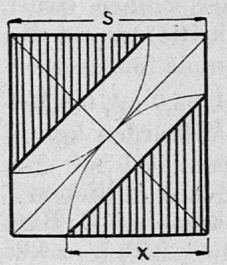


Fig. 15

Die Sechseckfläche ist gegeben, ausgedrückt in s^2. Das Sechseck ist zu konstruieren.

B e i s p i e l : (Fig. 15)

$$S = \frac{1}{2}\,s^2$$

Wenn $S = \frac{1}{2}\,s^2$, so ist das Quadrat, gebildet aus den schraffierten Dreiecken auch $\frac{1}{2}\,s^2$. Wir berechnen die Seite x dieses Quadrates:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot s^2} = s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

x wird gleich der halben Quadratdiagonale.

Ist $S = \frac{1}{4}\,s^2$, so wird x gleich der Höhe im gleichseitigen Dreieck über der Quadratseite, usw.

Wenn $S = \frac{a}{n}\,s^2$, so wird allgemein

$$x = s \cdot \sqrt{\frac{n - a}{n}}$$

V. Aufgabengruppe: Kombination der vorhergehenden Gruppen.

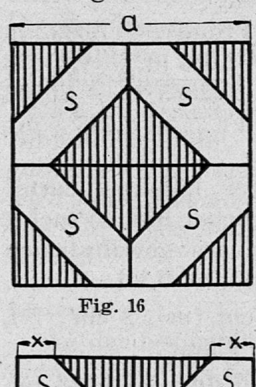


Fig. 16

a) Man konstruiere Figur 16 so, dass die Fläche des weissen, Bandes (4 S) gleich der halben Quadratfläche wird.

$$S = \frac{a^2}{8} = x^2$$
$$x = \sqrt{\frac{a^2}{8}} = a \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

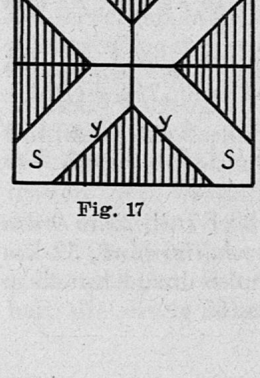


Fig. 17

b) Um wieviel ist der Umfang der Kreuzfigur grösser als der Quadratumfang? $x = \frac{s}{6}$

Kreuzumfang $= 8x + 8y$
$= 8x + 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x$

Kreuzumfang – Quadratumfang
$= 8x + 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x - 24x =$
$16\sqrt{2} \cdot x - 16\,x$
$= 16x(\sqrt{2} - 1) =$
$\frac{8}{3}\,(\sqrt{2} - 1)\,s = 1{,}10456 \cdot s$

E. Lauffer, Winterthur.

6. SCHULJAHR

Dezimalbrüche

Einführung

Uebe fleissig: 0,1 l, km, Fr., Pfund, kg, t (q), m (cm), Std., m^2, dm (cm), hl, a, Min., t (kg), dm^2, Million, m (mm), q, cm^2, Milliarde, ha, cm, km^2, dm (mm) Ries, Tg.

Beispiel: 0,1 Million = $^1/_{10}$ Million = 100 000, auch mit 0,5, 0,01, 0,03 usw. 0,001, 0,007 usw., wo es einen Sinn hat.

Lies folgende Dezimalbrüche in anderer Form! (Damit du die Dezimalbrüche sicher kennen lernst, musst du anfänglich immer 3 Schritte tun, z. B.: 5,1 kg = 5$^1/_{10}$ kg = 5 kg 100 g.)

1. 2,3 l, 13,5 km, 54,7 Fr., 1,8 Pfund, 95,9 m^2, 0,6 Millionen Fr., 7,8 dm^2, 546,9 hl, 0,2 Milliarden kg, 0,1 Std., 2,4 Ries, 0,7 Minuten.
2. 3,02 kg, 1,07 Pfund, — 4,08 p, — 2,01 Millionen l, — 5,09 a, — 8,04 dm, — 7,09 km, — 2,03 Ries, — 0,06 Std., — 3,07 Milliarden t, — 9,01 l, — 4,05 km^2.
3. 4,005 km, — 2,008 t, — 1,003 Millionen Fr., — 7,004 m^2, — 8,007 kg, — 9,006 m, — 3,001 Fr., — 1,002 Pfund, — 0,005 Milliarden Fr., — 5,001 q, — 3,009 a, — 2,007 hl.
4. 1,25 Fr., — 5,37 km, — 3,98 kg, — 7,56 Millionen, — 8,72 m, — 1,15 Pfund, — 4,69 hl, — 9,43 m^2, — 0,94 Milliarden, — 4,76 dm^2, — 3,58 ha, — 0,25 Std. (? Sek.).
5. 3,476 km, — 4,375 Fr., — 7,100 l, — 5,047 kg, — 1,906 Millionen, — 9,038 m^2, — 6,805 t, — 0,125 Milliarden, — 7,200 km^2, — 4,509 m, — 7,608 Fr., — 1,380 hl.

Knacknüsse

(Wenn du aber weisst, wievielteilig die Maße sind, dann wird es dir nicht schwer fallen, die niederen Sorten zu ermitteln. Beispiel: 3,5734 ha = 3 ha, 57 a, 34 m^2.

6. 1,703 m, — 0,4536 kg (1 engl. Pfund), — 7,0852 q, — 1,6093 km (1 engl. Meile), — 2,065 hl, — 9,25378 ha, — 0,9144 m (1 Yard), — 5,62835 t, — 4,0508 km^2, — 9,0531 Millionen Fr., — 2,753 m^2, — 3,0076 km.

Lies als Dezimalbruch in der höheren Sorte! (Wenn du deiner Sache nicht sicher bist, so suchst du als Bindeglied die Form des gewöhnlichen Bruches. Beispiel: 3 dl = $^3/_{10}$ l = 0,3 l.

7. 7 dl, 5 Rp., 8 m, 6 q, 9 g, 3 cm (m), 2 cm^2, 7 l, 5 cm (dm), 3 dm^2, 4 mm (m), 9 mm^2.
8. 25 m, 39 Rp., 17 g, 41 cm, 76 dm^2, 94 l, 28 m^2, 52 kg (t), 83 cm^2, 65 mm (m), 18 kg (q), 27 mm (dm).
9. 529 Rp., 137 l, 208 m, 751 g, 302 q, 912 cm, 435 dm^2, 840 mm, 693 a, 205 dl, 534 mm^2, 750 g (Pfd.).
10. 3 l 5 dl, 3 km 5 m, 3 Fr. 5 Rp., 4 kg 17 g, 4 m 17 cm, 7 t 9 q, 7 kg 9 g, 7 hl 9 l, 5 a 20 m^2, 5 m 20 mm, 5 dm 20 cm.
11. 9 Fr. 6$\frac{1}{2}$ Rp., 14 kg 25 g, 6 hl 80 l 7 dl, 25 m 9 dm 3 mm, 8 t 6 q 27 kg, 3 dm^2 4 cm^2 56 mm^2, 32 km 8 m, 7 m^2 81 dm^2 9 cm^2, 3 a 5 m^2 6 dm^2, 1 km 45 m 38 cm, 2 q 7 kg 90 g, 8 t 13 kg 65 g.
12. Lies als Million: 300 000 Fr., 3 700 000 l, 190 000 t, 6000 kg, 4 080 000 hl, 51 000 km.

Klausuren

1. Eine Brücke kostet 2,3 Millionen Fr. 2. Eine Gemeinde misst 9,457 km^2. 3. Ein Fass enthält 15,7 hl Wein. 4. Eine Kiste wiegt 37,8 Pfund. 5. Ein Panzerwagen wiegt 60,7 t. 6. Ein Resultat ergibt 39,5625 Fr. 7. Ein Wald bedeckt 32,043 ha. 8. Dein Bleistift misst 1,7 dm. 9. Ein Flugzeug wiegt 28,34 t. 10. Eine Strasse misst 25,0653 km. 11. Eine Stadt schuldet 5,03 Millionen Fr. 12. Vronis Schulweg dauert 2,5 Min.

Hansens Schulweg misst 2 km 38 m 7 dm. 2. Ein Krug fasst 2 l 7$\frac{1}{2}$ dl. 3. Eine Ladung Obst wiegt 8 t 3 q. 4. Ein Acker misst 26 a 7 m^2. 5. Die Mutter kauft 600 g Schinken. 6. 1 l Wein wird durchschnittlich mit 2 Fr. 5$^1/_2$ Rp. berechnet. 7. Ein Fass fasst 12 hl 60$^1/_2$ l. 8. Ein Paket wiegt 100 g (? Pfd.). 9. Ein Junge schwimmt 12$^1/_4$ Minuten lang. 10. Eine Strasse misst 7 km 9 m 85 cm. 11. Ein Gletscher bedeckt 9 km^2 5 a. 12. Ein Stecken misst 1 m 7 mm.

Verwandle folgende gewöhnliche Brüche in einen Dezimalbruch, indem du sie zuerst in $/_{10}$, $/_{100}$, $/_{1000}$, $/_{10000}$ erweiterst!

1. $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_8$, $^1/_{20}$, $^1/_{25}$, $^1/_{40}$, $^1/_{50}$, $^1/_{80}$, $^1/_{125}$, $^1/_{200}$, $^1/_{500}$.
2. $^3/_4$, $^4/_5$, $^7/_8$, $^{11}/_{20}$, $^7/_{25}$, $^3/_{40}$, $^{19}/_{50}$, $^3/_{80}$, $^7/_{125}$, $^9/_{200}$, $^{13}/_{250}$, $^{47}/_{500}$.

Kürze die folgenden Brüche zuerst und lies sie dann als Dezimalbruch!

3. $^{12}/_{24}$, $^{15}/_{60}$, $^{25}/_{125}$, $^{18}/_{144}$, $^{25}/_{250}$, $^{20}/_{400}$, $^7/_{175}$, $^9/_{360}$, $^{15}/_{750}$, $^4/_{320}$, $^7/_{875}$, $^3/_{600}$, $^{18}/_{24}$, $^{50}/_{125}$, $^{60}/_{75}$, $^{36}/_{96}$, $^{45}/_{72}$, $^{126}/_{144}$, $^{168}/_{240}$, $^{24}/_{160}$, $^{49}/_{350}$, $^{15}/_{400}$, $^6/_{375}$, $^{36}/_{800}$.

Werner Niederer, Teufen.

UNTERSTUFE

Zum Anfang des Rechenunterrichtes

Die Anzahl

In der Welt der Dinge gibt es keine *Zahl*, in ihr gibt es nur *Anzahlen*. In der Welt der Erscheinungen steht ein Ding *neben* dem andern. Erst eine am primitiven Erfassen gemessen weit fortgeschrittene Entwicklung der geistigen Fähigkeit des Vergleichens, Unterscheidens und Verknüpfens ermöglicht das Erkennen des Gleichartigen und Gegensätzlichen, des Verbindenden und Trennenden. Und erst auf dieser Stufe der geistigen Entwicklung kann der Mensch, fortschreitend vom blossen *Anschauen* zum *Ueberschauen*, das heisst zum Erfassen dieser besondern Zusammengehörigkeit auf Grund gleichartiger Erscheinungsformen, zum Erfassen der Anzahl gelangen. Nach der ursprünglichen Feststellung: Hier eine Tulpe und noch eine Tulpe, und noch eine Tulpe... bezeichnet er nun jede Stufe des erweiterten «Ueberschauens» mit einem besondern Namen, dem Zahlwort. Die Tatsache, dass die Primitiven zum Teil nicht über drei, vier oder fünf hinausgekommen sind, bezeugt, dass erst nach einem langen Entwicklungsweg die Stufe der fortgeschrittenen Völker erreicht worden ist, die sich alle ihre Zahlwortreihe geschaffen haben.

Im Besitze dieser Zahlwortreihe führen wir unsere Kinder nun in das Reich der Zahlen ein. Wir lassen sie dabei, entsprechend ihrer geistigen Entwicklung, zunächst immer und immer wieder *Anzahlen* auffassen. Wir zählen alles Mögliche; was das Schulleben an Gelegenheit bietet, wird ausgeschöpft. Das *Zählen* ist die Grundlage der Zahlbildung und des Rechnens. Logischerweise kann die Feststellung der *Anzahl* ursprünglich nur geschehen durch die tatsächliche oder geistige Aneinanderreihung der Erscheinungsformen: dem Nebeneinander der Dinge entspricht ein Nacheinander der Auffassung; die der geistigen Tätigkeit des aneinanderreihenden Ordnens entsprechende *Darstellung* ist daher die *Reihe*.

Wir werden deshalb mit Vorteil überall dort, wo die natürliche Möglichkeit besteht, *das ordnende Prinzip*, das in der Zahlenreihe zum Ausdruck kommt, auch in der Darstellung in Erscheinung treten lassen: Die Stäbchen, Scheibchen, Knöpfe, Steinchen, Margritli, die geformten Kirschen... sie alle werden in die Reihe gelegt, die Klebscheibchen werden meist in Reihen geklebt. Stempeln wir jedoch in die grüne Wiese die humpelnden Hasen, dann werden sie in freier Anordnung hineingesetzt, was die Feststellung der Anzahl wesentlich erschwert. Es wird also nicht gleichgültig sein, auf Grund welcher Darstellung und auf welche Art und Weise wir die Anzahl feststellen lassen; wir haben dabei verschiedene Schwierigkeitsstufen zu beachten.

Entsprechend der sinngebundenen Erkenntnisfähigkeit des Kindes und dem ihm eigenen Spiel- und Tätigkeitstrieb werden wir die Zählübungen zunächst an solchen Dingen vornehmen, mit denen es *handeln*, die es fassen, hinlegen, verschieben, «begreifen» kann, das heisst: für die ersten Zählübungen brauchen wir

konkrete Dinge:

Im Schulzimmer werden die Kinder, Bänke, Fenster, Bleistifte, Farbstifte... gezählt; auf der Wiese die Gänseblümchen, Löwenzahnblumen, Bäume ... u. a. m.

Dabei sollte der Zählakt zunächst so gestaltet werden, dass die Gegenstände aufgenommen, hingelegt, geordnet werden können.

Schon bedeutend grössere Schwierigkeiten bereitet die Feststellung der Anzahl festgeordneter Gegenstände wie Bänke, Fenster, Bilder..., aber auch der Bleistifte, Gummi usw., die nur noch *betupft* werden dürfen. Liegen diese Dinge in der Reihe oder in einer geometrisch klar gegliederten Anordnung, so fällt dem Kinde ihre Auffassung und gleichzeitige Belegung mit dem entsprechenden Zahlwort wesentlich leichter, als wenn sie beliebig, unregelmässig im Raume verstreut liegen.

Die nächste Stufe umfasst Uebungen mit

gegenständlichen Symbolen:

Die runden Kartonscheibchen stellen Bälle, Kirschen, Aepfel dar, ... die Stäbchen Bäume, Menschen, Pfosten... Statt wirklicher Blumen verwenden wir die Klebe-Blumenbildchen usw. Wieder steigern wir die Auffassungsschwierigkeiten durch die geordnete oder ungeordnete Placierung, durch die geordnete oder ungeordnete feste, unverrückbare Darstellung, indem wir sie für eine Klebearbeit verwenden.

Die nicht körperhaften, also gezeichneten *Dinge*

zu zählen, stellt an die Auffassungs- und Erkenntniskraft der Kleinen noch grössere Anforderungen. Sie können nicht verschoben, sie können nur noch betupft werden. Einfach gezeichnete Gegenstände: Körbchen, Blumen, Katzen... Striche, Kreise... werden bei dieser Uebungsstufe vor den abstrakteren, symbolartigen Darstellungen (Ringe = Blumen, Bälle, Birnen... Striche = Menschen, Bäume...) den Vorrang und Vorgang haben.

Die zeitlichen Erscheinungsformen

bereiten die grössten Schwierigkeiten; sowohl Klang als Bewegung vergehen, entfliehen. Ihre zahlenmässige Erfassung verlangt ein Mass von Aufmerksamkeit, das erst nach längerer Erziehung und mehrfacher Uebung erreicht werden kann.

Als abstraktestes Symbol für die Anzahl tritt nach erst längerer Beschäftigung mit den oben angeführten Veranschaulichungsmitteln

die Ziffer

auf. Sie darf aber erst eingeführt werden, wenn das Kind durch hundertfältige und verschiedenartige Beschäftigung mit der Anzahl zur Erfassung der einfachsten *Beziehungen* in der Zahlenreihe vorgestossen ist, mit andern Worten, wenn die einzelne Anzahl nicht mehr für sich abgesondert ein Eigenleben führt, sondern zur *Zahl* geworden ist, indem sie in ganz bestimmter, das heisst *mathematischer Beziehung* zu andern Anzahlen steht.

Die Erarbeitung dieser *Beziehungen* ist die zweite grosse Aufgabe des ersten Rechenunterrichtes.

E. Bleuler, Küsnacht.

Kantonale Schulnachrichten

Aargau

Aargauische Schulbibliothek. Die vor einigen Jahren durch Zusammenlegung der elf Bezirkskonferenz-Bibliotheken geschaffene und der Kantonsbibliothek in Aarau angeschlossene Aargauische Schulbibliothek zählte auf Jahresende 1947 gegen 8400 Bände. Fast sämtliche Abteilungen wurden weiter ausgebaut, vor allem jene der eigentlichen pädagogischen Literatur. Die Benützung der Bibliothek durch die Lehrerschaft des Kantons war wiederum sehr rege, wenn auch ein leichter Rückgang gegenüber den Vorjahren festzustellen ist. Jede Lehrkraft bezahlt im Jahr 1 Franken Bibliothekgebühr, die von der Januarbesoldung abgezogen wird, womit aber auch das Recht erworben wird, die gesamte Kantonsbibliothek zu benützen, was für «gewöhnliche Sterbliche» 3 Fr. im Jahr kostet. *-nn.*

Luzern

An der bevorstehenden Frühjahrsversammlung soll die von über 100 Kollegen unterzeichnete Eingabe zur *Schaffung eines ständigen Sekretariates* des kantonalen Lehrervereins behandelt werden. Die 1945 eingereichte Eingabe wurde mit der Stellungnahme des Vorstandes den Sektionen zur Besprechung unterbreitet. Wichtigkeit und Grösse gegenwärtiger und künftiger standespolitischer Aufgaben, Kontinuität in der Vertretung dieser Angelegenheiten und Konzentration der Vorstandsarbeit würden die Anstellung eines ständigen Sekretärs für einen Berufsverband mit über 700 Mitgliedern rechtfertigen. Da die Schaffung eines vollamtlichen Sekretariates finanziell nicht tragbar, die eines nebenamtlichen unbefriedigend wäre, ein Teil der standespolitischen Probleme bereits erledigt oder in Behandlung und die Kontinuität in der Bearbeitung der Standesfragen durch die langjährige Mitarbeit verschiedener Vorstandsmitglieder gesichert sei, empfiehlt der Vorstand Ablehnung des Antrages.

Der Meinungsaustausch über solche Fragen ist recht fruchtbar und führt zu grundsätzlichen Auseinandersetzungen über unsere Standesinteressen. Da man in guten Treuen einen ablehnenden wie einen zustimmenden Standpunkt einnehmen kann, ist es falsch, mit Schlagwörtern in die Diskussion einzugreifen. In der «Schweizer Schule» vom 1. März 1948 wird den Befürwortern vorgeworfen, sie liessen sich von dieser Frage «faszinieren. — Materialistische Erwägungen schienen da und dort bessere Einsicht zu verdunkeln. — Ein Lehrer, der es mit seinem Stande gut meine und volksverbunden bleiben wolle, werde ablehnende Stellung beziehen.»

Trotzdem auch der Berichterstatter mit der ablehnenden Stellungnahme des Vorstandes einig geht, möchte er doch den Ton solcher Ausfälle gegen Kollegen, die es sicher mit unserem Stande gut meinen, kritisieren. *psp.*

Am 28. Februar wurde in Luzern ein *Kantonalverband für Gewerbeunterricht* gegründet, der die Förderung der gewerblichen Berufsbildung und die Zusammenarbeit mit den Berufsverbänden bezweckt. Herr M. Tröndle, Rektor der Gewerbeschule der Stadt Luzern, der in Verbindung mit der Rektorenkonferenz der Gewerbeschulen des Kantons die Gründung umsichtig vorbereitet hatte, wurde zum Präsidenten gewählt. Dem Verband gehören 140 haupt- und nebenamtliche Lehrkräfte an. *psp.*

Schaffhausen

Wenn man sich im Randenkanton allmählich auf den Schuljahresschluss rüstet, versammeln sich die Lehrer in der Metropole in ordentlicher Generalversammlung zur Erledigung der obligatorischen Vereinsgeschäfte. Der Vorstand, an der Spitze der gewandte Versammlungsleiter, Professor *Hugo Meyer*, konnte am 28. Februar ein stattliches Auditorium begrüssen. Ernste Worte wiesen auf die politische Hochspannung im europäischen Osten hin.

Der kurz gefasste Jahresbericht des Vorsitzenden erwähnte u. a. die Lohnfrage. Die Vereinsexekutive musste nur in einem Falle eingreifen, wobei sie erreichte, dass eine Landgemeinde den Anteil der Teuerungszulagen an die Elementarlehrer übernahm. Der Rechtsschutz für einen Kollegen war Gegenstand von Beratungen im Schosse des Vorstandes. Das Kassawesen weist eine Vermögensverminderung von 93 Franken auf, weshalb der Jahresbeitrag auf zehn Franken erhöht wurde. Erziehungsrat *Albert Steinegger*, Reallehrer in Neuhausen, mahnte; dem Fachorgan der schweizerischen Lehrerschaft gleichwohl treu zu bleiben. Neu in den Vorstand wurde gewählt Kollege *Wunibald Beck* (Schaffhausen).

Die allgemeine Aussprache beschäftigte sich in der Hauptsache mit dem Seminar. Erziehungsrat *Albert Hug*, Lehrer in Ramsen, bezeichnete es als eine betrübende Erscheinung, dass die Abiturienten sich nicht dem Elementarlehrerberuf widmen wollen. Für ihn liegt der Hauptgrund dafür in der Vorschrift des Rucksackjahres, während Schulinspektor Dr. *Georg Kummer* und Oberlehrer *August Götz* (Schaffhausen) diesen Gesetzesartikel nicht fallen lassen möchten. Auch Oberlehrer *Arnold Surbeck* (Beringen) würde für die gegenwärtige Zeit von der Erfüllung der Rucksackpflicht absehen. Eine weitere Diskussionsangelegenheit bildete die Auszahlung der Teuerungszulagen an die Elementarlehrer durch die Gemeinden. Es besteht eine Unklarheit in den betreffenden Bestimmungen. Um sich darüber Gewissheit zu verschaffen, wurde der Vorstand beauftragt, sich durch einen Rechtskonsulenten ein Gutachten zu verschaffen. Zum Abschluss der Tagung referierte noch Kollege *Ernst Schwyn*, Reallehrer in Schaffhausen, über den Zusammenhang der Pensionskasse mit der AHV. *E. W.*

St. Gallen

Aus den Verhandlungen des Vorstandes KLV St. Gallen

Sitzungen vom 7., 14. und 20. Februar 1948

Anpassung der Lehrerpensionskasse an die AHV. An den drei Sitzungen wurde die Frage, die schon seit einem Jahr beraten worden ist, erneut mit aller Gründlichkeit geprüft und beraten. Die ursprüngliche Auffassung des Vorstandes, dass Lehrerpension und AHV-Renten gesondert und jede in vollem Umfange auszurichten sei, musste korrigiert werden, da sie verschiedene grosse Mängel aufwies: Die Witwenrente ist absolut ungenügend, die Invalidität ist viel zu wenig berücksichtigt, die Lehrerinnen bekämen nach ihrer Pensionierung im sechzigsten Altersjahr bis zum fünfundsechzigsten Altersjahr eine unzureichende Rente. Die in den nächsten zehn Jahren in den Ruhestand tretenden Lehrkräfte bekämen im Verhältnis zu den Lebenskosten und zum Gehalt eine zu kleine Altersrente. Alle diese Momente haben den Vorstand bewogen, sein ursprüngliches Projekt fallen zu lassen und einer Verkoppelung und einem Ausgleich: Lehrerversicherungskasse-AHV zuzustimmen. Auf Grund von ausführlichen Referaten und Unterlagen des versicherungstechnischen Beraters, Herrn Professor Dr. Widmer, St. Gallen, und nach Fühlungnahme mit der Verwaltungskommission der Versicherungskasse wurde einem Projekt zugestimmt, das in allen Sektionen den Mitgliedern vorgelegt werden soll. Die Abstimmung darüber wird den Weg für die weitere Behandlung ergeben. Die Kreditvorlage soll in der Maisession vor den Grossen Rat gebracht werden.

Teuerungszulagen 1948. Die Eingabe des Vorstandes an den Erziehungsrat hat bei den Mitgliedern grosse Befriedigung ausgelöst. Es ist zu hoffen, dass die massgebenden Behörden dem wohlbegründeten Verlangen des KLV Verständnis entgegenbringen.

Weiterbildung der Lehrerschaft. Nachdem der KLV die Weiterbildung der Lehrerschaft belebt und angespornt hat, übernahm nun das Erziehungsdepartement einige Programmpunkte des KLV und beabsichtigt, im Laufe des Jahres obligatorische Kurse zur Einführung in die neuen Rechenlehrmittel für die Unterstufe und Abschlussklassen der Primarschulen durchzuführen. Der Vorstand bedauert, dass man zum Obligatorium gekommen ist, und dass nicht der KLV, wie er es beabsichtigt hat, diese Kurse durchführen kann.

Jahresaufgabe 1947. Die Protokolle über die Sektionsversammlungen, an denen über die neuen Lesebücher der Primaroberstufe und besonders über den thematisch aufgebauten Geschichtsunterricht referiert und beraten worden war, sollen als Vernehmlassung der Lehrerschaft der kantonalen Lehrmittelkommission übergeben werden. *N.*

Bezirkskonferenz und Sektionsversammlung Werdenberg. Die Bezirkskonferenz der Lehrerschaft Werdenberg fand unter der Leitung von Sekundarlehrer *Walder,* Wartau, statt. Für den Herbst wurde die Unterstellung der Konferenz unter die dann zu wählende neue Kommission der Sektion der KLV vorgesehen. Eine gründliche Aussprache über die Lehrerbibliothek hatte zur Folge, dass einige konkrete Beschlüsse gefasst wurden, die sicher eine Besserung der Verhältnisse ermöglichen. Den Hauptinhalt der Tagung bildete ein Vortrag von Herrn Dr. *Heinrich Roth,* Lehrer für Psychologie und Pädagogik am Lehrerseminar Rorschach über «Lehrerbildung heute und morgen.» Nach einem geschichtlichen Rückblick in frühere Arten der Lehrerbildung befasste er sich mit den Forderungen, die man heute an die Schulen, somit an den Lehrer und die Lehrerausbildung stellt. Die Untersuchungen haben ergeben, dass die berufstechnische Ausbildung an unsern Lehrerbildungsanstalten gegenüber der Allgemeinbildung zu kurz kommt. Diese Allgemeinbildung darf aber nicht beschnitten werden. So bleibt nur noch der Ausweg über eine Verlängerung der Seminarzeit um mindestens ein Jahr. Aus klarer Erkenntnis der praktischen Verhältnisse heraus befürwortet er auch für unsern Kanton die Verlängerung der Primarlehrerausbildung auf fünf Jahre und eine Teilung in Unter- und Oberseminar.

Dem vorzüglichen Referat schloss sich eine rege Aussprache an.

Kurze Zeit darauf fand eine ausserordentliche Versammlung der Sektion Werdenberg KLV unter der Leitung von H. Eggenberger, Oberschan, statt. Referent war der Kantonalpräsident Vorsteher *Emil Dürr,* St. Gallen. Er sprach über die Verbindung Lehrerversicherungskasse mit AHV und legte zur Beschlussfassung ein Projekt des Vorstandes vor. Nach gewalteter Aussprache wurde ihm zugestimmt. Der Wegzug des bisherigen Oberländervertreters im Vorstand KLV, *A. Näf,* Azmoos, gab Anlass zu Beratungen und Beschlüssen zuhanden der Delegiertenversammlung. *N.*

Thurgau

Die gute Aufnahme, die ein Kurs über Urgeschichte letzten Herbst in Seengen fand, veranlasst den thurgauischen Heimatverband, auch unsern Leuten etwas Aehnliches zu bieten. Am 10./11. April werden in Arbon «Technische Probleme der Urzeit» behandelt werden. Es wird gezeigt, wie Steinbeile und Knochenwerkzeuge hergestellt und verwendet, wie Felle zugerichtet, Flecht- und Webarbeiten ausgeführt und wie Bronzegegenstände gegossen wurden. Der Kurs, der unentgeltlich ist, verspricht also recht interessant zu werden. Namentlich Lehrer werden für sich und ihre Schulen viel profitieren können. Der Besuch sei ihnen bestens empfohlen. Anmeldungen sind bis 5. April an Herrn Rud. Pfister, Talbachstrasse, Frauenfeld zu richten. *W. D.*

Jahresberichte

Unterseminar des Kantons Zürich in Küsnacht. Bericht über das Schuljahr 1946/47.

Jahresbericht 1946 der Vereinigung Kinderdorf Pestalozzi.

Ausländisches Schulwesen

Verbilligte Reisen für Lehrer — in Argentinien.

Das argentinische Unterrichtsministerium hat beim Ministerium für Verkehr angeregt, dass die früher üblichen verbilligten Rundreisen für Lehrer wieder eingeführt werden. Das Erziehungsministerium wünscht, dass die Lehrer so viel wie möglich Studienreisen in die Landesgegenden unternehmen sollten, welche sie im Unterricht behandeln. Auf den Schweizer Bahnen geniessen bis heute einzig die Berufsjournalisten, welche sich um die Orientierung der Erwachsenen bemühen, eine Ermässigung. Die wenigsten Schweizer Lehrer sind aber heute in der Lage, unser Land so kennen zu lernen, wie es der staatsbürgerliche Unterricht erfordern würde. Vielleicht eine Anregung für den SLV! *hg. m.*

Schwedische Reisestipendien für Sprachlehrer.

Die schwedische Zentralschulverwaltung hat die Ausrichtung von 30 Reisestipendien an Gymnasiallehrer für den Sommer 1948 beschlossen. Diese Stipendien betragen 750 bis 900 Kronen, je nach der Dauer des Auslandaufenthaltes. Sämtliche Stipendiaten machen einen mehrwöchigen Aufenthalt in England bis auf die Rektorin einer höhern Volksschule, welche in der Schweiz Sprachstudien treiben wird. *hg. m.*

Hochherzige Forschungsstiftung — in Schweden.

Die schwedische Forschung wurde kürzlich Universalerbe des verstorbenen Magnus Bergvall, Direktor im gleichnamigen Buchverlag. Das Erbe beträgt 6,5 Millionen Kronen und soll den verschiedensten wissenschaftlichen Institutionen dienen. Der Testator war von 1888 bis 1908 Gymnasiallehrer, zuletzt in Stockholm. Nachher gründete er den weitverzweigten Buchverlag Bergvall. *hg. m.*

Mexiko bekämpft das Analphabetentum.

In Uebereinstimmung mit dem Sofortprogramm der UNESCO hat Mexiko schon seit zwei Jahren den Kampf gegen den Analphabetismus aufgenommen und dabei sehenswerte Erfolge zu verzeichnen. Nicht weniger als 1,5 Millionen Erwachsene lernten in diesen beiden Jahren lesen und schreiben. Der Kampf geht weiter und gilt den Jugendlichen von 14—20 Jahren. Dieser Unterricht benötigt die Errichtung von 1000 neuen Lehrstellen. *hg. m.*

Schweizerischer Lehrerverein

Sekretariat: Beckenhofstrasse 31, Zürich; Telephon 28 08 95
Schweiz. Lehrerkrankenkasse Telephon 26 11 05
Postadresse: Postfach Unterstrass Zürich 35

Ausweiskarte Kur- und Wanderstationen

Wir bitten alle Empfänger der Ausweiskarte um baldige Bezahlung mittels des beigelegten Postchecks. Sie ersparen damit der Geschäftsstelle viele Arbeit.

Der Präsident.

Mitteilung der Redaktion

Für die rein mathematischen Texte und Formeln in dieser Nummer sind grundsätzlich die Autoren als Fachleute selbst voll verantwortlich.

Schriftleitung: **Dr. Martin Simmen, Luzern; Dr. W. Vogt, Zürich. Büro: Beckenhofstr. 31, Zürich 6; Postf. Unterstrass, Zürich 35**

Ferienaustausch und Korrespondenzpartner

Zwei englische Lehrerinnen suchen Ferienaustausch mit schweizerischen Kolleginnen:

Miss Edith Philipps (unterrichtet Deutsch und Französisch), 56 Jahre, 40 A Dartmouth Road, Forest Hill, London S. E. 23;

Miss Joyce Hodgson (unterrichtet Deutsch), 23 Jahre. 7, Queen Street, Ripon (Yorkshire).

*

Die ungarische Lehrerin Frl. Waldi Vilma, Budapest VI, Andrassy-ut 65, wünscht Korrespondenzaustausch mit Schweizer Lehrerin oder Lehrer.

Zimmersuche

Wer bietet einem Kollegen in Zürich zeitweise Zimmer (auch bescheidenes) gegen Bezahlung oder in Tausch mit ländlicher Wohnung? Angebote an die Redaktion der «Lehrerzeitung» erbeten.

Kurse

Der *Luzernische Verein für Handarbeit und Schulreform* führt in den Osterferien folgende Kurse durch: 1. Einführung in Holzarbeiten, 30. März bis 10. April, Kursleiter: Franz Steger, Gerliswil; 2. Geographieunterricht, 5.—10. April, Kursleiter: Franz Meyer, Luzern; 3. Sprachunterricht (Mittel- und Oberstufe), 5.—10. April, Kursleiter: Hans Ruckstuhl, St. Gallen. Kursort ist Emmenbrücke. *psp.*

Summer Programm of British Council Courses

Wer sich für die verschiedenen Sommerkurse interessiert, verlange das Programm bei der CONSULAR SECTION BRITISH LEGATION in Bern. Da die Einschreibefrist meist sehr früh abläuft, empfiehlt sich umgehende Bestellung. **

Kleine Mitteilungen

Eine unentgeltliche Anschauungstafel für die Unterstufe

Die *Uhrenfabrik Zenith in Le Locle* verteilt seit langem ein Wandbild für die Unterstufe, das geeignet ist, das Lesen der Uhr bei den Erstklässlern einzuführen. Dieses Lehrmittel wird gratis abgegeben. Man kann es bei der obigen Adresse mittels einer Postkarte bestellen. **

100 Jahre Bundesstaat

So betitelt sich ein Heft im Umfange von 80—96 Seiten, das der *«Gewerbeschüler»*, das gut geführte periodische Lehrmittel für gewerbliche Berufsschulen, herausgibt. Die Inhaltsübersicht ist recht vielversprechend. In etwa einem Dutzend Aufsätzen sollen die Bundesverfassungen von 1815 und 1848, deren Grundgedanken und die weitere Entwicklung, wirtschaftliche und kulturelle Fragen besprochen werden.

Das Ganze verspricht ein Leseheft zu werden, das an Gewerbe-, Sekundar- und Mittelschulen ausgezeichnete Dienste leisten kann.

Abonnenten des «Gewerbeschülers» erhalten das Heft anstelle der Lesehefte 1 und 2. Anderen Bezügern wird bei Vorbestellungen beim Verlag Sauerländer, Aarau, bis 1. April von 20 Heften an ein Rabatt von 25 % auf den Einzelpreis von Fr. 1.20 gewährt. *Kl.*

Arbeitsschul-Inspektorat des Kantons Zürich

Die Handarbeiten und Zeichnungen der Kandidatinnen des zweijährigen Kurses zur Heranbildung von Arbeitslehrerinnen an Volks- und Fortbildungsschulen des Kantons Zürich sind in der Schweiz. Frauenfachschule, Kreuzstrasse 68, Zürich, zur freien Besichtigung ausgestellt:

Samstag, den 3. April, von 10—12 Uhr und 14—18 Uhr.
Sonntag, den 4. April, von 9—12 Uhr und 14—18 Uhr.
Montag, den 5. April, von 9—12 Uhr und 14—18 Uhr.

Berset-Müller-Stiftung

Im Lehrerasyl Melchenbühl-Muri (Bern) sind zwei Plätze frei. Zur Aufnahme berechtigt sind Lehrer und Lehrerinnen, Erzieher und Erzieherinnen schweizerischer oder deutscher Nationalität, sowie die Witwen solcher Lehrer und Erzieher, die das 55. Altersjahr zurückgelegt haben und während wenigstens 20 Jahren in der Schweiz im Lehramt tätig waren.

Das Reglement, welches über die Aufnahmebedingungen näheren Aufschluss gibt, kann bei der Vorsteherin des Asyls unentgeltlich bezogen werden.

Aufnahmegesuche sind bis *30. April nächsthin* mit den laut Reglement erforderlichen Beilagen an den Präsidenten der Verwaltungskommission, *Herrn F. Raaflaub, Bern, Selibühlweg 11*, zu richten. *Die Verwaltungskommission.*

Bücherschau

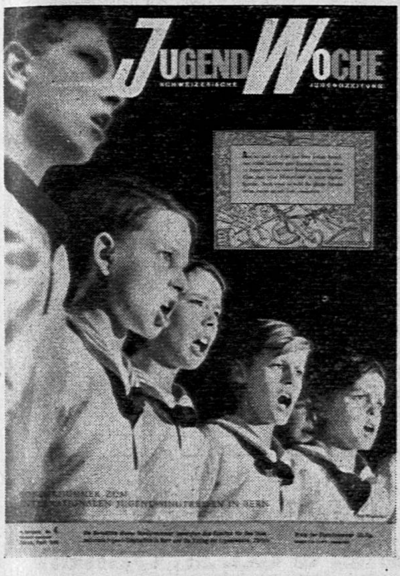
Rex Warner: *Der Flugplatz.* 288 S. Verlag: Büchergilde Gutenberg, Zürich. Ln. Fr. 6.—.

Hinter diesem kühlen, technisch klingenden Titel verbirgt sich ein sehr temporeicher und eigenwilliger Roman. Zwei feindliche Welten stehen einander gegenüber: Das alte, verträumte Dorf mit seinen traditionsgebundenen Menschen und der Militärflugplatz, Symbol der modernen Technik mit ihrem Anspruch auf totale Beherrschung des Menschen. Beide Welten hat der Verfasser, wie er in einer Vorbemerkung sagt, absichtlich abstossend gestaltet. Der Vizemarschall, der Pfarrer, der Junker usw. sind anonyme Gestalten, und die Fäden ihrer mannigfachen, geheimnisvollen Beziehungen bilden ein verwirrendes Netz, in das sich Roy, der Pfarrerssohn, mehr und mehr verstrickt. Alle moralischen Bindungen sind gelöst; Mord, Ehebruch und andere Verbrechen bleiben ungesühnt. Dagegen wird für den neuen Typus des Herrenmenschen, den der Flieger verkörpert, eine neue Moral verkündet, in dem die Disziplin als die höchste Tugend gilt. Das Buch würde man wahrscheinlich mit einem Kopfschütteln aus der Hand legen, würden einem nicht zwei Dinge zu denken geben: Die unleugbare Verwandtschaft mit tatsächlichen Erscheinungen der jüngsten, geschichtlichen Vergangenheit und Gegenwart und das immerhin tröstliche Ende des Buches, in dem das Gespenst dieses Uebermenschentums seinen verdienten Untergang findet. *P. F.*

RENCONTRE INTERNATIONALE DES JEUNES CHANTEURS, BERNE

INTERNATIONAL YOUTH SONG FESTIVAL, BERNE

INTERNATIONALES JUGEND-SINGTREFFEN, BERN



Die „Jugendwoche" will nicht nur unterhaltend belehren und belehrend unterhalten!
Seit ihrem Bestehen hat sie sich je und je darum bemüht, unsere Kinder für grosse Aufgaben zu begeistern. Auch in unseren heutigen düsteren Tagen würde das Land Pestalozzis und Henri Dunants seine Mission verleugnen, wenn es nicht versuchte, Versöhnung anzubahnen.

Diese Ideen waren wegleitend für eine Anzahl namhafter Persönlichkeiten, als sie unter dem Patronat des Herrn Bundesrat Dr. Philipp Etter ein Internationales Treffen von Jugendchören beschlossen. Präsident dieses Organisationskomitees ist Herr Dr. Markus Feldmann, Regierungspräsident und Erziehungsdirektor des Kantons Bern.

In Zusammenarbeit mit dem Verlag der „Jugendwoche" ist eine Sondernummer entstanden, die mit ihrem vielseitigen Text- und Bildmaterial der Schule wertvolle Dienste erweist.

Das „Amtliche Schulblatt des Kantons Bern" macht auf diese Sondernummer aufmerksam. Eine Bestellkarte, die der Erziehungsdirektion zuzustellen ist, liegt demselben bei.

Auch die Lehrer aller übrigen Kantone haben Gelegenheit, diese Sondernummer - soweit der Vorrat reicht - zu den gleichen Bedingungen zu erhalten. Der Verkaufspreis ist 50 Rp., wovon der Verlag der „Jugendwoche" dem Berner Singtreffen 25 Rp. zugute kommen lässt.
Bitte bestellen Sie für Ihre Schüler recht viele Exemplare dieser Sondernummer und benützen Sie dazu folgenden Bestellzettel.

INTERNATIONALES JUGEND-SINGTREFFEN, BERN

Abtrennen und einsenden

An
Internationales Jugend-Singtreffen
Ensingerstrasse 16
Bern

oder

Verlag der „Jugendwoche"
Jenatschstrasse 4
Zürich 2

Der Unterzeichnete bestellt

.... Exemplare der Sondernummer der „Jugendwoche" und wird den Betrag von 50 Rp. für jedes bestellte Exemplar einzahlen, sobald er die Sondernummer mit dem beigelegten Einzahlungsschein erhalten hat.

Name des Lehrers: ....

Schulhaus: .... Klasse: ....

Gemeinde, Poststelle: ....

SCHLOSS HABSBURG

Lohnender Spaziergang von Brugg und Schinznach aus. 5 Autominuten vom Segelflugplatz Birrfeld. Wundervolle Fernsicht. Idealer Ausflugspunkt für Schulen und Vereine. Telephon 4 16 73. (OFA 1068 R) Fam. Mattenberger-Hummel.

Direkt am Rheinfall

Gut und preiswert essen! Tel.: Schaff. (053) 5 22 96

Im Rest. Schloss Laufen

PENSION GULM OBERÄGERI

empfiehlt sich für Osterferien. Familie Nussbaumer, Tel. 4 52 48

GERSAU HOTEL MÜLLER

Direkt am See und Schiffsteg

Grosser, schattiger Rest.-Garten, Parkplatz. Geeignet für Schulen und Vereine. Tel. (041) 6 06 12. J. U. GRAF-BOLLIGER

Rheinhafen

Die 1948er Schulreise geht nach

BASEL

an der Dreiländer-Ecke am Rhein

Rheinhafen
Münster mit Pfalz
Zoologischer Garten
Botanischer Garten
Historisches Museum
Kunstmuseum
Apothekenmuseum
Völkerkundemuseum
Rundfahrten per Tram oder Car
Fahrten auf dem Rhein:
nach Rheinfelden oder Kembs
(Führer zur Verfügung)

Alle Auskünfte über: Organisation, Verpflegung und Unterkunft usw. durch das Offizielle Verkehrsbureau an der Schifflände in Basel, Telephon 4 38 35

Gasthof
EISENBAHN GOLDAU

2 Min. vom Bahnhof, direkt am romantischen Bergsturzgebiet. Lokale für Gesellschaften und Vereine.

WEGGIS

Hotel *Paradies*

50 Betten, Zentralheizung
Eröffnet 24. März

Nach aufreibendem Schulbetrieb schöne Frühlingsferien. Pauschalpreis Fr. 108.– bis 120.– pro Woche.
Tel. (041) 7 32 31. Bes.: H. Huber

Montreux

HOTEL BEAU-RIVAGE

Prächtige Lage am See. Grosser Garten mit Liegestühlen.

Gute Küche. Vorsaisonpreise: Fr. 13.50 14.50 15.50
Verlangen Sie bitte unverbindlich Prospekte

ASCONA: SEESCHLOSS-CASTELLO

Ferien im heimeligen, frisch renovierten Kleinhotel. Alle Zimmer mit fliessendem Wasser. Grosser Garten. Eigener Sandstrand! Bekannt für seine währschafte Küche. Telephon 7 26 85 Prospekte Mit höflicher Empfehlung
Vorteilhafte Wochenpauschalpreise A. Schumacher

LOCARNO Pension Ingeborg

empfiehlt sich der tit. Lehrerschaft bestens. Tel. (093) 7 21 27. Frau A. Kemper

LUGANO

Canova

beim Kursaal Tel. 2 30 16

Das kleine Haus, das sich grosse Mühe gibt! Gepflegte Küche und Keller. Zimmer mit fliessendem kaltem und warmem Wasser
Schüler-Menus von Fr. 2.— an

Prop. G. Ripamonti-Brasi

MELIDE HOTEL RIVIERA

direkt am Luganersee — Restauration — Seeterrasse — Seebad
Telephon 3 73 92 Besitzer: Schönauer

Für Ihre Ferien empfiehlt sich höflich **PENSION MUZZANO**

Ruhiger, schöner Ferienort bei Lugano. Selbstgeführte Küche (umgebaut 1948). Pensionspreis ab Fr. 10.50. Verlangen Sie Prospekte beim Besitzer **F. Gasser-Künzli, Muzzano-Lugano**
Telephon 2 20 22

Jetzt auf die

Engstligenalp!

ADELBODEN

Schwebebahn und **Berghotel**

Familie Müller
Tel. 8 33 74

Spezialarrangements für Schulen und Vereine

Davos-Platz Hotel-Pension Bolgenschanze

1560 m ü. M. Freundl. Zimmer, fliessendes Wasser, Zentralheizung, bekannt gute Küche, Pension ab Fr. 11.50. Besitzer J. Wurm.

DAVOS Sporthotel Regina

Modernes Kleinhotel Bes.: M. Müller-Santsch

THUSIS Das alkoholfreie Volkshaus **Hotel Rhätia**

empfiehlt sich Feriengästen und Passanten. Neu renoviertes Haus. Gepflegte Küche. Gutgeheizte Zimmer mit fl. kaltem und warmem Wasser. — Schönes Skigebiet am Heinzenberg.