

**Zeitschrift:** Schweizerische pädagogische Zeitschrift

**Band:** 11 (1901)

**Heft:** 4

**Artikel:** Zur Massbezeichnung bei den geometrischen Berechnungen

**Autor:** Rüefli, J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-788987>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Massbezeichnung bei den geometrischen Berechnungen.

Von J. Rüe fli, Seminarlehrer in Bern.

Als Rechenlehrer hatte ich von jeher hie und da gegen Darstellungen wie z. B.

$$8 m \cdot 5 m = 40 m^2; \quad 9 dm \cdot 4 dm \cdot 5 dm = 180 dm^3;$$

$$\frac{400 m^2}{25 m} = 16 m; \quad \frac{160 dm^3}{32 dm^2} = 5 dm$$

zu kämpfen. Dabei liess ich mich von der Überzeugung leiten, dass es ein methodischer Unfug wäre, eine derartige Nachlässigkeit in der Sachbenennung zu dulden. Auch die Tatsache, dass diese Art der Bezeichnung als sogenannte „Einheitsrechnung“ sich wissenschaftlicher Sanktion rühmt, konnte mich in dieser Überzeugung nicht wankend machen. Dass in dieser Sache nicht alle Fachgenossen meine Ansicht teilen, ist mir bekannt. Die einen geben zwar zu, dass die von mir bekämpfte Darstellungsweise nicht korrekt sei; aber sie lassen sie gleichwohl anwenden, weil sie bequem sei und ja auch zum richtigen Resultat führe. Von andern dagegen wird sie sogar als methodisch gerechtfertigt und als sehr zweckmässig angepriesen, da sie bei konsequenter Anwendung den Schüler sicher zum richtigen Resultat führe. Nach diesem Verfahren hat man an jeder Grösse die Zahl und die Benennung zu unterscheiden und jede Rechnung in zwei Teile, nämlich in die Zahlrechnung und in die Rechnung mit den Sachnamen zu zerlegen. Mit diesen Namen wird multipliziert und dividirt, als ob sie Zahlen wären, z. B.:

$$9 dm \cdot 4 dm \cdot 5 dm = 9 \cdot 4 \cdot 5 dm \cdot dm \cdot dm = 180 dm^3.$$

Von einer zweckentsprechenden schriftlichen Darstellung muss gefordert werden, dass sie ein zutreffender Ausdruck der zur Anwendung kommenden Anschauungen, Vorstellungen, Begriffe und Schlüsse sei. Sehen wir nun zu, ob die Darstellungsweise der Einheits- oder Namenrechnung dieser Forderung gerecht werden könne. Nach dem Begriff

der Multiplikation, welcher dem Schüler bekannt und geläufig ist, hat er ein Produkt als Summe aus gleichen Summanden zu betrachten, deren Anzahl der Multiplikator ist. Die Darstellung

$$8 m \cdot 5 m = 8 \cdot 5 \cdot m \cdot m = 40 m^2,$$

welche nach der Einheitsrechnung für die Inhaltsberechnung eines Rechtecks von  $8 m$  Länge und  $5 m$  Breite anzuwenden ist, hat nach dieser Auffassung für den Schüler offenbar keinen verständlichen Sinn. Da die Teile einer Fläche, wie klein sie auch sein mögen, nicht Linien, sondern wiederum Flächen sind, so kann durch wiederholte Setzung einer Strecke, d. h. durch Addition gleicher Strecken, keine Fläche entstehen. Ferner kann man zwar eine Grösse mit einer Zahl und eine Zahl mit einer andern multiplizieren; der Multiplikator aber, welcher die Anzahl der gleichen Summanden ist, muss immer eine Zahl sein. Auf dieser Stufe der Begriffsentwicklung muss es also dem Schüler als etwas Absurdes erscheinen, wenn ihm zugemutet wird, eine Strecke mit einer anderen zu multiplizieren. Er kann sich zwar die Entstehung eines Rechtecks in der Weise vorstellen, dass eine Strecke parallel zu ihrer ursprünglichen Lage in einer zu dieser rechtwinkligen Richtung verschoben wird. In gleicher Weise lässt sich auch die Entstehung der gebräuchlichen Flächenmasse anschaulich vorführen. Um aber dieses Operieren mit Strecken als Multiplikation betrachten zu dürfen, müsste der Begriff dieser Operation verallgemeinert und als Gattungsbegriff so definiert werden, dass man in den Rahmen desselben die Multiplikation der Zahlen und diejenige der Grösseneinheiten ohne Widerspruch einordnen könnte. Es ist weder logisch noch methodisch gerechtfertigt, dem Schüler den Glauben zu suggerieren, dass man mit Grösseneinheiten und mit ihren Benennungen so rechnen dürfe, als ob sie Zahlen wären. Es muss doch vor allem klar gestellt werden, ob und in welchem Sinne ein Rechnen dieser Art möglich sei. Ob aber die zu diesem Zwecke erforderliche, weitgehende Verflüchtigung des Multiplikationsbegriffes für das Volksschulrechnen notwendig und zweckmässig sei, ist eine Frage, die weiterhin noch erörtert werden soll.

Wenn die Breite eines Rechtecks von  $120 m^2$  Inhalt und  $15 m$  Länge zu bestimmen ist, so hat man nach dem Verfahren der Einheitsrechnung die Darstellung

$$\frac{120 m^2}{15 m} = \frac{120}{15} \cdot \frac{m^2}{m} = 8 m$$

anzuwenden. Nun sind die beiden Arten der Division, nämlich das Messen und das Teilen, Umkehrungen der Multiplikation. Beim

Messen hat man aus dem Produkt und dem Multiplizieren den Multiplikator, beim Teilen aber aus dem Produkt und dem Multiplikator den Multiplizieren zu bestimmen. Es wird wohl niemand bestreiten, dass ein methodisch richtiger Unterricht im elementaren Rechnen die Schüler daran zu gewöhnen hat, dass sie diese beiden Arten der Division klar und sicher auseinander halten. Ist nun aber nach der Einheitsrechnung die Division ein Messen oder ein Teilen? Sie ist offenbar weder das eine noch das andere. Wenn man eine Grösse messen soll, so hat man zu untersuchen, wie viel mal eine als Masseinheit dienende Grösse gleicher Art in ihr enthalten ist, d. h. wie viele Grössen dieser Art sie in sich fasst. Da nun eine Fläche nicht aus Linien besteht, so hat es auch keinen verständlichen Sinn, sie durch eine Strecke zu messen. Man kann also Quadratmeter nicht durch Meter messen. Wenn ferner eine Fläche geteilt wird, so ist weder der Divisor noch der Quotient eine Strecke. Man kann also Quadratmeter auch nicht durch Meter teilen. Um nach dem Verfahren der Einheitsrechnung dividieren zu können, muss offenbar auch der Begriff der Division in der Weise erweitert werden, dass eine sichere und widerspruchsfreie Grundlage für diese Operation gewonnen wird. Ob dies für das Rechnen der Volksschule notwendig und nützlich sei, ist eine andere Frage.

Es sei der Inhalt eines Rechtecks von  $9\text{ dm}$  Länge und  $6\text{ dm}$  Breite zu bestimmen. Der Schüler hat sich auch hier vor allem den Sinn der Aufgabe klar zu vergegenwärtigen. Er weiss, dass er durch jede der ihm bekannten Rechenoperationen eine Zahl, ein Quantitätsverhältnis zu ermitteln hat. Es ist jedesmal zu untersuchen, wie viele Dinge einer gegebenen Art in einer Menge enthalten sind. Die Objekte, welche man als Einheiten zu zählen hat, entstehen nicht durch die Operation, sie müssen vorher schon gegeben sein. Also nicht erst nach der Operation oder durch dieselbe, sondern schon bevor sie beginnen kann, hat sich der Schüler klar zu machen, mit welchem Sachnamen das Resultat zu benennen ist. Um mit klarem Verständnis dessen, was er tut, die Zahl der in einer Menge enthaltenen Dinge zu ermitteln, muss er doch vor allem aus wissen, was er zu zählen hat. Da eine Fläche nur durch eine Fläche gemessen werden kann, so muss ein für den vorliegenden Fall passendes Flächenmass gewählt werden. Der Schüler wird leicht einsehen, dass der Quadratdezimeter sich am besten für die Ausmessung des gegebenen Rechtecks eignet, dass er also zu berechnen hat, wie viele quadratische Flächenteile von  $1\text{ dm}$  Seitenlänge das Rechteck enthält. Die Einheiten, welche der Operation zu Grund gelegt werden müssen, sind also nicht Dezimeter, sondern Quadrat-

dezimeter. Nachdem man aber vor der Operation die Masseinheit festgestellt hat, was bei richtiger Veranschaulichung ohne Schwierigkeit möglich ist, erweist sich die Einheitsrechnung, welche erst durch die Operation in rein mechanischer Weise zu diesem Ziele gelangt, als etwas sehr Überflüssiges. Den Sinn einer Aufgabe erst durch die Auflösung derselben zu ermitteln, ist eine logische und methodische Verkehrtheit.

Wenn man, wie es allgemein üblich und zweckmässig ist, durch Teilungslinien, welche parallel zu den Seiten gezogen werden, das Rechteck in Quadratdezimeter zerlegt, so liegt an der Länge ein rechteckförmiger Streifen von 1 *dm* Breite, welcher 9 *dm*<sup>2</sup>, also so viele der zu zählenden Flächeneinheiten in sich fasst, als die Länge Dezimeter enthält. Die Masszahl dieses Streifens ist also gleich der Masszahl der Länge und wird durch diese bestimmt; aber die beiden Zahlen sind nicht identisch. An die Breite stossen 6 Streifen dieser Art, nämlich gerade so viele, als die Breite Dezimeter enthält. Die Anzahl der Streifen ist also gleich der Masszahl der Breite und durch dieselbe bestimmt; aber auch diese zwei Zahlen sind nicht identisch.

Auf Grund der ihm gebotenen Anschauung wird nun der Schüler leicht finden, dass das Rechteck 6 mal 9 *dm*<sup>2</sup> = 54 *dm*<sup>2</sup> enthält. Es wird ihm also gar nicht einfallen, die Darstellung

$$9 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm} = 54 \text{ dm}^2$$

anzuwenden. Diese schleicht sich nur dann ein, wenn er entweder so gelehrt, oder dann allzufrüh angehalten wird, den Boden der Anschauung zu verlassen und mit Zeichen als symbolischen Begriffen zu operiren. Es liegt in der Natur der Sache, dass man bei geometrischen Berechnungen mehr als auf anderen Gebieten nach Regeln und Formeln rechnen muss. Es ist aber ein methodischer Missgriff, wenn man schon bei den grundlegenden Berechnungen des Quadrates, des Rechtecks, des Würfels und des Quaders so rasch als möglich auf die Entwicklung und Anwendung der Regel lossteuert. Zahlreiche Aufgaben dieser Art sollten ohne Anwendung einer Regel als Schlussrechnungen behandelt werden, wobei der Schüler immer wieder von den diesen Berechnungen zu Grunde liegenden Anschauungen auszugehen hat. Bei diesem Verfahren gewöhnt sich der Schüler daran, sich bei jeder Berechnung eines Quadrates oder eines Rechtecks die entsprechende Zerlegung in Streifen und quadratische Flächeneinheiten klar und deutlich vorzustellen. Dass sich jede Fläche dieser Art in der Richtung der Länge in Streifen mit der Streckeneinheit als Breite zerlegen lässt, deren Anzahl der Masszahl der Breite gleich ist und von welchen jeder so viele Flächeneinheiten

enthält, als Längeneinheiten in der Länge enthalten sind, prägt sich ihm durch die Übung so sicher ein, dass er diese Tatsache in jedem Einzelfalle ohne Schwierigkeit anzuwenden versteht. Fehlt aber die auf klare Anschauung gegründete Einsicht, so kann der Mangel durch keine Regel ersetzt werden.

Aus der dargelegten Entwicklung pflegt man die bekannte Regel abzuleiten, nach welcher man den Inhalt eines Rechtecks berechnet, indem die Länge mit der Breite multipliziert wird. Da es aber für die Schüler dieser Stufe keinen verständlichen Sinn haben kann, eine Strecke mit einer anderen zu multiplizieren, so sucht man ihnen klar zu machen — wie auch ich es in meinen geometrischen Lehrmitteln getan habe — dass sie unter den Ausdrücken „Länge“ und „Breite“ nicht die betreffenden Strecken, sondern ihre Masszahlen zu verstehen haben. Vielfache Erfahrungen haben mich aber mehr und mehr zu der Überzeugung gedrängt, dass diese Deutung der Regel, so einleuchtend sie auch erscheinen mag, unrichtig und unzweckmässig ist. Es werden ja gar nicht die Masszahlen der Länge und Breite miteinander multipliziert, sondern man vervielfacht die durch die Masszahl der Länge bestimmte Anzahl der in einem Längsstreifen enthaltenen Flächeneinheiten mit der durch die Masszahl der Breite bestimmten Anzahl der Streifen, oder bündiger gesagt, man multipliziert die Masszahl eines Längsstreifens mit der Anzahl der Streifen. In diesem Sinne sollte man die Regel erklären und anwenden. Da der Schüler unter den Ausdrücken „Länge“ und „Breite“ nicht Strecken, sondern Masszahlen verstehen soll, so ist es doch gewiss das einzig Richtige, wenn er angehalten wird, die Masszahlen in ihrem Zusammenhang mit den Einheiten zu denken, deren Zahl bestimmt werden soll. Diese sind aber im vorliegenden Falle nicht Längeneinheiten, sondern Quadratdezimeter.

Die allgemein gebräuchliche Deutung der Regel ist deshalb unzweckmässig, weil sie die ursprüngliche Operation durch eine andere ersetzt, welche zwar zum gleichen Resultate führt, aber den Schüler von der einzig zutreffenden Anschauung ablenkt, so dass diese nach und nach aus seinem Denken verschwindet. Dafür aber soll er nun die Darstellung

$$9 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm} = 9 \cdot 6 \cdot \text{dm} \cdot \text{dm} = 54 \text{ dm}^2,$$

also eine Schablone anwenden, nach welcher er mechanisch rechnen muss, ohne damit klare und richtige Vorstellungen verbinden zu können. Um mit den Sachnamen der Grösseneinheiten wie mit Zahlen zu multiplizieren, muss der Schüler das Denken ausschalten; denn es hat für ihn keinen verständlichen Sinn, Sachbenennungen, Zahlenamen und Ziffern

mit einander zu multiplizieren. Wenn man zwei Ziffern oder zwei Sachnamen durch das Multiplikationszeichen verbindet, so bezeichnet man damit Multiplikationen; aber die Zeichenverbindungen als solche sind gerade so wenig Multiplikationen, als das Wort „rechnen“ eine Tätigkeit oder die Bezeichnung „Baum“ ein wirklicher Baum ist. Dass Schulmänner, welche sehr entschieden das Prinzip der Anschauung zur Geltung bringen, ein Verfahren empfehlen können, welches das Denken an klarer Anschauung durch ein mechanisches Operieren mit Zeichen verdrängt, ist mir unverständlich.

Wenn die Aufgabe gestellt wird, den Inhalt eines quaderförmig behauenen Steines von 8 *dm* Länge, 4 *dm* Breite und 5 *dm* Höhe zu berechnen, so bedarf es wahrlich keiner Einheits- und Namenrechnung, um den Schüler zu der Einsicht zu führen, dass hier der Kubikdezimeter die Masseinheit ist, mit welcher er zu operieren hat. Nachdem dies festgestellt ist, wird er so schliessen: Ein Längsstab von 1 *dm* Breite und 1 *dm* Höhe enthält 8 *dm*<sup>3</sup>; eine Grundplatte von 1 *dm* Höhe besteht aus 4 Stäben von dieser Grösse, enthält also 4 · 8 *dm*<sup>3</sup>; der ganze Stein fasst 5 Platten dieser Art, also beträgt sein Inhalt 5 · 4 · 8 *dm*<sup>3</sup> = 160 *dm*<sup>3</sup>. Wird aus zahlreichen Übungen endlich die Regel „Länge mal Breite mal Höhe“ abstrahirt, so hat sich der Schüler auch hier unter diesen Ausdrücken nicht Strecken, sondern Masszahlen vorzustellen, nämlich unter der „Länge“ die Anzahl der in einem Längsstabe enthaltenen Körpereinheiten, unter der „Breite“ die Anzahl der eine Grundplatte bildenden Stäbe und unter der „Höhe“ die Anzahl der Platten. Nach der Einheitsrechnung hätte man zu setzen:

$$\begin{aligned} V &= 8 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm}, \\ &= 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{dm} \cdot \text{dm} \cdot \text{dm} = 160 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Auch diese Darstellung erweist sich als ein Mechanismus, welcher bei methodisch richtiger Veranschaulichung zwecklos ist und die ursprüngliche, klare Anschauung zu dämmernder Konfusion verflüchtigt. Ausserdem ist die Einheitsrechnung ermüdend weitschweifig; denn sie fordert zwei getrennte Operationen und verwendet in dem angeführten Beispiel zur Darstellung der Multiplikation drei Sachnamen, während bei naturgemässer, unverkünstelter Veranschaulichung und Schlussweise eine klar gedachte Operation und eine leicht verständliche Sachbenennung vollkommen ausreichen. Ist der Inhalt eines Baumstammes von 4,5 *m* Länge, 4 *dm* grösserem und 3 *dm* kleinerem Radius zu berechnen, so soll nach der Einheitsrechnung die Darstellung

$$V = \frac{45 \text{ dm} \cdot 3,14}{3} (4 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} + 4 \text{ dm} \cdot 3 \text{ dm} + 3 \text{ dm} \cdot 3 \text{ dm})$$

zur Anwendung kommen. Der Schüler hat also nicht weniger als sieben Sachbenennungen zu setzen und vier Namenrechnungen auszuführen. Dieses abschreckende Beispiel zeigt, in welchem Masse die Einheitsrechnung Weitschweifigkeit und Konfusion in eine an sich sehr einfache und sonnenklare Sachlage bringen kann. Da ist doch wahrlich die Darstellung

$$V = \frac{45 \cdot 3,14}{3} (4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2) dm^3$$

einfacher, klarer, leichter verständlich und übersichtlicher; denn sie erfordert nur eine Sachbenennung, welche bei ausreichend klarem Verständnis der Aufgabe so nahe liegt, dass ihre Festsetzung, welche der Operation vorausgehen muss, dem Schüler keine Schwierigkeit bereiten kann.

Dazu kommt aber noch, dass das Verfahren der Einheitsrechnung voraussetzt, es gebe Zahlen, welche unabhängig und getrennt von den als Einheiten gezählten Dingen bestehen. Zahlen dieser Art gibt es in der wirklichen, der Anschauung zugänglichen Welt der Dinge nicht. Sie sind ein Gedankengebilde, welches seine Wurzel in der Gewohnheit hat, das wirkliche Rechnen mit den Zahlen durch das entsprechende Operieren mit Zeichen zu ersetzen. Da wir die Zahl der in einer Menge enthaltenen Dinge und diese selber durch besondere Namen bezeichnen, welche als solche in keinem untrennbaren Zusammenhange stehen, so gewinnt es für oberflächliches Denken den Anschein, dass auch die Zahlen unabhängig von den Dingen bestehen können. Alle Zahlen sind aber Zahlen von irgend welchen Dingen. Es gibt keine Zahlen, bei welchen den Zählobjekten kein anderes Merkmal als dasjenige der Einheit zukäme. Dieses Merkmal setzt die Existenz anderer voraus, es besteht nur mit und in denselben und verschwindet mit ihnen. Jede Masseinheit ist nicht nur eine „Grösse“, sondern „eine“ Grösse ihrer Art; es kommt ihr als Quantitätsverhältnis die Zahl 1 zu, mit welcher sie unlösbar verwachsen ist. Man kann in Gedanken das Merkmal der Einheit aus dem Komplex der Dingmerkmale absondern und von den übrigen abstrahieren; die wirkliche Trennung der Dinge und ihrer Anzahl aber ist unmöglich. Die Zahlrechnung und die Operation mit den Grössen können also in Wirklichkeit gar nicht von einander getrennt werden.

Es sei die Breite eines Rechtecks von  $400 m^2$  Inhalt und  $25 m$  Länge zu berechnen. Nach dem Verfahren der Einheitsrechnung hat man die Darstellung

$$b = \frac{400 m^2}{25 m} = \frac{400}{25} \cdot \frac{m^2}{m} = 16 m$$

anzuwenden. Der Schüler wird also angehalten, Quadratmeter durch Meter zu messen, trotzdem er weiss oder wissen soll, dass nach dem einzig richtigen, klaren und verständlichen Begriff des Messens eine Grösse nur durch eine andere Grösse gleicher Art gemessen werden kann. Dass dem Resultat der Zahlrechnung die Benennung „m“ zukommen muss, wird durch eine mechanische Operation mit Namen bestimmt, während sich diese Benennung doch ohne weiteres aus dem leicht verständlichen Sinn der Aufgabe ergibt. Aus der anschaulichen Entwicklung der Inhaltsberechnung ist dem Schüler bekannt, dass man den Inhalt in Quadratmetern erhält, wenn die Seiten in Metern angegeben sind. Wenn also umgekehrt der Inhalt in Quadratmetern und die Länge in Metern ausgedrückt ist, so wird er leicht einsehen, dass er zu berechnen hat, wie viele Meter die Breite enthält. Er wird also so schliessen: Ein an der Länge liegender Streifen von 1 m Breite enthält 25 m<sup>2</sup>. Die Breite beträgt also so viele Meter, als das Rechteck Längsstreifen dieser Art in sich fasst, folglich so viele Meter, als 25 m<sup>2</sup> in 400 m<sup>2</sup> enthalten sind. Diese Rechnung kann in folgender Form dargestellt werden:

$$b = 400 \text{ m}^2 : 25 \text{ m}^2 = 16 \text{ m},$$

oder auch

$$b = \frac{400}{25} \text{ m} = 16 \text{ m}.$$

Dass hier das Messen von 400 m<sup>2</sup> durch 25 m<sup>2</sup> als Schlussresultat Meter gibt, kann dem Schüler nur dann sonderbar vorkommen, wenn er mechanisch mit den Zeichen operirt, ohne zu verstehen, was er tut. Der denkende Schüler aber weiss, dass die Messung des ganzen Inhalts durch denjenigen eines Längsstreifens von 1 m Breite als Resultat zunächst die Anzahl der Streifen ergibt, dass aber durch diese die Anzahl der in der Breite enthaltenen Strecken von 1 m bestimmt wird. Hat er zu berechnen, wie viele Hektoliter Wein man für 600 Fr. erhält, wenn 1 hl 75 Fr. kostet, so misst er ja auch 600 Fr. durch 75 Fr. und erhält dadurch eine Anzahl von acht gleichen Wertbeträgen, durch welche dann eine gleiche Anzahl von Hektolitern bestimmt wird. Es wird gewiss niemand einfallen, die Namenrechnung auf derartige Divisionen anzuwenden. Warum sollen also Aufgaben der gleichen Art aus dem Gebiete der geometrischen Berechnungen nicht auch nach der dem Schüler bekannten und geläufigen, sachgemässen Schlussweise behandelt werden? Muss es nicht Verwirrung in sein Denken bringen, wenn er angehalten wird, für Fälle dieser Art eine verkünstelte Mathematik der Ausnahmen anzuwenden?

Man habe endlich die Höhe eines Balkens von  $700 \text{ dm}^3$  Inhalt,  $8 \text{ m}$  Länge und  $25 \text{ cm}$  Breite zu berechnen. Hat der Schüler vorher an klarer Anschauung richtig denken gelernt, so wird er nun ohne Schwierigkeit in folgender Weise schliessen: Ein Längsstab von  $1 \text{ dm}$  Breite und  $1 \text{ dm}$  Höhe misst  $80 \text{ dm}^3$ . Eine Grundplatte von  $1 \text{ dm}$  Höhe besteht aus  $2^{1/2}$  Stäben dieser Art, enthält also  $2^{1/2}$  mal  $80 \text{ dm}^3$ . Folglich beträgt die Höhe so viele Dezimeter, als  $2^{1/2}$  mal  $80 \text{ dm}^3$  oder  $200 \text{ dm}^3$  in  $700 \text{ dm}^3$  enthalten sind. In Zeichen:

$$h = 700 \text{ dm}^3 : 200 \text{ dm}^3 = 3,5 \text{ dm},$$

oder auch 
$$h = \frac{700}{80 \cdot 2,5} \text{ dm} = 3,5 \text{ dm}.$$

Die Einheitsrechnung dagegen operirt nach der Darstellung:

$$h = \frac{700 \text{ dm}^3}{80 \text{ dm} \cdot 2,5 \text{ dm}} = \frac{700 \text{ dm}^3}{200 \text{ dm}^2} = 3,5 \text{ dm}.$$

Die beiden Darstellungen unterscheiden sich in ihrer Anwendung darin, dass nach der ersten der Schüler sich klar vergegenwärtigen kann, was er tut, während er nach der zweiten rein mechanisch nach der gegebenen Schablone operiren muss, da er eine abstrakte Zahlrechnung und eine noch viel abstraktere Namenrechnung auszuführen hat. Ausserdem muss es auch hier für ihn verwirrend sein, dass er Kubikdezimeter durch Quadratdezimeter messen soll, was nach dem ihm bekannten und geläufigen Begriff des Messens gar nicht möglich ist.

Sind aber die bei uns eingeführten schriftlichen Bezeichnungen der Flächen- und Körpermasse nicht der Darstellungsweise der Einheitsrechnung angepasst, so dass sie diese voraussetzen? Für den Inhalt eines Quadrates gebrauchen wir die Darstellung  $s \cdot s$  oder  $s^2$ , für den Inhalt eines Würfels aber die Bezeichnung  $s \cdot s \cdot s$  oder  $s^3$ , wobei  $s$  die „Seitenlänge“ bezeichnet. Muss also nicht  $m^2$  folgerichtig  $m \cdot m$ , d. h. „Meter mal Meter“,  $m^3$  aber  $m \cdot m \cdot m$ , d. h. „Meter mal Meter mal Meter“ bedeuten? Wer diese Folgerung zieht, beweist damit nur, welche Konfusion entstehen kann, wenn man über dem Operiren mit Zeichen die wirkliche Sachlage aus den Augen verliert. Was wir mit  $s$  bezeichnen, ist eine Anzahl von Längeneinheiten, deren Sachname nicht angegeben ist;  $m$  aber ist die gemeinsame Sachbenennung von Längeneinheiten, deren Anzahl unbestimmt gelassen ist.  $s$  ist also ein Zahlname,  $m$  aber ein Sachname. Den Ausdruck  $s^3$  gebrauchen wir für den Inhalt eines Würfels, also für eine Vielheit von Körpereinheiten, deren Art und Grösse damit noch gar nicht bestimmt ist; die Bezeichnung  $m^3$  aber benennt Körpereinheiten nach ihrer Art und Grösse, ohne

ihre Anzahl zu bestimmen.  $s^3$  ist also ein Zahlname,  $m^3$  aber eine Sachbenennung. Dass  $s^3$  die Bedeutung *s.s.s* hat, ist dem Schüler leicht verständlich; wenn er aber angehalten wird,  $m^3$  als *m.m.m* aufzufassen, so wird er dies gläubig nachplappern, aber verstehen wird er's nicht. Dagegen gewinnt diese Bezeichnung für ihn einen verständlichen Sinn, wenn man ihm sagt, sie bezeichne einen würfelförmigen Körper von 1 *m* Länge, 1 *m* Breite und 1 *m* Höhe, also ein Raumgebilde mit drei gleichen Dimensionen, so dass 3 nicht eine Anzahl von Faktoren, sondern die Zahl der Ausdehnungen ist. In Deutschland werden die Flächen- und Körpermasse in der Weise bezeichnet, dass jedesmal dem Zeichen für die entsprechende Längeneinheit im ersten Falle ein *q*, im zweiten aber ein *c* (für Kubikmeter *cb*) vorgesetzt wird. Dort wäre also die Namenrechnung ganz einfach unmöglich.

Es wird aber geltend gemacht, die Einheitsrechnung sei nun einmal trotz aller gegen dieselbe ins Feld geführten Gründe zweckmässig, und was sich als nützlich erweise, dringe auch dann durch, wenn es auf Kosten des klaren Denkens geschehen müsse. Es könne ja nicht in Abrede gestellt werden, dass dieses Verfahren bei konsequenter Anwendung insbesondere auch dann zur richtigen Benennung führe, wenn die Dimensionen verschieden benannt sind. Wie ich nachgewiesen habe, kann aber die zutreffende Benennung vom Schüler bei richtiger Veranschaulichung ohne Schwierigkeit durch Beurteilung der Sachlage, also durch bildende Tätigkeit des Denkens erschlossen werden. Wenn man sich die Aufgabe stellt, bei der Feststellung der richtigen Namen die Mitbetätigung des Denkens auszuschliessen, dann allerdings ist der Mechanismus der Einheitsrechnung zweckmässig. Dass aber dieser Zweck pädagogisch gerechtfertigt sei, vermag ich nicht einzusehen. Ausserdem kann von konsequenter Anwendung der Einheitsrechnung keine Rede sein. Wenn es logisch und methodisch gerechtfertigt ist, Grösseneinheiten und ebenso ihre Sachnamen mit einander zu multiplizieren, so muss dies allgemein, also auch für ungleiche Masseinheiten und Namen gelten. Man multipliziert ja auch „Meter“ mit „Kilogramm“ und erhält als Resultat „Meterkilogramm“; man vervielfacht „Volt“ mit „Ampère“ und erhält „Volt-Ampère“. Warum sollte man da nicht auch „Meter“ mit „Dezimeter“ multiplizieren dürfen? Das Resultat ergäbe sich dann in „Meterdezimetern“, worunter man sich Rechtecke von 1 *m* Länge und 1 *dm* Breite vorzustellen hätte. Wer dieses letztere Verfahren als Fehler betrachtet und denselben durch die Multiplikation der Namen unmöglich machen will, sollte bedenken, dass der „Fehler“ in Wirklichkeit sich gerade auf die Namenrechnung stützen kann. Was würde

man wohl dazu sagen, wenn es den Schülern einfiel, zu behaupten, bei einem Preise von 6 Fr. per 1 Zentner habe man für 4 Zentner Kartoffeln „4 Zentner mal 6 Fr.“ zu bezahlen und dies gebe „24 Zentnerfranken“? Könnten sie nicht auch zu dem Schlusse kommen, wenn man für 5 m Tuch 40 Fr. bezahlen müsse, so koste 1 m „40 Fr. geteilt durch 5 m“ oder „8 Frankenmeterstel“? Müsste die Einheitsrechnung sie nicht auch auf „Quadratkilogramm“ und „Kubikfranken“ führen? Es ist doch leicht einzusehen, dass sich nach dieser Art zu rechnen gar nichts gegen diese absurden Benennungen einwenden liesse. Man kann freilich dem Schüler sagen, der Formalismus der Einheitsrechnen sei als solcher auch dann richtig, wenn er zu sinnlosen Benennungen führe; aber anwendbar sei er nur dann, wenn sich der Zeichenverbindung auf Grund der realen Sachlage ein verständlicher Sinn unterlegen lasse. Für Schüler aber, deren Neigung zur Denkräglichkeit durch die Anwendung der Namenrechnung systematisch gross gezogen würde, müsste dieser „verständliche Sinn“ sehr schwer verständlich sein. Man dürfte ihnen also auch nicht zumuten, durch eigenes Denken zu beurteilen, in welchen Fällen die Bezeichnungsweise der Einheitsrechnung einer verständlichen Deutung fähig sei, auf welche Realgebiete man sie also anwenden dürfe. Eine Mathematik, welche dem kritiklosen Glauben in solchem Masse Raum gewähren muss, ist wahrlich kein wertvolles Bildungsmittel.

Die Multiplikation der Grösseneinheiten und ihrer Benennungen mag für das ausgebildete Denken der Gelehrten in gewissen Fällen ein bequemer und unschädlicher Mechanismus sein, welcher ihnen einen Teil der Arbeit des Denkens erspart und für Dinge verwendbar macht, die ihnen wichtiger erscheinen, als das Zurückgehen auf die anschaulichen Elemente. Da sie vorzugsweise nach Regeln und Formeln operiren, so wird ihnen das Rechnen zu einem Operiren mit abstrakten Zeichen, welche sie nicht nur als symbolische Stellvertreter der Zahlen, sondern als „Zahlen“ betrachten. Die ausgebildete Systematik der arithmetischen Zeichensprache gestattet ihnen, das Rechnen mit wirklichen Zahlen durch ein nach formalen Gesetzen durchgeführtes Operiren mit Zeichen zu ersetzen und sich erst nachträglich bei der Anwendung der Frage zuzuwenden, welcher anschauliche und verständliche Sinn solchem Operiren zukomme. Bei der ihnen geläufigen, erweiterten Fassung der Zahl- und Operationsbegriffe hat es für sie einen, wenn auch nicht immer anschaulich, so doch begrifflich festgestellten Sinn, durch die Operationen nicht nur gegebene Grösseneinheiten zu zählen, sondern

Zahl- und Grösseneinheiten zu erzeugen. Bezeichnet man z. B.  $\sqrt{-1}$  als Einheit der imaginären Zahlenreihe mit  $i$ , so ist

$$2i \cdot 3i \cdot 4i \cdot 5i = 120i^4 = 120 \cdot 1 = 120.$$

Hier entsteht aus der imaginären Einheit  $i$  durch Multiplikation die reelle Einheit 1, wobei man aber unter Multiplizieren eine ganz andere Operation versteht, als diejenige, welche beim elementaren Rechnen mit diesem Namen bezeichnet wird. In ähnlicher Weise lässt man durch „Multiplikation“ Flächen aus Strecken, Körper aus Flächen und Strecken und zusammengesetzte Sachnamen aus einfachen entstehen.

Für das Rechnen der Volksschule aber ist das Zurückgehen auf die anschaulichen Elemente gerade die Hauptsache. Hier hat man den Schüler nicht anzuleiten, in welcher Weise das oft unbequeme Denken durch mechanisches Operieren ersetzt werden könne, sondern er hat an klarer Anschauung richtig denken zu lernen. Auf dieser Stufe ist das Operieren mit Zeichen immer dann und nur dann gerechtfertigt, wenn die zur Anwendung kommenden symbolischen Begriffe der zutreffende Ausdruck richtiger und klarer Anschauung sind. Dieser Forderung entsprechen die Darstellungen der Einheitsrechnung nicht, denn sie gründen sich auf verfehlte Deutung und mechanische Anwendung abstrakter Regeln, welche den Schüler von der richtigen Anschauung und der wirklichen Operation ablenken. Ausserdem geht die Verflüchtigung der Zahl- und Operationsbegriffe, welche die Einheitsrechnung voraussetzt, weit über das Verständnis des Schülers der Mittelschule mit abschliessendem Unterricht hinaus, so dass ihm diese Art des Rechnens als Ersatz für die richtige Anschauung und das klare Denken nichts zu bieten vermag als die leeren Schalen symbolischer Begriffe.