Zeitschrift: Bollettino della Società ticinese di scienze naturali

Herausgeber: Società ticinese di scienze naturali

Band: 87 (1999)

Artikel: I numeri naturali come autovalori di un modello di oscillatori classici a bassa temperatura

Autor: Merlini, Danilo / Rusconi, Luca / Sala, Nicoletta

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1003282

I numeri naturali come autovalori di un modello di oscillatori classici a bassa temperatura

Danilo Merlini[1], Luca Rusconi[1] e Nicoletta Sala[1,2]

[1] CERFIM Centro di Ricerca in Fisica e Matematica, Via F. Rusca, CH-6600 Locarno

[2] Accademia di Architettura di Mendrisio, Largo Bernasconi, CH-6850 Mendriso, Università della Svizzera italiana

Riassunto: Lo scopo di questo articolo è di presentare alcuni aspetti di una nostra ricerca orientata allo studio di un modello armonico unidimensionale il «modello di Mehta- Dyson».

Abstract: The aim of this paper is to present some aspects of a one-dimensional oscillator using the Mehta Dyson model.

INTRODUZIONE

Verso gli anni '50, Wigner, Dyson e altri introdussero le matrici aleatorie o stocastiche in fisica nucleare; l'intento primario fu quello di comparare lo spettro energetico dei sistemi complessi, come quello dei nuclei pesanti, con quello dei sistemi descritti da Hamiltoniane aleatorie H (H è l'energia totale del sistema).

Infatti se il sistema allo studio è supposto contenere molti nuclei, e se le energie di eccitazione in gioco sono molto alte, allora i livelli energetici sono molto densi ed essi non possono più essere calcolati esplicitamente (MEHTA, 1991; ITZYKSON, DROUFFE, 1991). Dai principi generali, un'analisi indica poi (tenendo conto che le leggi di distribuzione dei livelli devono essere invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni, per esempio il gruppo ortogonale o unitario, e che l'ipotesi che gli elementi di matrice sono variabili indipendenti), che le distribuzioni dei livelli di energia devono essere studiate statisticamente.

Questo significa che, siccome l'Hamiltoniana H di un nucleo non è conosciuta, allora essa sarà presa a caso da un insieme di Hamiltoniane, la cui probabilità di distribuzione diventa però determinata, e quindi proposta concretamente.

Le proprietà statistiche dei livelli energetici di un nucleo sono così calcolate tramite una media su una grande quantità di livelli energetici. Una situazione questa vicina a quella delle misure di Gibbs della meccanica statistica di un sistema di particelle interagenti e descritte appunto un'Hamiltoniana H.

Nel caso dei nuclei in questione, le «particelle» sono appunto i livelli energetici dell'Hamiltoniana stocastica H attinta dall'insieme di interesse.

Si noterà ora che, dal punto di vista sperimentale, le diverse proprietà caratteristiche dei livelli di energia, quali ad esempio la distanza fra di essi e le loro correlazioni statistiche (analoghe alle correlazioni fra le particelle in meccanica statistica), se calcolate tramite gli insiemi proposti[1], danno una buona descrizione degli spettri di energia osservati e si giunge persino ad una descrizione della distribuzione degli zeri della funzione zeta di Riemann, lo spazio fra di essi e la loro correlazione (ODLYZKO, 1987).

Rispetto alle simmetrie fondamentali, sono emerse tre famiglie importanti di matrici aleatorie. Citeremo qui soltanto le matrici simmetriche reali (connesse con il presente lavoro) che possano essere diagonalizzate tramite una trasformazione ortogonale nello spazio vettoriale associato ai livelli energetici (valori energetici indicati con $x_i \in R$, i= 1, 2,…, N) e le matrici complesse hermitiane che sembrano appunto essere in legame più stretto con il grande e complesso problema dello studio dell'ipotesi di Riemann sulla distribuzione degli zeri della funzione zeta (importante per il comportamento dei «mattoni» dell'aritmetica, cioè i numeri primi) (COHEN, 1998).

Dalla teoria sviluppata da Mehta et al. (MEHTA, 1991), è emerso che nel caso gaussiano la distribuzione di probabilità dei livelli energetici è data da una misura di Gibbs, associata a un gas di filamenti di Coulomb (ognuno di carica e) dove l'interazione o potenziale fra due filamenti (ossia due livelli energetici) è data dal potenziale a lungo raggio di azione $\varphi(r) = -e^2 \cdot \ln r$ dove r è la distanza fra due livelli (o particelle) in dimensione 1.

La misura di probabilità è così fornita dalla seguente relazione:

$$p(x)\, dX = c \cdot \prod_{1 \le i < j \le N} |x_i - x_j|^{\alpha} \cdot \exp(-\beta \sum_{i=1}^{N} x_i^2)$$

con $X = x_1, x_2, \ldots, x_N$; dove α e β (le «temperature») sono due costanti reali, $\alpha = 1$ per il caso ortogonale e $\alpha = 2$ per il caso unitario.

Emerge così la seguente funzione di partizione del modello di Mehta-Dyson unidimensionale:

$$Z(\alpha,\ \beta) = c \cdot \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \cdot \exp(-\beta \sum_{i=1}^{N} x_i^2) \cdot \prod_{1<i<j<N} |x_i - x_j|^{\alpha}$$

Da notare che $\alpha > 0$ rappresenta la repulsione dei livelli energetici.

Questo modello è stato studiato sia numericamente, sia analiticamente (CALINON, JOHANNESEN, MERLINI, TARTINI, 1990).

Nel modello gaussiano dove $d\mu \sim exp(-traccia\ H^2)$ la distribuzione di probabilità per le famiglie di interesse di Hamiltoniane aleatorie è la distribuzione di Gibbs di un sistema di particelle di posizioni $x_i \in R$ (livelli) in dimensione 1 interagenti, attraverso il potenziale coulombiano $\varphi(r)$ e dove l'Hamiltoniana è data da:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i<j} \ln|x_i - x_j| + \text{costante}$$

Nel presente lavoro, si analizza tale modello a basse temperature (alti valori di α e β), (per un sistema $N \to \infty$, si può porre $\alpha = \beta$ per via di una trasformazione lineare di scala, data da: $\sqrt{\beta} \cdot x_i = \sqrt{\alpha} \cdot x_i'$), sviluppando i potenziali attorno ai siti di equilibrio delle particelle (o livelli energetici) allo zero assoluto.

Gli autovalori dell'Hamiltoniana bilineare nelle fluttuazioni sono studiati nel dettaglio in seguito, dove lo spettro dell'oscillatore associato al sistema risulta essere costituito dai numeri naturali.

L'oscillatore armonico

Il modello di Mehta - Dyson consiste di N cariche puntuali ciascuna con carica + e (con $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), libere di muoversi su una retta di lunghezza infinita, $-\infty < x < \infty$, con $x_1, x_2, \ldots x_N$.

La posizione delle cariche e l'energia potenziale del sistema è data da (MEHTA, 1967):

$$V(\{x_i\}) = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - e^2 \sum_{i<j}^{N} \ln|x_i - x_j| \qquad (1)$$

L'Hamiltoniana classica (compresa l'energia cinetica) è fornita dalla seguente relazione:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} \dot{x}_i^{\,2} + V \qquad (2)$$

Le equazioni di Newton risultano:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\Delta V}{\Delta x_i} = -\frac{\Delta}{\Delta x_i}\left(\frac{1}{2} e^2 x_i^2 - e^2 \sum_{j \neq i} \ln|x_i - x_j|\right) =$$

$$-\left(e^2 x_i^2 - e^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \frac{2(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^2}\right)$$

Così:

$$m\ddot{x}_i = -e^2\left(x_i - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)}\right) \qquad (3)$$

Le precedenti equazioni sono in connessione con quelle del modello di Calogero (CALOGERO, 1977a, 1977b; PERELOMOV, 1990) dove il potenziale tra due cariche è fornito da:

$$e^2 \frac{1}{(x_i - x_j)^2}$$

invece del termine:

$$m\ddot{x}_i = -e^2\left(x_i - 2\sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3}\right)$$

È interessante infatti notare che le posizioni di equilibrio di entrambi i modelli coincidono e sono fornite dalla soluzione dell'equazione differenziale: $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots N$.

Esiste un'unica configurazione di equilibrio, indicata con $\{x_{i0}\}$, che è fornita dal modello studiato da Mehta. L'insieme $\{x_{i0}\}$ è infatti dato dagli zeri dei polinomi di Hermite di ordine n:

$$V_0 = V(\{x_{i0}\}) = \frac{1}{2} N(N-1) \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} i \ln i \qquad (4)$$

con la proprietà:

$$V(\{x_i\}) > V_0 \quad \forall \{x_i\} \neq \{x_{i0}\} \qquad (5)$$

Si rammenti che V_0 è un minimo assoluto di V.

In questo ambito ci riferiamo a un'approssimazione armonica di V, che descrive correttamente le proprietà di equilibrio del sistema alle basse temperature, nell'insieme statistico canonico (AREDE, JOHANNESEN, MERLINI, 1984).

Di conseguenza l'approssimazione armonica è mostrata coincidere con lo sviluppo alle basse temperature della soluzione del modello di Mehta - Dyson nell'insieme canonico; con $x_k = x_{k0} + \xi_k$ e considerando solo i termini quadratici in ξ_i, come approssimazioni di (AREDE, JOHANNESEN, MERLINI, 1984):

$$V = \frac{e^2}{2} \sum_{i=1}^{N} (x_{i0} + \xi_i)^2 - e^2 \sum_{i<j}^{N} \ln|x_{ij0} + \xi_{ij}|$$

e

$$V_h = V_0 + \frac{e^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\,2} + \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{\xi_{ij}^{\,2}}{|x_{ij0}|^2} \qquad (6)$$

$$= V_0 + \frac{1}{2} \xi A \xi$$

dove $x_{ij0} = x_{i0} - x_{j0}$ e $\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j$

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ e A è la matrice quadrata N x N di elementi dati da:

$$A_{ij} = \left(1 + \sum_{k \neq i}^{N} \frac{1}{x_{ik0}^{\ 2}}\right) \cdot \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})\left(-\frac{1}{x_{ij0}^{\ 2}}\right) \qquad (7)$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Krönecker.

Ricordiamo che con $\{\lambda_i\}$, i= 1, 2, ..., N indichiamo gli autovalori di A; vale la seguente proprietà:

$$\text{traccia } A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = N + \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_{ij0}|^2} \qquad (8)$$

di conseguenza la posizione di equilibrio $\{\xi_{i0}\}$ soddisfa le equazioni (MEHTA, 1967):

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = N+\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}N(N+1)\quad \forall N; \tag{9}$$

Si ha:

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = N+\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}N(N+1)\quad \forall N;$$

con $\{\lambda_i\} = \{i\}$ $\forall$i= 1, 2,...N come ipotizzato in un precedente lavoro sul modello di Mehta - Dyson (AREDE, JOHANNESEN, MERLINI, 1984).

Il nostro lavoro intende appunto provare la precedente proprietà con metodi elementari, ad esempio che il sistema è equivalente a un oscillatore armonico (un bosone) qui chiamato «oscillatore di Mehta - Dyson».

Il nostro approccio allo studio del problema è indipendente dal trattamento algebrico dei sistemi integrabili, presentati nel testo di Perolomov (PEROLOMOV, 1990).

Ci riferiamo anche a un originale lavoro di Calogero (CALOGERO, 1977a).

Uno dei primi aspetti che mostreremo è che l'approssimazione armonica per il modello di Mehta-Dyson offre un altro esempio di sistema classico integrabile, un oscillatore armonico con spettro $\lambda i = i$ $\forall i \leq N$, che nel limite termodinamico $N \to \infty$, diventa un oscillatore armonico quantistico con spettro $\lambda_i \in N^*$ (MERLINI, RUSCONI, SALA, 1998).

La nostra prova della proprietà $\lambda i = i$ $\forall i \leq N$, con esplicita costruzione degli autovalori discreti del modello è fornita nel prossimo paragrafo.

Autovalori del modello di Mehta -Dyson

La parte armonica H_h di H, $H_h = \hat{H} - H_0$, è data dalla matrice simmetrica A:

$$H_h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_{i=j}\frac{(\xi_i-\xi_j)^2}{|x_{ij0}|^2} = \frac{1}{2}(\xi,\ A\xi)$$

dove $x_{ij0} = x_{i0} - x_{j0}$. Da ora ometteremo, per rendere più leggibili le relazioni, il pedice 0. Così che: $(x_i)_{i=1,2,..,N}$ denoterà gli N zeri del polinomio di Hermite di ordine N (ad esempio $H_N(x_i) = 0$ $\forall$i = 1, 2, ..., N).
Esplicitamente gli elementi di A sono:

$$A_{ij} = -\frac{1}{|x_i - x_j|^2} = -a_{ij} \qquad i=j$$

$$A_{ii} = 1+\sum_{k\neq i}^{N}\frac{1}{|x_i - x_j|^2} = 1+\sum_{k\neq i} a_{ik} \qquad i=j$$

Quindi A è reale e simmetrica e può essere diagonalizzata tramite una matrice ortogonale U ($U \cdot U^T = I$, dove I è la matrice d'identità):

$$(\xi,\ A\xi) = (\xi,\ \Lambda\xi)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ 0\dots & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che gli autovalori $\{\lambda_i\}$ sono positivi.

Sia $\{X_k\}_{k=1,2,\dots,N} = \begin{pmatrix} \varphi_{1k}(\{x_i\}) \\ \cdot \\ \varphi_{Nk}(\{x_N\}) \end{pmatrix}$ l'autovettore di A tale che:

$AX_k = \lambda_k X_k$ k= 1, 2, ..., N con autovalore λ_k.
Abbiamo dimostrato che $\lambda = \lambda_1 = 1$ è un autovalore di A $\forall$N e che per nostri calcoli fino a k=5, la congettura di ricorrenza con il polinomio di Hermite associato al modello di Mehta -Dyson è (MERLINI, MORESI, RUSCONI, SALA, 1998):

$$P_{MD,\,k+2}(x) = 2x\,P_{MD,\,k+1} - 2(N-k)\,P_{MD,\,k} \tag{10}$$

dove $P_{MD,1} = 1$ e $P_{MD,2} = 2x$.

Assumendo che la relazione (10) sia vera, $\forall$k= 1, 2, ..., N-2, abbiamo costruito un classico operatore di annichilimento e creazione a, a* e dimostrato che lo spettro di A è espresso dalla relazione $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots,N} = \{k\}_{k=1,2,\dots,N}$, $\forall$N.

Supponendo che la relazione di ricorrenza (10) sia vera, abbiamo:

$$(A\varphi_{k+2})_1(x_1) = (A2x_1\,\varphi_{k+1})_1(x_1) - (A2(N-k)\,\varphi_k)_1(x_1))$$

calcoliamo:

$$(A2x_1\,\varphi_{k+2})_1(x_1) = A_{11}2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) - \sum_{i\neq1}A_{1i}2x_i\varphi_{k+1}(x_i) =$$

$$= 2x_1\,A_{11}\varphi_{k+1}(x_1) - 2x_1\sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}\varphi_{k+1}(x_i) - \sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)\varphi_{k+1}(x_i)$$

$$= 2x_1\,(A\varphi_{k+1})_1(x_1)$$

Così:

$$(A\varphi_{k+1})_1(x_1) = 2x_1\,A_{11}\varphi_{k+1}(x_1) - \sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)\varphi_{k+1}(x_i) - 2(N-k)(A\varphi_k)_1(x_1)$$

assumiamo che $AX_k = k\,X_k$ e $AX_{k+1} = (k+1)\,X_{k+}$ allora:

$$(A\varphi_{k+2})_1(x_1) = 2x_1\,(k+1)\varphi_{k+1}(x_1) - 2(N-k)k\,\varphi_k(x_1) + \sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)\varphi_{k+1}(x_i)$$

$$= 2x_1\,(k+1)\varphi_{k+1}(x_1) - 2(N-k)(k+2)\,\varphi_k(x_1) - 2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) + 4(N-k)\,\varphi_k(x_1)$$

$$+\sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)\varphi_{k+1}(x_i) = (k+2)\,\varphi_{k+2}(x_1) - \varphi_{k+2}(x_1) + 2(N-k)\,\varphi_k(x_1) +$$

$$+\sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)(\varphi_{k+1}(x_i) - \varphi_{k+1}(x_1)) + \sum_{i\neq1}^{N}A_{1i}(2x_i - 2x_1)A_{1i}\varphi_{k+1}(x_i)$$

L'ultimo termine è dato da:

$$\sum_{i\neq1}^{N}\frac{2(x_1 - x_i)}{|x_1 - x_i|^2}\varphi_{k+1}(x_i) = 2\varphi_{k+1}(x_i)\sum_{i\neq1}^{N}\frac{1}{x_1 - x_i} = 2\varphi_{k+1}(x_1)\,x_1 = 2\,x_1\,\varphi_{k+1}(x_1)$$

Così:

$$(A\varphi_{k+2})_1(x_1) - (k+2)\,\varphi_{k+2}(x_1) = -\varphi_{k+2}(x_1) + 2(N-k)\,\varphi_k(x_1) + 2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) + -2\sum_{i\neq1}^{N}\frac{(\varphi_{k+1}(x_1) - \varphi_{k+1}(x_i))}{(x_1 - x_i)} =$$

$$= -[\varphi_{k+2}(x_1) - (2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) - 2(N-k)\,\varphi_k(x_1)] + 4(N-k)\,\varphi_k(x_1) + -2\sum_{i\neq1}^{N}\frac{(\varphi_{k+1}(x_1) - \varphi_{k+1}(x_i))}{(x_1 - x_i)}$$

Ora definiamo l'operatore di annichilimento (a è una matrice NxN):

$$(a\,\varphi_{k+1})_1(x_1) \equiv \frac{\hat{d}}{dx_1}\varphi_{k+1}(x_1) = \sum_{i\neq 1}^{N}\frac{(\varphi_{k+1}(x_1)-\varphi_{k+1}(x_i))}{(x_1-x_i)}$$

dove con il simbolo $\frac{\hat{d}}{dx_1}$ si indica la derivata discreta.

La precedente equazione è data da:

$$[(A(k+2)\,I\,\varphi_{k+2}](x_1) = -2[(a\,\varphi_{k+1})_1(x_1) - 2(N-k)(\,I\,\varphi_k)_1(x_1)]$$

I matrice unità.

Considerando vera la (10) se

$AX_k = \lambda_k X_k = k X_k$ e $AX_{k+1} = \lambda_{k+1} X_{k+1} = (k+1) X_{k+1}$,

otteniamo $AX_{k+2} = \lambda_{k+2} X_{k+2} = (k+2) X_{k+2}$

$$(a\,\varphi_{k+1})_1(x_1) \equiv \frac{\hat{d}}{dx_1}\varphi_{k+1}(x_1) = (\alpha\varphi_{k+1})_1(x_1) = 2(N-k)\varphi_k(x_1)$$

e dunque:

$aX_{k+1} = 2(N-k)\,I\,X_k$.

Utilizzando la relazione di ricorrenza si ha:

$$\varphi_{k+2}(x_1) = 2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) - 2(N-k)\varphi_k(x_1) = 2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) - (a\varphi_{k+1})_1(x_1)$$

In modo analogo definiamo l'operatore di creazione:

$$2x_1\,\varphi_{k+1}(x_1) - (a\varphi_{k+1})_1(x_1) = \left(2x_1 - \frac{\hat{d}}{dx_1}\right)\varphi_{k+1}(x_1)$$

Si ha

$a^* X_{k+1} = X_{k+2}$

Quindi:

$$([a,a^*]\varphi_{k+1})_1(x_1) = ((aa^* - a^*a)\,\varphi_{k+1})_1(x_1) = (a\,\varphi_{k+2})_1(x_1) - a^*\,2(N-k)\,\varphi_k$$
$$= 2[N-(k+1)]\,\varphi_{k+1}(x_1) - 2(N-k)\,\varphi_{k+1}(x_1) = -2\,\varphi_{k+1}(x_1).$$

Così il commutatore è dato da:

$$[a, a^*] = -2 \qquad (11)$$

Assumendo ora che: $AX_k = \lambda_k X_k = k X_k$, $\forall$ k, si ha:

$$[A, a^*]\,X_k = Aa^*\,X_k - a^*A\,X_k = A\,X_{k+1} - a^*k\,X_k = (k+1)\,X_{k+1} - k\,X_{k+1} = X_{k+1} = a^*\,X_k$$

$$[A, a^*] = a^* \qquad (12)$$

Allo stesso modo:

$$[A, a] = -a \qquad (13)$$

L'«Ansatz» per A è dato da:

$$A = \alpha + \beta\,a^*\,a + \gamma\,a\,a^*$$

Usando le equazioni (11) e (12) si ha:

$$A = \alpha + 2\beta - \frac{1}{2}aa^* = Z - \frac{1}{2}aa^*$$

E si ottiene alla fine (MERLINI, RUSCONI, SALA, 1998):

$$\hat{A} = N\,I - \frac{1}{2}aa^*$$

Il risultato rigoroso che abbiamo ottenuto è che gli autovalori delle autofunzioni di

$\hat{A} = N\,I - \frac{1}{2}aa^*$ sono dati da $\{\lambda_k\} = \{k\}_{k=1,2,\dots,N}$ e $a^{*N+1}\,X_1 = 0$.

CONCLUSIONI

Dai risultati del nostro lavoro si nota quindi che siamo riusciti a introdurre degli operatori classici discreti di creazione e annichilimento e a determinare le autofunzioni, cioè i polinomi di Mehta - Dyson, e gli autovalori del sistema. Abbiamo inoltre dimostrato che $\hat{A} \equiv A$ (MERLINI, RUSCONI, SALA, 1998)

BIBLIOGRAFIA

ALBEVERIO S., DÜRR D. MERLINI D., 1983, J. Stat. Phys 31, pp. 382.

AREDE T., JOHANNESEN S., MERLINI D., 1984, J. Phys A Math Gen. 17, pp. 2505- 2515.

CALINON R., JOHANNESEN S., MERLINI D., TARTINI R., 1990 - The thermodynamic limit with few particles: the one - dimensional Mehta - Dyson plasma, in Stochastic Process, Physics and Geometry, Proceedings Ascona - Locarno Int. Conference, World Scientific, Edts S. ALBEVERIO ET AL., Singapore, pp. 269 - 276.

CALOGERO F., 1977, Lett. Nuovo Cimento 19, pp. 505 - 508.

CALOGERO F., 1977b, Lett. Nuovo Cimento 20, pp. 251 - 254.

COEHN P. B., 1998 - Dedekind Z- functions and quantum statistical mechanics, in Atti del colloquio di matematica 1993- 1998, anno 11, vol. 9 Edizioni Cerfim Locarno, pp. 99 - 108.

ITZYKSON C., DROUFFE J.M., 1991 - Statistical field theory, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge.

MEHTA M.L., 1967 - Random Matrices, N. Y. Ac. Press, 40, 41, 91, 191.

MEHTA M.L., 1991 - Random Matrices, Academic Press, New York.

ODLYZKO A., 1987 - On the distribution of spacing between zeroes of Zeta Functions, in Math. Comp., 48, pp. 283 - 308.

PERELOMOV A. M., 1978, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. XXVIII, 4, pp. 407-415.

PERELOMOV A.M., 1990 - Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, vol. i, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 248, 249, 267.

MERLINI D., RUSCONI L., SALA N., 1998 - Considerations on a One Dimensional Harmonic Oscillator at Low Temperature, Preprint Cerfim 40 /98, Locarno.

MERLINI D., MORESI R., RUSCONI L., SALA N., 1998 - Matrici quadrate, polinomi di Hermite e numeri interi, in Atti del colloquio di matematica 1993- 1998, anno 11, vol. 9 Edizioni Cerfim Locarno, pp. 177.