Zeitschrift: Bildungsforschung und Bildungspraxis : schweizerische Zeitschrift für Erziehungswissenschaft = Éducation et recherche : revue suisse des sciences de l'éducation = Educazione e ricerca : rivista svizzera di scienze dell'educazione

Herausgeber: Schweizerische Gesellschaft für Bildungsforschung

Band: 13 (1991)

Heft: 1

Artikel: Mathematik-Didaktik : wohin?

Autor: Dreyfus, Tommy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-786275

Mathematik-Didaktik: Wohin?

Tommy Dreyfus

In den letzten Jahren haben sich anschauliches Denken und empirisches Vorgehen als wichtige Komponenten der mathematischen Forschung herausgestellt. In diesem Artikel wird gezeigt, dass didaktische und kognitive Überlegungen auf die Wichtigkeit derselben zwei Komponenten für mathematische Lernprozesse hinweisen, und wie geeignete computerisierte Lernumgebungen diesen im Unterricht Rechnung tragen können. Es wird deshalb argumentiert, dass ein entsprechend aufgebauter Unterricht das Potential hat, die Schüler zu einem guten Verständnis für mathematische Strukturen zu führen.

In diesem Artikel werden Richtungen zur Lösung von grundlegenden Problemen der heutigen Mathematik-Didaktik vorgeschlagen. Die Anregung zu diesen Vorschlägen kommt von Entwicklungen in der mathematischen Forschung her; ihre Begründung hingegen stützt sich auf kognitive Erkenntnisse.

Verständnis oder Ritual in der Schulmathematik?

Das wohl wichtigste Problem, mit dem die Mathematik-Didaktik heute konfrontiert ist, betrifft die *Art* des Wissens, das im Unterricht erworben wird. Viele Schüler beherrschen zwar Rechenverfahren recht gut, oft fehlt ihnen aber ein tieferes Verständnis der grundlegenden Begriffe. Davis (1988), zum Beispiel, hat festgestellt, dass

> *when one looks carefully at how these «apparently successful» students deal with mathematical problems, one finds that they hold many grotesque misconceptions about mathematics, and produce many strikingly wrong answers and analyses (S. 14)*

und er erklärt dies dadurch, dass die Schüler und Schülerinnen sich daran gewöhnt haben, die Mathematik als eine Ansammlung von Ritualen zu betrachten. Davis beschreibt begabte Schüler einer zwölften Klasse; analoge Erscheinungen sind natürlich bei weniger begabten Kindern noch eher zu erwarten; sie wurden auch bei jüngeren Schülern (z.B. Wagner, 1981) und bei Universitätsstudenten (z.B. Amit & Vinner, 1990) festgestellt. In anderen Worten, diese unerwünschte Situation ist durchaus nicht auf bestimmte Schulstufen oder Schultypen beschränkt, sondern offenbart sich in mehr oder minder starker Ausprägung von der Primarschule bis zur Universität. Das Problem ist auch nicht auf bestimmte Länder begrenzt: In den USA wurde es in den letzten Jahren in speziell zu diesem Zweck gebildeten Gremien auf hohem Niveau durchdiskutiert (z.B. Steen, 1989); aber auch in der Schweiz (Blanchet & Tenthorey, 1989: «L'enfant reste au niveau de l'activité sans découvrir le concept sous-jacent») und in anderen Ländern (Strässer, Barr, Evans & Wolf, 1989) ist es akut.

Einer der Gründe für diese Erscheinung mag die Überfüllung der Lehrpläne sein. Neue Gebiete wie zum Beispiel Statistik wurden vielerorts dem Lehrplan zugefügt, ohne dass zum Ausgleich etwas anderes gestrichen wurde. Die Lehrer der Naturwissenschaften verlangen mehr und mehr Mathematik von zunehmend jüngeren Schülern; die Hochschullehrer erwarten mehr und mehr Stoffkenntnis, die schon auf der Sekundarstufe zu behandeln sei (siehe z.B. Tadmor et al., 1988). Hier soll jedoch nicht versucht werden, Lehrplanprobleme zu analysieren, sondern zu fragen, wie die Lage bei gegebenem Lehrplan verbessert werden kann. Zu diesem Zweck werden neuere Entwicklungen in der mathematischen Forschung und ihre Parallelen in der Mathematik-Didaktik aufgezeigt.

Anregungen aus der Mathematik

Die mathematische Forschung wurde in den letzten Jahren bereichert. Neue Technologien in der Computer-Graphik haben empirische Untersuchungen ermöglicht, die grundsätzlich qualitativ und anschaulich sind; als Beispiel mag die Forschung über nicht-lineare Systeme, Chaos und fraktale Geometrie dienen. Durch diese Entwicklung haben drei Aspekte der Mathematik stark an Bedeutung gewonnen, die auf die Mathematik-Didaktik einen Einfluss haben könnten:

(I) Anschauliche Denkweisen: Dieser Punkt wurde wohl am klarsten von Rival (1987) in seinem Artikel «Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning» gemacht. Die Nützlichkeit, ja die Notwendigkeit von anschaulichen Denkweisen in der mathematischen Forschung wurde auch von Devaney (1989) beschrieben. Er zeigt in eindrucksvoller Weise, wie er und drei Studenten dynamische Prozesse durch Folgen von Transformationen der komplexen Ebene beschrieben, mit Hilfe von Computerprogrammen graphisch dargestellt und dann verfilmt haben. Devaney schreibt, dass die Resultate dieser recht aufwendigen Experimente immer lohnend und mathematisch anregend waren und dass viele neue mathematische Resultate als direkte Folge dieser Experimente bewiesen wurden.

(II) Computergebrauch: Der gegenseitige Einfluss zwischen der Entwicklung von Computern und Mathematik ist ausserordentlich stark. Dem Mathematiker Steen (1988) zufolge, «the computer is now the most powerful force changing the nature of mathematics» (S. 612). Steen zeigt, dass einerseits Computer nur durch neue mathematische Erkenntnisse möglich und wirkungsvoll gemacht werden konnten, und dass andererseits gerade der Wunsch, Computer zu verbessern, zu erheblichen neuen Resultaten in der Mathematik geführt hat, und zwar nicht nur in der angewandten sondern auch in der reinen Mathematik. Als Beispiel mag die Theorie des Chaos und der Fraktale dienen. Diese beschreibt und erzeugt Strukturen einer neuen Geometrie, deren Hauptmerkmale Komplexität und Skaleninvarianz sind: Diese labyrinthartigen Strukturen sehen nach Vergrösserung im wesentlichen gleich aus wie vorher. Die Chaostheorie hat bei der Beschreibung komplexer Vorgänge in der Physik, der Meteorologie, der Biologie und anderer Wissenschaften Anwendung gefunden (Wissemann-Hartmann, 1989). Geometrische Strukturen von Pflanzen, Wolken etc. werden durch Transformationen erzeugt, die immer wieder (unendlich oft) repetiert werden. Wegen der Komplexität der Strukturen und der Notwendigkeit, die Transformationen oft zu repetieren, wurden die schrittmachenden mathematischen Entwicklungen in diesem Gebiet erst durch Computerexperimente möglich (Peitgen & Jürgens, 1989).
(III) Mathematik als empirische Wissenschaft: Der Videofilm in (I) und der Computer in (II) dienen dem Mathematiker als heuristisches Werkzeug, in ähnlicher Weise wie zum Beispiel ein Mikroskop dem Biologen dient: Als Apparat, der auf die interessanten Erscheinungen gerichtet und korrekt eingestellt werden muss, kann er dem Wissenschaftler, in unserem Fall dem Mathematiker, ein neues Bild dieser Erscheinungen geben und dadurch zu neuen Ideen und zur Erkenntnis von bisher unbekannten Zusammenhängen anregen. Solche Experimente können beliebig oft repetiert werden und zu immer neuen Vermutungen und Hypothesen führen; der Mathematiker wird dann natürlich versuchen, diese Hypothesen zu beweisen oder zu widerlegen.

Anschauliche Denkweise, experimentelle Auffassung der Mathematik und Computergebrauch sind eng miteinander verknüpft: Oft ist es der Computer, der dem Mathematiker als experimentelles Werkzeug dient: und oft wird dabei Computergraphik gebraucht, so dass das Experiment anschaulicher Art ist. Der Computer dient als Katalysator in einem Prozess, der experimentelle Methoden und anschauliche Denkweise zu einem machtvollen Werkzeug des forschenden Mathematikers vereinigt.

Diese Entwicklungen in der mathematischen Forschung können und sollen als Wegweiser zu möglichen Lösungen von Problemen in der Mathematik-Didaktik dienen. Ein solcher Einfluss der Spitzenforschung auf die Schule mag unwahrscheinlich anmuten, ist es aber deshalb nicht, weil dieselben Erscheinungen, die die Spitzenforschung beeinflusst haben, sich auch im täglichen Leben und am Arbeitsplatz des ‹Durchschnittsbürgers› bemerkbar machen: die Beherrschung von Rechenverfahren ist heute nicht mehr so wichtig wie früher, da diese Verfahren von Computern übernommen werden können. Demgegenüber erweist sich heute die Fähigkeit, Probleme zu lösen, als äusserst wichtig, und zwar vor allem Probleme, die nicht einem wohlbekannten Typ zugeordnet werden können. In diesem Fall erstreckt sich das Problemlösen von der Analyse des Problems über die Auswahl von Rechenverfahren bis hin zur Interpretation der Resultate, die oft graphisch sind. Oft sind dabei empirische Methoden angebracht, sowohl zum Verständnis eines Problems als auch bei der Beurteilung von Lösungsmethoden. Dafür ist unter anderem ein tiefgreifendes Verständnis der Rechenverfahren und ihrer Anwendungsbereiche notwendig.

Didaktische Folgen

Eine so veränderte Auffassung der Ziele des Mathematikunterrichts bedingt natürlich Änderungen in der Didaktik. Diese sollten zur Folge haben, dass die folgenden Aspekte im Mathematikunterricht betont werden:

* Suche nach Struktur
* Experimentelle Methoden
* Anschauliches Denken

Diese Liste enthält neben den oben schon genannten experimentellen Methoden und der anschaulichen Denkweise auch die *Suche nach Struktur*. Sie charakterisiert die Mathematik als Wissenschaft schlechthin (Steen, 1988), und wenn wir die Ideen der Mathematik vermitteln wollen, dann gebührt der Suche nach Struktur ein bevorzugter Platz in der Schule. Als eine Folge der Suche nach Struktur und vor allem der anschaulichen Denkweise muss in den Schülern und Schülerinnen die Fähigkeit zu *qualitativer Argumentation* entwickelt werden (Dreyfus & Eisenberg, 1990). Im Laufe der Suche nach möglichen Resultaten sind qualitative Aspekte wichtiger als quantitative. Zum Beispiel kommt es mehr darauf an, ob eine Funktion ansteigt, als auf den Wert der Steigung; es ist wichtiger, dass ein Rechteck beinahe quadratisch ist, als dass seine Seiten im Verhältnis 4:5 stehen, etc. Anschauliches Denken und qualitative Argumentation dürfen keinesfalls als «Verwässerung» der Mathematik aufgefasst werden, sondern im Gegenteil: die Absicht ist, das Detail im anschaulichen Denken sowie die Präzision in der qualitativen Argumentation zu fördern. Es soll nicht vergessen werden, dass diese Grundideen von der mathematischen Spitzenforschung beeinflusst sind; die dort verwendeten qualitativen Argumente sind sicherlich nicht oberflächlich, sondern «Scientific work always depends on the most scrupulous attention to detail even when qualitative aspects are being classified» (Peitgen und Richter, 1986, S. 7). Dass dies nicht einfach ist, soll nicht bestritten werden. Die kognitive und die erziehungswissenschaftliche Forschung haben gezeigt, dass das Verständnis visueller Darstellungen viele Schwierigkeiten bietet und seine eigenen Charakteristiken hat (Larkin & Simon, 1987; Gruet, Goldschmid, Rozmuski, 1988). Die zu solchem Verständnis nötige Anstrengung lohnt sich aber, da das Ziel dabei ist, dass die Schüler die wechselseitigen Beziehungen zwischen visuellen, verbalen und symbolischen Darstellungen desselben mathematischen Sachverhalts erfassen lernen und somit ein tieferes Verständnis dieses Sachverhalts erwerben.

Mathematische Mikrowelten

Diese Überlegungen führen in beinahe zwingender Weise zur folgenden didaktischen Situation: Der Schüler wird mit einer Lernumgebung konfrontiert, die ein mindestens teilweise bildliches Modell einer mathematischen Struktur enthält; der Schüler hat weitgehende Kontrolle über dieses Modell, so dass er geeignete Fragestellungen und Aufgaben selbsttätig bearbeiten kann. Solche Lernumgebungen werden auch «mathematische Mikrowelten» genannt (Thompson, 1985). Eine natürliche Weise, solche Umgebungen zu realisieren, ist, sie auf einem Computer zu programmieren. Der Computer ist hier aus folgenden Überlegungen ein wirksames Instrument: Mathematische Struktur kann gut, oft besser als mittels Papier und Bleistift, ja sogar besser als durch konkrete Modelle, wiedergegeben werden. (Dabei darf der Wert konkreter Modelle, vor allem für jüngere Schüler, nicht unterschätzt werden.) Experimentelle Methoden sind, genau wie in der Forschung, eng mit Computern verbunden; wenn der Computer richtig programmiert ist, können Ideen jederzeit ungestraft ausprobiert werden. Zusätzlich dazu besteht die Möglichkeit mit relativer Leichtigkeit auf einem Computerbildschirm mehrere miteinander verknüpfte Darstellungen desselben mathematischen Sachverhalts, insbesondere bildliche Darstellungen, gleichzeitig zu zeigen. Dies soll nun durch drei Kurzbeschreibungen erläutert und dann ausführlicher analysiert werden.

Die Integers Mikrowelt (Thompson & Dreyfus, 1988) ist ein Modell für die additive Gruppe der ganzen Zahlen; das Modell enthält eine visuelle Komponente sowie eine algebraische; die beiden Komponenten sind gekoppelt. Die visuelle Komponente besteht darin, dass eine Zahl im Modell durch eine Bewegung auf der Zahlgeraden dargestellt wird; die Rechenoperationen Addition und Subtraktion werden durch Komposition der entsprechenden Bewegungen dargestellt. Das Modell ist so konzipiert, dass es einerseits die wichtigen Einzelheiten der *mathematischen Struktur* im Detail darstellt und andererseits auch ohne Vorkenntnis dieser Struktur einfach zu benützen ist. Es kann deshalb sowohl von Primarschülern als auch von Studierenden der Gruppentheorie benützt werden.

Mikrowelt-Umgebungen bieten den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit, mit Mathematik zu experimentieren; dies soll mittels des Geometric Supposer illustriert werden. Schon der Name Supposer deutet auf die Absicht hin, den Kindern zu ermöglichen, *Vermutungen zu entwickeln und zu erproben.* Dies wird dadurch erreicht, dass es dem Schüler ermöglicht wird, geometrische Elemente und Figuren zu zeichnen oder zu konstruieren, die konstruierten

Figuren auszumessen und, vor allem, schon ausgeführte Konstruktionen an beliebigen, frei wählbaren Figuren zu wiederholen (Yerushalmi, Chazan, Gordon, Houde; 1986). Das Programm wird dazu zu einem einfachen und wirksamen Instrument für den Schüler, um auszuprobieren, wie allgemein gewisse Ereignisse sind. Zum Beispiel, kann die Eigenschaft, dass die Diagonalen eines Rechtecks sich gegenseitig halbieren, leicht darauf geprüft werden, ob sie sich auf andere Vierecke verallgemeinern lässt.

Das Triple Representation Model (TRM) (Schwarz, Dreyfus & Bruckheimer, 1990) ist eine Computer-Umgebung, die es den Lernenden erlaubt, Funktionen in drei *Darstellungen* wechselwirkend zu untersuchen. Dabei

> *the real focus of attention in TRM is on between and within representation relationships. The student learns by carrying out procedures in the algebraic, graphical and tabular representations, and by comparing the effects of a modification of a procedure in various representations.*

Zu diesem Zweck kann der Schüler, wenn er in einer bestimmten Darstellung arbeitet, jederzeit die anderen zwei Darstellungen inspizieren und dabei von dort Daten erhalten. Dies macht es leicht, im Laufe einer Problembearbeitung von einer Darstellung in eine andere, vorteilhaftere zu wechseln, ohne dabei die schon geleistete Vorarbeit einzubüssen. Dadurch wachsen die drei Darstellungen für den Schüler zu einer Einheit zusammen, dem Funktionsbegriff.

Die drei angeführten Beispiele wurden gewählt, um drei Design-Komponenten zu illustrieren: Die Struktur des mathematischen Inhalts, den explorativen Charakter der Aktivitäten und die Existenz mehrerer gekoppelter Darstellungen. Diese drei Komponenten sind, in unterschiedlichem Mass, auch im Design vieler anderer Lernumgebungen massgebend.

Um diese drei Komponenten zu begründen, gehen wir von der Annahme aus, dass das Ziel des Unterrichts ein gutes Verständnis einer Anzahl mathematischer Begriffe und ihrer gegenseitigen Beziehungen ist, möglicherweise auch die Fähigkeit, weitere solche Beziehungen selbständig zu entdecken. Ein solches Verständnis wird am ehesten erreicht, wenn der Schüler die Gelegenheit hat, diese Begriffe und Beziehungen in aktiver Weise kennenzulernen; es soll ihm also Zugang zu den Begriffen und Beziehungen verschafft werden. Mathematische Begriffe, und a fortiori Beziehungen zwischen Begriffen, sind aber meist abstrakt; deshalb muss ein Modell verwendet werden. Die Komponente «Struktur des mathematischen Inhalts» bezieht sich darauf, dass das Modell die Begriffe und Beziehungen wiedergibt; dabei muss diese Wiedergabe nicht nur den mathematischen Inhalt, sondern auch die Lernziele berücksichtigen. Deshalb müssen die mathematischen Inhalte beim Design einer Lernumgebung einer ausserordentlich detaillierten Analyse mit Blick auf die Lernziele, die angestrebt werden sollen, unterzogen werden. Eine solche Analyse und die Konstruktion geeigneter Modelle wird dadurch ermöglicht, dass diese sich auf eine ganz bestimmte, wohl abgegrenzte Anzahl von zusammenhängenden Begriffen beschränken.

Die Wiedergabe der abstrakten mathematischen Struktur muss natürlich in irgendeiner Weise durch konkrete Objekte bewerkstelligt werden. Es muss also eine bestimmte Darstellung der mathematischen Struktur gewählt werden. Jede solche Darstellung gibt die mathematische Struktur nur teilweise wieder.

Hier ist eine weitere detaillierte Analyse angebracht, um festzustellen, welche Darstellungen die in den Lernzielen enthaltenen Aspekte der Struktur betonen. In vielen Lernumgebungen werden mehrere Darstellungen gekoppelt; dies hat viele Gründe: Jede Darstellung betont andere Aspekte und macht daher ihren spezifischen Beitrag zur Lernumgebung. Wichtiger ist, dass die abstrakte mathematische Struktur eben nicht in den Darstellungen, sondern in denjenigen Eigenschaften enthalten ist, die allen Darstellungen gemeinsam sind. Ein Verständnis der abstrakten Begriffe kann also überhaupt nur durch Bekanntschaft mit mehreren Darstellungen erreicht werden. Dies ist allgemein so in der Mathematik und hat nichts mit Lernumgebungen zu tun (Janvier, 1987). Computerisierte Lernumgebungen machen nur die gleichzeitige Arbeit in mehreren Darstellungen besonders einfach. Es bietet sich hier die Gelegenheit, eine oder mehrere bildliche Darstellungen zu wählen und somit der oben erhobenen Forderung nach Betonung von anschaulichen Denkweisen im Lernprozess gerecht zu werden. Wegen der Fortschritte, die in den letzten Jahren in Computergraphik erreicht wurden, werden diese Gelegenheiten immer reicher. Es sollte vielleicht hier betont werden, dass diese Bemerkungen über Darstellungen nicht nur für Strukturen der fortgeschrittenen Mathematik, wie zum Beispiel algebraische Gruppen, gelten, sondern schon für die ersten Begriffe der Schulmathematik, die von Psychologen als additive und multiplikative Strukturen beschrieben werden (Vergnaud, 1981, Resnick & Omanson, 1986).

Lernumgebungen im obigen Sinne sind zwar geschlossene Systeme, da die Schüler und Schülerinnen die Grenzen des modellisierten mathematischen Bereichs nicht überschreiten kann, ohne die Lernumgebung zu verlassen; sie sind aber offen in dem Sinne, dass dem Schüler innerhalb dieses Bereichs keine Beschränkungen auferlegt werden. Die Umgebung schreibt weder Aufgaben noch Methoden zu deren Lösung vor; dies befreit den Schüler vom Zwang, richtig zu antworten, und gibt ihm die Möglichkeit, der Intuition zu folgen, sich zu fragen «Was passiert, wenn...?»; deshalb gibt eine Lernumgebung auch keinen bewertenden Feedback. Der Feedback, den der Schüler erhält, basiert ausschliesslich auf der Mathematik: Der Computer führt die Aktionen aus, die der Schüler wählt; die Bewertung des Resultats einer Aktion ist in der Antwort auf die Frage «Ist das passiert, was ich erwartete?» enthalten. Dies führt erfahrungsgemäss zu einer intensiven Wechselwirkung zwischen dem Computer, d.h. der Lernumgebung, der Mathematik, einerseits und dem Schüler, der versucht, diese Mathematik zu verstehen, andererseits. Die Initiative ist weitgehend beim Schüler (oder, zum Beispiel mittels geeigneter Aufgabenstellung, beim Lehrer). Der Schüler beschliesst über seine mathematischen Aktionen und übt darüber volle Kontrolle aus. Mathematik wird so für den Schüler zur empirischen Wissenschaft: Die Lernumgebung ist ein mathematischer Spielplatz; die Begriffe, im Modell dargestellt durch Objekte, sind die Spielzeuge; der Schüler ist frei, auf diesem Spielplatz zu tun was er beliebt, solange er innerhalb der (mathematischen) Spielregeln bleibt.

Schlussbemerkungen

Mathematische Mikrowelten sind also Lernumgebungen, in welchen die drei Aspekte der Suche nach Struktur, der anschaulichen Denkweise und der Mathematik als einer experimentellen Wissenschaft auf natürliche und wirksame Weise in die Praxis umgesetzt werden können. Die weitreichende und möglicherweise folgenreiche Entwicklung in der Didaktik, die dadurch angetönt wird, bringt viel Unbekanntes mit sich. Deshalb sollte sie von Bildungsforschung begleitet werden. Dabei sind kognitive Fragen sehr wichtig, aber auch soziale und affektive Komponenten des Lernens dürfen nicht übersehen werden. Die Entwicklung der oben erwähnten Lernumgebungen wurde von Forschungsprojekten begeleitet, welche in den zitierten Arbeiten beschrieben sind und auf einen weitgehenden Lernerfolg hinweisen. Eine für solche Projekte repräsentative Schlussfolgerung ist, dass die Schüler ein tieferes Verständnis gewinnen, ohne dass dadurch ihre Fähigkeit, Berechnungen auszuführen, beeinträchtigt wird (z.B. Tall, 1986).

In diesem Artikel wurde die mathematisch-fachliche Seite beleuchtet und ihr Einfluss auf didaktische Fragen aufgezeigt. Eine parallele Analyse kognitiver Fragen führt zu ähnlichen Forderungen und Folgerungen:

> *Indeed, the overall approach is to link such abstract representations explicitly with those already established to form a smooth ramp upward from the concrete to the abstract, where movement on that ramp is accomplished through student initiated actions on those representations, and where* the students themselves *inspect the consequences of their actions in whichever representation* they *deem appropriate (Kaput, Luke, Poholsky & Sayer, 1987, S. 284).*

Die veränderte Didaktik bedingt auch starke Veränderungen in der Lehrerrolle. Eine zentrale Frage ist, welches Mass der Kontrolle über Aktivitäten der Schüler beim Lehrer bleiben soll und, dementsprechend, wieviel Verantwortung auf den Schüler übertragen werden soll. Es ist offenkundig, dass keine allgemeine Antwort auf diese Frage gegeben werden kann; aber in vielen Fällen dürfte eine Kompromisslösung angebracht sein, bei der der Lehrer durch Aufgabenstellungen am Anfang einer Stunde den Schülern eine Arbeitsrichtung weist und am Ende der Stunde die Arbeit und deren Resultate mit den Schülern durchbespricht. (Für eine diesbezügliche Fallbeschreibung siehe Dreyfus & Halevi, im Druck.)

Die hier diskutierte Entwicklung der Mathematikdidaktik orientiert sich zwar an Entwicklungen in der mathematischen Forschung, baut aber auf didaktischen und psychologischen Grundlagen auf. Es wurde argumentiert, dass eine solche Entwicklung das Potential hat, zur Lösung des oben erwähnten Hauptproblems der Mathematikdidaktik beizutragen, nämlich zu einem tieferen Verständnis der grundlegenden mathematischen Begriffe zu führen und dadurch zu einer erhöhten Fähigkeit, nicht routinemässige Probleme zu lösen. Wohldurchdachte Lernumgebungen ermöglichen den Gebrauch und die dynamische Verknüpfung von mehreren Darstellungen in einer Art, die mit statischen Medien wie Büchern und Wandtafeln nicht zu erreichen ist. Durch die

Betonung der intuitiven, anschaulichen Grundlagen sowie die Flexibilität, in verschiedenen Darstellungen zu denken, wechselt die Orientierung des Mathematikunterrichts vom Rechenverfahren zum Verständnis der mathematischen Struktur. In einer solchen Lernumgebung können Schüler ihr Verständnis der Mathematik in einer Weise erproben und auskundschaften, die den Methoden gleicht, welche Wissenschafter bei der Prüfung ihrer Hypothesen anwenden. Mikrowelt-Umgebungen sind ein Labor der experimentellen Mathematik.

Adresse des Verfassers: Universität Fribourg, Institut für Mathemtik, Pérolles, 1700 Fribourg

Références

Amit Miriam & Shlomo Vinner (1990), Some misconceptions in calculus – anecdotes or the tip of an iceberg? In T. Navarro di Mendicutti (Ed.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I (pp. 3–10) Mexico.

Blanchet A. & F. Tenthorey (1989), Perspectives de recherches et illustration dans le champ des mathématiques et de l'informatique intégrée, *Bulletin der SSRE/SGBF* No. 3/1989, p. 14.

Davis Robert B. (1988), The interplay of algebra, geometry, and logic, *Journal of Mathematical Behavior 7*, 9–28.

Devaney, Robert L. (1989), Film and video as a tool in mathematical research, *The Mathematical Intelligencer 11* (2), 33–38.

Dreyfus, Tommy & Theodore Eisenberg (1990). Conceptual calculus: fact or fiction? *Teaching Mathematics and its Applications 9* (2), 63–67.

Dreyfus, Tommy & Tirza Halevi (in press). QUADFUN – A case study in pupil-teacher interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching.*

Gruet Florence, Marcel L. Goldschmid & Jan Rozmuski (1988), Graphisation des images mentales schématiques dans le traitement des problèmes scientifiques, *Bildungsforschung und Bildungspraxis 10* (2), 222–243.

Janvier, Claude (Ed., 1987), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, James J., Clifton Luke, Joel Poholsky & Aline Sayer (1987), Multiple representations and reasoning with discrete intensive quantities in a computer-based environment, in Jacques C. Bergeron, Nicolas Herscovics, & Carolyn Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Vol. II* (pp. 289–295), Montreal, Canada.

Larkin, Jill H. & Herbert A. Simon (1987), Why a picture is (sometimes) worth ten thousand words, *Cognitive Science 11*, 65–99.

Peitgen, Heinz-Otto & Peter Richter (1986). *The Beauty of Fractals*, Berlin: Springer.

Peitgen, Heinz-Otto & Hartmut Jürgens (1989), Fraktale: Computerexperimente (ent-) zaubern komplexe Strukturen, *Mathematik Unterricht 5*, 20–43.

Resnick, Lauren B. & S. F. Omanson (1986), Learning to understand arithmetic, in Robert Glaser (Ed.) *Advances in Instructional Psychology* (vol. 3), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rival, I. (1987), Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning, *The Sciences 27*, 41–46.

Schwarz, Baruch, Tommy Dreyfus & Maxim Bruckheimer (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers and Education* 14 (3), 249–262.
Steen, Lynn Arthur (1989), *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* Washington, D.C.: National Academy Press.
Steen, Lynn Arthur (1988), The science of patterns, *Science 240* (April 1988), 611–616.
Strässer, Rudolf, George Barr, Jeffrey Evans & Alison Wolf (1989), Skills versus understanding, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 21* (6), 197–202.
Tadmor, Zeev, Zvi Kohavi, Avinoam Libai, Paul Singer & David Kohn (1988), *Engineering Education 2001,* Haifa, Israel: The Neaman Press.
Tall, David (1986). *Building and Testing an Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics.* PhD thesis, Warwick University.
Thompson, Patrick W. (1985), Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula, in Edward A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 189–236), Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Thompson, Patrick W. & Tommy Dreyfus (1988), Integers as transformations, *Journal for Research in Mathematics Education 19* (2), 115–133.
Vergnaud, Gérard (1981), Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 2* (2), 215–231.
Wagner Sigrid (1981), Conservation of equation and function under transformation of variable, *Journal for Research in Mathematics Education 12* (2), 107–118.
Wissemann-Hartmann, Cornelia (1989), Chaos: Eine kleine Einführung in eine grosse Theorie, *Mathematik Unterricht 5,* 4–19.
Yerushalmi, Michal, Daniel Chazan, Myles Gordon & Richard Houde (1986), Microcomputer-centered plane geometry teaching: A Preliminary Study, in Glenda Lappan & Ruhama Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 184–189). East Lansing, MI: Michigan State University.

Où va la didactique des mathématiques?

Résumé:

Pendant les dernières années, la réflexion visuelle et les procédés expérimentaux se sont avérés importants pour la recherche mathématique. Cet article utilise des arguments didactiques et cognitifs qui montrent que ces mêmes deux processus, réflexion visuelle et procédé expérimental, sont importants dans l'apprentissage des mathématiques. Nous montrons aussi comment un certain type d'environnement sur ordinateur peut contribuer à l'implémentation de ces processus à l'apprentissage en classe. Nous montrons ensuite que dans de telles classes les élèves ont la possibilité de parvenir à une bonne compréhension des structures mathématiques.

Some trends in the didactics of mathematics

Summary:

Visual thinking and empirical procedures have recently received added importance in mathematical research. In this article we observe that cognitive and didactic findings point to the importance of the same two processes, visual thinking and empirical procedure, for mathematics learning. It is also shown how suitable computerized learning environments contribute to the implementation of these processes in the classroom; we argue that in such classrooms the potential exists for students to reach a good understanding of mathematical structures.