Zeitschrift: Jahrbuch der Reallehrerkonferenz des Kantons Zürich

Band: - (1938)

Artikel: Aufgabe und Gestaltung des Unterrichts im Kopfrechnen : mit einem methodischen Aufbau des Stoffes für das vierte bis sechste Schuljahr

Kapitel: Aufgabe und Gestaltung des Unterrichts im Kopfrechnen

Autor: Honegger, Robert / Bresin, Otto / Klauser, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-819621

A. AUFGABE UND GESTALTUNG DES UNTERRICHTS IM KOPFRECHNEN

VON DR. ROBERT HONEGGER

I. Vorbetrachtung.

Ziel des Unterrichts ist die Entwicklung des geistigen Lebens. Diese bekundet sich in der Erweiterung und Vertiefung der Bewußtseinszusammenhänge, in denen wir das Wirken in seiner Vielgestaltigkeit nach Form und Inhalt erfassen. Der Erfolg der Bildungsarbeit offenbart sich somit in der Ausgestaltung der bereits bestehenden, bewußten Wirkensgemeinschaft. Diese Entwicklung vollzieht sich aber nicht von selbst, sie ist vielmehr das Ergebnis der Betätigung des geistigen Lebens, die auf Grund innerer und äußerer Antriebe erfolgt. In der Lebensbetätigung des Menschen besteht ursprünglich und unlösbar das eigene Wirken mit anderem, ihm entgegentretendem Wirken zusammen. Durch die dem Menschen zukommenden Einwirkungen wird der bestehende Zustand des geistigen Wirkens verändert, vor Widerstände gestellt und zu Gegenwirkungen aufgerufen. Im Sosein des bestehenden Wirkens tritt ein Anderssein hervor. Dadurch wird Spannung erzeugt und bei hinreichender Gleichheit und Verschiedenheit der ineinander hervortretenden Wirkenszustände ein Zusammenwirken ermöglicht, das zur Gestaltung neuen Lebens führt. Der menschliche Geist offenbart sich in dieser gestaltenden Tätigkeit als ein in der Veränderung sich behauptendes Wirken und damit als ein Sein und Werden[1].

Der sich entwickelnde Mensch steht unter dem Einfluß einer bestimmt gearteten naturalen und personalen Umwelt. Bestimmend wirkt insbesondere die Lebensbetätigung der mit ihm zusammenlebenden Menschen, in der bereits geistig gestaltetes Wirken einen Ausdruck gewinnt. Der in der natürlichen Lebensgemeinschaft vorgelebte, dargestellte und dargebotene Geist reicht aber nicht aus, um das unentwickelte Kind zu jener hinreichenden Entwicklung des geistigen Lebens zu führen, die es ihm dereinst gestattet, sich als selbständiges Glied in die Gemeinschaft der Erwachsenen einzufügen. Um dieses Ziel erreichen zu können, bedarf es des Unterrichts, der die notwendigen und hinreichenden Entwicklungsimpulse vermittelt, welche, bewußt und planmäßig gewählt, den Erwerb des elementaren, wesenhaften Kulturgehaltes ermöglichen. Jenes Wissen und Können, das die geistigen Grundlagen der Gemeinschaft darstellt, bezeichnen wir als Unterrichtsstoff. Er wird in einzelne Lehrfächer aufgegliedert, von denen jedes einen Inbegriff gleichartiger geordneter Betätigungsweisen darstellt, die auf Grundbetätigungen beruhen, welche sich gliedern und verzweigen und in ihrer Gliederung und Verzweigung vielgestaltig in sich zusammenhängen.

Die Grundfrage des unterrichtlichen Gestaltens lautet: Wie ist der Stoff beschaffen, d. h. auf welchen geistigen Betätigungen beruht er, und

[1] Lipps, G.F., Das Wirken als Grund des Geisteslebens und des Naturgeschehens, S.26 ff.

wie muß er gestaltet werden, damit er für die Entwicklung des Zöglings im Hinblick auf die näheren und ferneren Ziele wirksam werden kann? Sie zeigt, daß eine dreifache Orientierung notwendig ist: eine logisch-stoffliche Besinnung, die zu den Grundlagen und damit zum Wesensgehalt und zum Aufbau des Stoffes vorzudringen versucht, eine psychologische Besinnung, welche auf die in der Beschaffenheit des geistigen Lebens des Kindes gegebenen Möglichkeiten des Erfassens gerichtet ist und eine teleologische Besinnung, welche zur Bestimmung der näheren und ferneren Ziele führt. Durch das Zusammenwirken dieser Betätigungen wird jene planmäßige Leitung möglich, die darin besteht, daß im Hinblick auf den Stoff, den Zögling und die Ziele die richtigen Mittel zur Förderung der Entwicklung gewählt werden.

Das Eindringen in die Grundlagen, den Aufbau und in die Eigengesetzlichkeit des Stoffes ist vor allem in jenen Fächern Grundvoraussetzung für eine wirkungsvolle unterrichtliche Gestaltung, deren Inhalte in strenger Folgerichtigkeit geordnet sind. Das ist beim mathematischen Stoff der Fall. Eine in die Logik der Sache eindringende Besinnung, die über die allgemeinen Grundlagen des mathematischen Denkens und den inneren Zusammenhang der aus ihnen ableitbaren, streng nach Grund und Folge gefügten besonderen Denkformen Klarheit erstrebt, ist Voraussetzung für die Vermittlung einer grundlegenden Bildung. Durch die logische Entwicklung des Zahlbegriffs wird der Gang der unterrichtlichen Arbeit im wesentlichen vorgezeichnet. Wir stimmen darum Ritthaler vorbehaltlos zu, wenn er sagt: „Die vom selbsttätigen Stofferwerb ausgehende erziehliche Wirkung kann er (der Lehrer) dem Rechenunterrichte nur dann sichern, wenn er sich über die seelischen Vorgänge bei der Rechenarbeit im klaren ist. Diese Verinnerlichung des Rechenstoffs nach seiner psychologischen Seite setzt aber notwendig eine Beherrschung des Stoffs nach seiner logischen Seite voraus, also den vollen Überblick über denselben, eine denkrichtige Zergliederung in kleinste selbständige, abgeschlossene Stoffeinheiten und eine klare Einsicht in deren inneren Zusammenhang“[1].

II. Das Wesen der elementaren mathematischen Begriffe.

G. F. Lipps hat in seinen Abhandlungen über die logischen Grundlagen der Mathematik[2] gezeigt, daß die elementaren mathematischen Begriffe reine Ausgestaltungen jener Grundform des Denkens darstellen, die zum Zusammenhang von Bestimmungen führt. Diese Grundform ist das Erfassen des einen im andern. Damit wir das eine im andern erfassen können, müssen wir vom einen zum andern fortschreiten. In diesem Fortgang besondert

[1] Ritthaler, A., Praxis des grundlegenden Rechenunterrichts, II. Teil, Einleitung S. IV.

[2] Lipps, G. F., Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. Philosoph. Studien, herausgegeben v. W. Wundt. Mythenbildung und Erkenntnis. Weltanschauung und Bildungsideal.

sich das eine vom andern, zugleich aber wird das eine mit dem andern verknüpft. Durch diese Verknüpfung tritt das eine zum andern in die Beziehung des Grundes zur Folge. Besonderung und Verknüpfung sind aber nur möglich, wenn das eine mit dem andern auch zusammenbesteht. Wir müssen überdies beachten, daß dieses Fortschreiten, bei dem wir das eine vom andern unterscheiden, das eine mit dem andern verknüpfen und das Zusammenbestehen des einen und des andern erfassen, immer wieder in gleicher Weise vollziehbar ist. Dieser gleichförmig sich erneuernde Fortgang führt alsdann zu einer Reihe gleichwertiger Glieder, deren unterscheidbare Gegenständlichkeit auf ihrer Stellung in dieser Reihe beruht.

Dieses Fortschreiten ist das Zählen, und die im Fortschreiten erzeugte Reihe ist die Zahlenreihe. Die Zahlen bezeichnen zunächst die Glieder in ihrer Aufeinanderfolge. Sie sind somit ursprünglich nur Stellenzeichen. Auf Grund des Unterscheidens und Verknüpfens treten sie zueinander in die Beziehung des Grundes zur Folge und werden damit Glieder einer objektiven Ordnung. Diese Ordnung wird ermöglicht, weil jedes Glied durch die Vermittlung der Zwischenglieder auf das Anfangsglied zurückweist, zugleich den andern Gliedern gegenüber tritt, so daß jedes seine eindeutig festgelegte Stellung in der Reihe erhält. Jedes Glied erhält auf Grund dieser Beziehung Bedeutung als Ordnungszahl. Beim Fortschreiten kommt neben dem Erfassen der Ordnungsbedeutung auch das Erfassen des Zusammenbestehens der gezählten Glieder als Vielheit und damit als Anzahl zur Geltung. Die Zahlen erfüllen somit nicht nur die Funktion der Stellenbezeichnung für die im Fortschreiten vom einen zum andern erfaßten Glieder der Reihe, bei dem nur der Zusammenhang in formaler Hinsicht, ohne Bezugnahme auf die objektive Beschaffenheit des einen und des andern, beachtet wird. Sie gewinnen überdies Bedeutung als Ordnungszahlen und Anzahlen. In den Zahlen findet die Grundfunktion unseres Denkens eine vollkommene Ausgestaltung. Sie führt zur einfachsten Form logischer Ordnung, die in der Zahlenreihe eine objektive Existenz erhält.

Die von G. F. Lipps gegebene Ableitung zeigt, daß die Zahlenreihe kein willkürliches Erzeugnis des menschlichen Geistes darstellt und weder auf die Anschauungsform des Raumes noch auf die der Zeit zurückführbar ist. Sie hat ihren Ursprung in der Grundform des geistigen Lebens, die sich als ein immer wieder in derselben Weise vollziehbares Erfassen des einen im andern bekundet und erweist sich „als die notwendig auftretende, allgemein zur Geltung kommende und einzigartige Grundlage aller und jeder Reihenbildung...“. Sie geht von einem Anfangsglied aus, erstreckt sich ins Unendliche und wird durch jedes Glied eindeutig bestimmt. Da jedes neue Glied durch den Vollzug derselben Bestimmung als Folge aus dem Grunde hervorgeht, bieten sich Grund und Folge als identische Glieder dar. Die homogene Beschaffenheit offenbart sich somit als eine weitere Grundeigenschaft der Zahlenreihe.

Sie ermöglicht die vollendete Darstellung und Bezeichnung der Reihe, wie sie im Positionssystem vorliegt. Die Erfindung des Zahlsystems ist eine bewunderungswürdige, geniale Leistung des menschlichen Geistes. Sie gibt die Antwort auf die Frage, wie mit wenig Zeichen eine vollkommene Darstellung der Zahlenreihe erreicht werden kann. Würden wir bloß die Reihe kennen, dann brauchten wir für die Bezeichnung jedes Gliedes ein besonderes Stellenzeichen. In diesem Falle wäre schon für die Darstellung eines relativ kleinen Bruchstückes eine große Anzahl verschiedener Zeichen und Namen nötig, die dauernd festgehalten werden müßten. Dadurch würde das Rechnen enorm erschwert. Unser System erreicht die Lösung des oben gekennzeichneten Problems durch die Markierung der aufeinanderfolgenden Stellen der Reihe mit Hilfe der gleichen, immer wiederkehrenden Zeichenfolge, wodurch die Reihe zunächst in Folgen gleicher Art aufgegliedert wird. Wenn wir an Stelle der Zahlzeichen die Zeichenfolge a, b, c wählen, so erhalten wir folgende Darstellung[1]: a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, . . Die Folgen a, b, c bilden ihrerseits eine Reihe. Die Glieder dieser Reihe können wiederum durch die gleiche Folge von Zeichen dargestellt werden. Indem wir dieses Verfahren immer wieder anwenden, erhalten wir folgendes Schema, in dem das Bildungsgesetz klar zur Geltung kommt:

$$\underbrace{\underbrace{a,\ b,\ c,}_{a}\ \ \underbrace{a,\ b,\ c,}_{b}\ \ \underbrace{a,\ b,\ c,}_{c}}_{a}\ ,\ \ \underbrace{\underbrace{a,\ b,\ c,}_{a}\ \ \underbrace{a,\ b,\ c,}_{b}\ \ \underbrace{a,\ b,\ c,}_{c}}_{\substack{b\\a}}\ ,\ \ldots$$

Dieses Schema zeigt, daß durch die gesetzmäßig bestimmte Aufgliederung der Reihe in Folgen gleicher Art und durch die immer wiederholbare Zusammenfassung der neu auftretenden Folgen Einheiten niederer und höherer Ordnung auftreten. Diese Einheiten selbst bilden eine Folge von Stufen. Genau so wie wir innerhalb der Reihe von einem erreichten Glied zu einem neuen weiterschreiten, können wir im System immer wieder zu einer neuen Stufe gelangen. Wichtig ist, daß wir immer wieder die gleiche Zeichenfolge verwenden. Dabei ist es zweckmäßig, wenn wir zur Bezeichnung der Stellen der ursprünglichen Reihe den Buchstaben a oder b oder c, der die Folge a, b, c markiert, für das Endglied dieser Folge einsetzen. Das Endglied fällt dann weg, und die leere Stelle wird durch einen Strich (–) angedeutet, bis sie durch die Glieder der nächsten Folge ausgefüllt wird. Es ergibt sich so für die Bezeichnung der aufeinander folgenden Stellen der Reihe die folgende Darstellung:

a, b, a–, aa, ab, b–, ba, bb, a– –, a – a, a – b, a a –, a a a, a a b, .

Wenn wir die Buchstaben durch die Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und den Strich durch das Nullzeichen ersetzen, erhalten wir die Bezeichnungsweise unseres Positonssystems. Diese Ableitung zeigt, daß die Null ein Hilfszeichen ist, das die durchlaufene Stufe kennzeichnet. Es erfüllt somit

[1] Lipps, G. F., Mythenbildung und Erkenntnis, S. 107 ff.

in der Darstellung der Reihe durch eine Folge von Zeichen die ordnende Funktion, indem es ihnen eine bestimmte Stelle zuweist, die über ihren Wert entscheidet. Da sich in der Position des Zeichens dessen Wert bekundet, ist unser Zahlsystem ein Positionssystem. Da immer 10 Einheiten gleicher Ordnung zu einer neuen höheren Einheit zusammengefaßt werden, erweist es sich zugleich als ein dekadisches System.

Es ist keine leichte, aber eine grundlegend wichtige Aufgabe, den Schüler in das Bildungsgesetz der Zahlen einzuführen. Er muß die gesetzmäßige Aufgliederung der Reihe in eine Folge von Stufen verstehen lernen, die durch das immer wieder vollziehbare Zusammenfassen von 10 Einheiten gleicher Art zu einer höheren Einheit erfolgt. Zudem muß er erkennen, daß der Wert der Ziffer von ihrer Stellung abhängig ist. Wir können ihm die Einsicht in den Stufenbau dadurch vermitteln, daß wir die Zeichen für die aufeinanderfolgenden Stellen der Reihe durch Gegenstände (Strecken, Scheiben, Würfel, Stäbchen usw.) darstellen und diese Grundeinheiten zu höheren Einheiten zusammenfassen, wobei die verschiedenwertigen Einheiten durch wechselnde räumliche Ausdehnung, Farbe und Form betont werden. Es ist vorteilhaft für die Auffassung der Ordnungsbedeutung des Systems, wenn zunächst die reihenförmige Anordnung der Einheiten über den Zehner hinaus festgehalten wird. Später kann die Gruppierung, bei der die neue Einheit durch den Wechsel der Form betont wird, zur Geltung kommen. Die Reihenform bleibt beispielsweise gewahrt bei Verwendung der Längenmaße, die Gruppierung erfolgt beim Heer'schen Würfel, der die Einer durch den cm^3-Würfel, den Zehner durch den aus 10 cm^3 gebildeten Stab, den Hunderter durch die aus 10 solchen Stäben gebildete Platte, den Tausender durch den aus 10 solchen Platten zusammengesetzten Würfel darstellt. Wichtig ist, daß wenigstens zur Einführung Darstellungsmittel gewählt werden, bei denen in der höheren Einheit die niederen Einheiten sichtbar werden. Aus diesem Grunde ist es angezeigt, daß das Münzsystem erst später verwendet wird.

Schwieriger als die Vermittlung der Einsicht in den Aufbau des Systems aus verschiedenwertigen Einheiten ist die Einführung in die Zahlschreibung. Die Auffassung des Stellenwertes der Ziffer und der Bedeutung der Null sind rein gedankliche Leistungen, die wir wohl auf räumlich dargestellte Einheiten anwenden, nicht aber aus der Anschauung ableiten können. Hier sind wir gezwungen, dem Schüler durch Darbietung zu zeigen, daß rechts immer die Einer, links davon die Zehner usw. stehen, und daß beim Fehlen von Einheiten der Platz durch die Null ausgefüllt wird.

Die homogene Beschaffenheit gestattet das Zusammenfassen der Einheiten zu Vielheiten und das Inbeziehungsetzen dieser Vielheiten. Dieses erweist sich als ein aus der Grundbeziehung des Zählens ableitbares, von Gesetzen beherrschtes und in verschiedener Weise vollziehbares Vorwärts- und Rückwärtsschreiten in der Zahlenreihe, das in den Operationen zur Geltung kommt, in denen die Zahlen in verschiedener Weise zueinander in Beziehung gesetzt werden. Der Vollzug der Operationen ermöglicht die

Einordnung der zueinander in Beziehung gesetzten Zahlen in das System, so daß die gegebene Beziehung der gegebenen Zahlen durch einen Systemwert ausgedrückt werden kann. So ist die Addition ein aus dem Zählen sich sonderndes Weiterschreiten, durch das ein gegebenes Intervall der Reihe mit bekannter Gliederanzahl um ein anderes Intervall, dessen Anzahlwert ebenfalls gegeben ist, erweitert werden soll. Der Sachverhalt kann durch das folgende Beispiel verdeutlicht werden: $8+7=?$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
								↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
								1	2	3	4	5	6	7
								Zuordnung Glied für Glied						
								.	2	.	.	.	.	5
								Zuordnung absatzweise						
								.	.	.	.	.	.	7
								Zuordnung im ganzen						

Die formelhafte Fixierung der vollzogenen Operation $8+7=15$ bedeutet, daß das um 7 Glieder erweiterte Intervall mit dem Anzahlwert 8 wertgleich ist mit dem Gesamtintervall, das 15 Glieder enthält. $+$ bezeichnet den Prozeß des Weiterschreitens, durch den die Glieder des zweiten Intervalls einzeln, absatzweise oder im ganzen den auf 8 folgenden Gliedern der Zahlenreihe zugeordnet werden. Die Subtraktion stellt das entsprechende Rückwärtsschreiten dar, durch das ein gegebenes Intervall der Reihe verkürzt wird. Die Multiplikation ist eine aus der Addition logisch ableitbare, aber höhere Operation. Die homogene Beschaffenheit gestattet nämlich die Aufgliederung der Zahlenreihe in Intervalle mit gleicher Gliederanzahl. Sofern der Anzahlwert des Ausgangsintervalls bekannt ist, kann in diesem Falle der Gesamtanzahlwert des erweiterten Intervalls durch Abzählen der Intervalle ermittelt werden. Der Multiplikand bezeichnet die Anzahl des Ausgangsintervalls, das Multiplikationssymbol das wiederholte Erfassen desselben, der Multiplikator gibt an, wievielmal dieses Intervall vorhanden ist.

$$3 \times 3 = ?$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	.	.	.
1	2	3	1	2	3	1	2	3				
		3			3			3				
		1×			2×			3×				

$$3 \times 3 = 9$$

Die direkte Umkehrung der Multiplikation ist jene Form der Division, die als Messen bezeichnet wird. Hier wird ein bekanntes Intervall rückwärtsschreitend in Teilintervalle mit gleicher Anzahl aufgegliedert und die Anzahl der Teilintervalle festgestellt.

$$12:3=?$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3			3			3			3		
4×			3×			2×			1×		

$$\underline{12:3=4\times}$$

Sofern der Aufbau des Intervalls aus den Teilintervallen durch den Vollzug der Multiplikation bereits bekannt ist, kann die Messungsaufgabe gelöst werden, ohne daß rückwärtsschreitend die Teilintervalle markiert und abgezählt werden. Das entsprechende multiplikative Wissen vermittelt dann ohne weiteres die Lösung: $4\times3=12$, darum $12:3=4\times$.

Bei der Division im engeren Sinne, also beim eigentlichen Teilen, handelt es sich nicht um die Bestimmung der Anzahl der Teilintervalle, sondern um die Bestimmung der Gliederanzahl des Teilintervalls selbst, wenn das Ausgangsintervall und die Anzahl der Teilintervalle gegeben sind. Die Lösung der Teilungsaufgabe wird ebenfalls durch das mit den Multiplikationssätzen vermittelte Wissen ermöglicht, wie aus der nachstehenden Darstellung ersichtlich ist:

Messen:	Teilen:
$12:3=4\times$, $\underline{\text{denn } 4\times3=12}$	$12:3=4$, $\underline{\text{denn } 3\times4=12}$

Daraus geht hervor, daß die Lösung der Messungsaufgabe 12:3 einen andern Multiplikationssatz zur Lösung voraussetzt als die Teilungsaufgabe 12:3. Die Verschiedenheit der beiden Prozesse muß auch beim Lösen komplexer Aufgaben durch die sinngemäße Berechnung der Teilprodukte betont werden z. B.:

Messen:

9800 Fr. : 7 Fr. =

7000 Fr. : 7 Fr. = 1000×, denn 1000 × 7 Fr. = 7000 Fr.

2800 Fr. : 7 Fr. = 400×, denn 400 × 7 Fr. = 2800 Fr.

9800 Fr. : 7 Fr. = 1400×, denn 1400 × 7 Fr. = 9800 Fr.

Teilen:

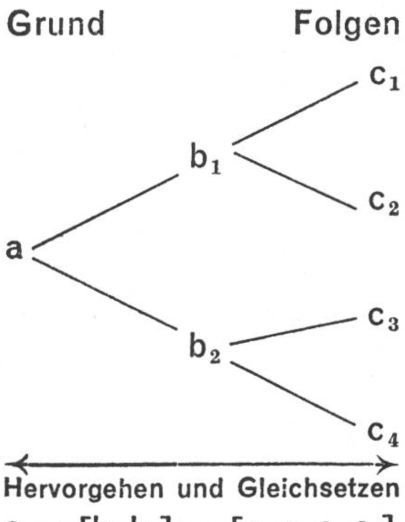
9800 Fr. : 7 =

7000 Fr. : 7 = 1000 Fr., denn 7 × 1000 Fr. = 7000 Fr.

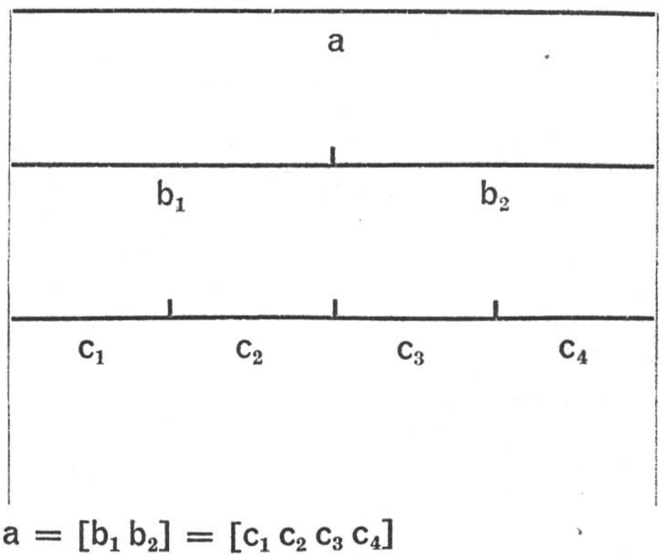
2800 Fr. : 7 = 400 Fr., denn 7 × 400 Fr. = 2800 Fr.

9800 Fr. : 7 = 1400 Fr., denn 7 × 1400 Fr. = 9800 Fr.

Da die Zahlenreihe sich ins Unendliche erstreckt, ist das Weiterschreiten in der Form des Vorwärtszählens, der Addition und der Multiplikation immer wieder möglich, während das Rückwärtsschreiten in der Form des Rückwärtszählens, der Subtraktion und der Division infolge der Existenz des Anfangsgliedes nur bei der Erfüllung bestimmter Voraussetzungen ausführbar ist. So ist beispielsweise die Division, insofern nur die Zahlenreihe als objektive Ausgestaltung des gleichförmig sich erneuernden Fortschreitens vom Grund zur Folge bekannt ist, nur dann möglich, wenn der Dividend größer oder gleich groß ist wie der Divisor. Die Aufgabe 3:4 ist darum unlösbar, solange nur das Vorwärts- und Rückwärtsschreiten in der Reihe der ganzen Zahlen bekannt ist. Die Lösung wird erst dann möglich, wenn die im Erfassen des einen im andern sich bekundende Grundform, in der sich das geistige Leben betätigt, zu einer neuen Form des Fortschreitens und damit zu einem neuen Zahlbegriff führt, nämlich zum Begriff der gebrochenen Zahl. Dieser beruht auf dem Fortschreiten vom Grunde zu einer Vielheit von Folgen, die mit dem Grunde gleichgesetzt wird. Diese Folgen erweisen sich als identische Teile des Ganzen, auf die die Operationen mit ganzen Zahlen angewandt werden können, weil mit dem Teil wie mit dem Ganzen gerechnet werden kann. Die Entfaltung der Einheit zur Vielheit und die Gleichsetzung der Vielheit mit der Einheit führt zur Beziehung des Teiles zum Ganzen, welche das Wesen des Bruchzahlbegriffes enthüllt. Sie bietet die Möglichkeit, das Ganze durch eine bestimmte Anzahl teilbarer Größen zu ersetzen und ermöglicht darum die Lösung der Aufgabe 3:4, denn wir können nunmehr die 3 Ganzen in eine durch 4 teilbare Anzahl von Größen gleicher Art aufgliedern und dann die Division ausführen: $3:4 = \frac{12}{4}:4 = \frac{3}{4}$. Entstehung und Wesen der gebrochenen Zahl werden aus der folgenden Darstellung ersichtlich:



$a = [b_1\, b_2] = [c_1\, c_2\, c_3\, c_4]$



$a = [b_1\, b_2] = [c_1\, c_2\, c_3\, c_4]$

Wenn wir im Rechenunterricht den Schüler zum Verständnis der elementaren mathematischen Begriffe führen und dadurch sein geistiges Leben zur Entwicklung bringen wollen, ist es nötig, daß wir die Grundbetätigungen des Denkens kennen, in denen jene Begriffe ihren Ursprung haben, und aus denen sie ableitbar sind. Die von G. F. Lipps gegebene Zurückführung dieser Begriffe auf Grundformen des geistigen Lebens, die hier soweit berücksichtigt wurde, als das Stoffprogramm der Realstufe es erfordert, hat darum große didaktische Bedeutung. Die Reihe der ganzen Zahlen, das Zahlsystem, die Brüche und die Operationen, die sowohl auf die ganzen wie auch auf die gebrochenen Zahlen angewandt werden können, werden nur vom Vollzug der geistigen Betätigungen her verständlich, auf denen sie beruhen. Durch den erkenntnismäßigen Erwerb der mathematischen Begriffe, die den Stoff des reinen Rechnens bilden, kommt der Schüler zugleich mit der Entwicklung seines geistigen Wirkens in den Besitz eines Werkzeuges, das das quantitative Erfassen der Erscheinungen der räumlich-zeitlich bestehenden Wirklichkeit ermöglicht. Der Anwendungsbereich der Zahl erstreckt sich über die gesamte Wirklichkeit. Aufgabe des angewandten Rechnens ist es, zum Gebrauch dieses wertvollen Werkzeuges zu befähigen. Dieses Ziel kann aber nur dann erreicht werden, wenn der Schüler die inneren Zusammenhänge geistig beherrscht, auf denen die Zahl selbst beruht.

III. Wesen, Aufgabe und Gestaltung des Kopfrechnens.

Wir unterscheiden in der unterrichtlichen Praxis zwei Rechenformen, das Kopfrechnen und das schriftliche Rechnen. Diese Ausdrücke könnten zur irrtümlichen Auffassung verleiten, daß es sich im einen Fall um eine bewußte gedankliche Durchdringung der Zahlbeziehungen, im andern Fall aber um den mechanischen Vollzug eines Verfahrens handelte. Dieser Auslegung der beiden Begriffe gegenüber muß der Einwand erhoben werden, daß alles Rechnen auf der einsichtigen Beurteilung der mannigfaltigen Zahlbeziehungen beruht. Der bloß äußere mechanische Vollzug eines rechnerischen Verfahrens, der nur durch das rein gedächtnismäßige Wissen um die Zahlbeziehungen und die Folge der Teilschritte geleitet wird, darf überhaupt nicht als Rechnen bezeichnet werden, weil dadurch ein Merkmal in den Begriff des Rechnens aufgenommen würde, das diesem widerspricht. Dieser Einwand kann nicht mit dem Hinweis entkräftet werden, daß wir im Rechnen ohne eine gewisse Mechanisierung nicht auskommen. Gewiß ist die Mechanisierung grundlegender Betätigungen im Interesse einer Steigerung der Leistungsfähigkeit notwendig, denn ohne ein verfügbares Wissen um die elementaren Zahlbeziehungen wären wir genötigt, jede Aufgabe durch Zurückführung auf den einfachen Zählprozeß zu lösen, aus dem die Operationen abgeleitet werden. Damit aber ist das Rechnen noch keine rein mechanische und damit blinde Technik, denn es wird getragen von der inneren erkenntnismäßigen Einsicht in die Berechtigung der Verfahren. Sofern Kopfrechnen mit denkendem Rechnen gleichgesetzt wird, ist darum jedes Rechnen, auch das schriftliche, ein Kopfrechnen, obwohl gesagt werden muß, daß hier die Variation der Lösungsverfahren kleiner ist und darum die Mechanisierung stärker betont wird als beim Kopfrechnen.

Die zuletzt erwähnte Tatsache liegt in der Verschiedenheit der Ziele begründet, denen diese beiden Formen des Rechnens dienen. Aus der Besonderheit dieser Aufgaben ergeben sich die wesentlichen Unterschiede, die vor allem im Lösungsverfahren und in der Art und im Ausmaß der schriftlichen Fixierung vorliegen.

Aufgabe des Kopfrechnens ist vor allem der Erwerb einer grundlegenden Rechenerkenntnis. Er führt zur Einsicht in das Wesen des Zählens, der Zahlenreihe und der Grundzahlbegriffe. Er vermittelt eine Auffassung vom Wesen des dekadischen Positionssystems, die das Eindringen in das Bildungsgesetz der Systemzahlen ermöglicht, das in den Zahlnamen und in der Zahlschreibung zur Geltung kommt. Zur Vertiefung dieser Erkenntnis dienen Übungen im Aufbauen und Zerlegen der Zahlen nach dem Prinzip der dekadischen Gliederung mit Angabe der Anzahl der Grundeinheiten:

$$1000 + 700 + 60 + 9 = 1769 \qquad 4308 = 4000 + 300 + 8$$

Wir denken uns 4308 als Endglied einer Reihe, die 4308 Glieder zählt, von denen jedes die Grundeinheit darstellt. Nun erfolgt die Aufgliederung in die Teilreihen, von denen die erste 4000, die zweite 300 und die dritte 8 Glieder oder Einer umfaßt. Die gründliche gedankliche Durchdringung des Zahlaufbaues ist deshalb von größter Bedeutung, weil sie die Zurückführung der zusammengesetzten Aufgaben auf Teilaufgaben ermöglicht, deren Lösung durch die Auswertung der einfachen Grundbeziehungen vollzogen werden kann, z. B.:

$4350 + 5240 = ?$	Zurückführung der Teilaufgabe $4350 + 5000$ auf die grundlegende Beziehung.
$5240 = 5000 + 200 + 40$	
$4350 + 5000 = 9350$	$4 + 5 = 9$ Grundbeziehung
$9350 + 200 = 9550$	$40 + 50 = 90$ Anwendung der Grundbeziehung
$9550 + 40 = 9590$	$43 + 50 = 93$ Mitführen der Einer
	$400 + 500 = 900$ Anwendung auf die Hunderter
	$430 + 500 = 930$ Mitführen der Zehner
	$435 + 500 = 935$ Mitführen der Zehner und Einer
	$4000 + 5000 = 9000$ Anwendung auf die Tausender
	$4350 + 5000 = 9350$ Mitführen d. Hunderter u. Zehner

Die Reduktion der großen Fülle der vielgestaltigen Zahlbeziehungen auf Grundbeziehungen und auf abgeleitete Beziehungen ist eine der wichtigsten Aufgaben des Kopfrechnens. Die Lösung dieser Aufgabe wird möglich auf Grund der Einsicht in das Wesen des Positionssystems, durch das eine vollkommene Darstellung der Zahlenreihe erreicht wird. Es ist somit ein eindrucksvoller Beleg für das Prinzip der Ökonomie, von dem die mathematische Denkform beherrscht wird. Dieses Prinzip bekundet sich schon im Streben, die streng gewahrte Eindeutigkeit der Denkbestimmungen durch einfachste symbolische Zeichen mit eindeutig bestimmter Funktion darzustellen, welche eine kurze, formelhafte Fixierung der reich differenzierten Beziehungen gestatten. Dieser Geist der Einfachheit, der sich gegenüber einer Fülle mannigfaltiger Zusammenhänge zu bewähren vermag, offenbart sich in eindringlicher Weise überdies im Streben, mit einem Minimum von Darstellungsmitteln ein Maximum an ordnender Wirkung zu erreichen. Durch das gesetzmäßige Zusammenfassen der niederen Einheiten in höhere, die zur Aufgliederung der Zahlenreihe nach Potenzen von 10 führt, sowie durch die Darstellung der Zahlen durch 9 Zahlzeichen und das Stufenzeichen 0 wird es möglich, das Rechnen mit großen Zahlen auf eine relativ kleine Anzahl leicht beherrschbarer Grundbeziehungen zurückzuführen. Das Erfassen dieser logischen Verkettung der Zahlbeziehungen in der Form von Grund- und abgeleiteten Beziehungen, das durch die dekadische Aufgliederung der Reihe und durch die symbolische Darstellung der Zahlen mit einer kleinen Anzahl wiederkehrender Zeichen ermöglicht wird, führt zu einer weitgehenden Entlastung des Gedächtnisses und erhöht damit die praktische Verwendbarkeit der Zahl. Diese Zusammenhänge sollen durch die nachfolgenden Beispiele belegt werden. Die Aufgabe $8+9$ kann durch Vermittlung des Stützpunktes 10 auf elementare Rechenurteile zurückgeführt werden, nämlich auf das Rechnen mit Grundzahlen und das darauf aufgebaute Rechnen mit Systemzahlen ohne Überschreitung[1]. Die Umformung ergibt:

$$8+9 = 8+(2+7) = (8+2)+7 = 10+7 = 17.$$

Die Beziehung $8+9$ kann nun ihrerseits wie die Beziehungen $3+4$ und $7+3$ Stützpunkt für das Erfassen von Zahlbeziehungen im erweiterten Zahlenraum werden, was aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich wird.

Grundbeziehung	3+4 =	7	7+3 =	10	8+9 =	17
Abgeleitete Beziehungen	13+4 =	17	17+3 =	20	18+9 =	27
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	93+4 =	97	97+3 =	100	98+9 =	107
	103+4 =	107	107+3 =	110	108+9 =	117
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	193+4 =	197	197+3 =	200	198+9 =	207
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	993+4 =	997	997+3 =	1000	998+9 =	1007
	1093+4 =	1097	1097+3 =	1100	1098+9 =	1107
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	9993+4 =	9997	9997+3 =	10000	9998+9 =	10007
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Innerhalb der Stufe		Mit Erreichen der höheren Stufe		Überschreiten der höheren Stufe.	

Es ist für die methodische Gestaltung des Rechenunterrichts von Bedeutung, daß man sich trotz der Erleichterung, welche durch die Zurück-

[1] Vgl. Ritthaler A., Praxis des grundlegenden Rechenunterrichts, I Teil, S. VII ff.

führung des Rechnens auf Grundbeziehungen geboten wird, der Schwierigkeitsunterschiede bewußt ist, die beim Rechnen innerhalb einer Stufe, beim Erreichen und beim Überschreiten der nächsthöheren Stufe vorliegen. Die Bewältigung von Aufgaben, deren Lösung zu einem Erreichen oder Überschreiten führt, stellt höhere Anforderungen, weil in diesen Fällen die Veränderung einer Einheit auch zur Veränderung anderer Einheiten führt. Die durch den Vollzug der Operation nicht direkt betroffenen Einheiten können nicht mehr wie beim Zu- und Wegzählen innerhalb einer Stufe einfach mitgeführt werden.

$9993+4 = 9997$	Es werden nur die Einer verändert, die übrigen Einheiten nur mitgeführt.
$9997+3 = 10000$ $9998+9 = 10007$	Die Veränderung wirkt sich auch in den Zehnern, Hundertern und Tausendern aus.

(Ein weiteres Beispiel für die Zurückführung auf Grundbeziehungen wird in anderem Zusammenhang auf S. 45/46 geboten.)

Eine weitere Aufgabe des Kopfrechnens ist neben der Einführung ins Wesen des Positionssystems, die mit der Erkenntnis des Positionswertes der Ziffer, dem Umwechseln der niederen Einheiten in höhere und der höheren in niedere auch die Grundlagen für das schriftliche Rechnen nach Stellenwert vermittelt, der Erwerb der Operationen. Dabei ist es im Interesse der Verwirklichung der formalen und der materialen Bildungsziele von größter Bedeutung, daß der Sinn der aus dem Begriff des Zählens ableitbaren Operationsbegriffe durch Maßnahmen geklärt wird, die den an anderer Stelle gegebenen logischen Grundlagen entsprechen. Veranschaulichungen, die dieser Forderung nicht entsprechen, sind abzulehnen, denn der Sinn eines mathematischen Verfahrens kann nur aus Grundlagen gewonnen werden, in denen er zur Geltung kommt. Damit diese Begriffe lebendig bleiben und das erworbene Wissen auch angewandt werden und damit grundlegend und aufbauend wirken kann, ist es dringend notwendig, daß immer wieder auf den Sinn hingewiesen wird. Von großer Bedeutung ist dabei auch, daß der Schüler einen Einblick in den inneren Zusammenhang der Operationen gewinnt, der klärend und vertiefend auf die Auffassung der Zahlbeziehungen wirkt. Eine besonders wichtige Aufgabe stellt die Einführung in die mathematische Form dar, die erst geboten werden kann, wenn die Bedeutung erfaßt worden ist. Wenn die abstrakte symbolische Darstellung zu früh eingeführt wird, besteht die Gefahr, daß das Bewußtwerden der Bedeutung gehemmt wird und die Zeichen tote Hülsen bleiben. Selbstverständlich gelten diese Forderungen nicht nur für die Einführung der Operationsbegriffe, sondern auch für den Erwerb der neu auftretenden Zahlbegriffe.

Es wurde bereits betont, daß eine Hauptaufgabe des Kopfrechnens das eindringende Erfassen der Zahlbeziehungen ist. Es unterscheidet sich in dieser Hinsicht wesentlich vom schriftlichen Rechnen, bei dem es vor allem auf Geläufigkeit und Sicherheit im Vollzug der Verfahren ankommt. Diesem

Zweck entsprechend werden beim schriftlichen Rechnen besondere Maßnahmen getroffen, durch die es sich wesentlich vom Kopfrechnen unterscheidet. Es nützt den Vorteil des Positionssystems aus, indem es nicht wie das Kopfrechnen die Anzahl der Grundeinheiten berücksichtigt, sondern mit den niederen und höheren Einheiten rechnet, deren Wert aus der Stellung der Ziffern erkennbar ist. Die Zerlegung der Aufgabe in die Teilaufgaben wird durch den Aufbau der Zahlen aus den verschiedenwertigen dekadischen Einheiten bestimmt. Gleichartige Einheiten werden zu Teilergebnissen zusammengefaßt und durch sofortiges Verwandeln in höhere oder niedere Einheiten ins System eingefügt. Dabei wird durch zweckmäßige äußere Anordnung die Aufmerksamkeit wesentlich entlastet und die Sicherheit im Vollzug erhöht. (Anordnung der Summanden und der Subtrahenden in der Senkrechten, wobei die gleichen Stellenwerte untereinander zu stehen kommen. Einfügung der Teilprodukte unter die entsprechenden Stellenwerte des Multiplikanden und des Dividenden.) Damit das Schlußergebnis auf dem kürzesten Wege erreicht wird, werden die Teilergebnisse in einer konstant bleibenden Abfolge gewonnen. Aus diesem Grunde beginnt man die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation bei den niedersten Stellenwerten, die Division hingegen beim höchsten. Im Interesse der größtmöglichen Sicherheit werden zudem die Teilergebnisse fortwährend fixiert, wodurch Aufmerksamkeit und Gedächtnis eine wesentliche Entlastung erfahren und das Rechnen mit großen Zahlen, auch bei Verwendung vieler Wertziffern, ohne Gefährdung der Sicherheit möglich wird. Die Variation der Lösungswege ist relativ klein und wird auch nicht erstrebt, denn durch die Konstanz der Verfahren wird die rasche Mechanisierung und damit der geläufige Vollzug begünstigt. Das hat den weiteren Vorteil, daß sich das Denken bei der Lösung eingekleideter und angewandter Aufgaben ganz der Beurteilung der Sach- und Zahlbeziehungen zuwenden kann, die zur Ermittlung der Operationen und ihrer Folge führt. Man kann wohl beispielsweise bei einer Multiplikation den Multiplikator vor- oder nachstellen, beim Vervielfachen mit dem höchsten oder kleinsten Stellenwert beginnen, günstige Konstellationen auswerten und dadurch eine Abkürzung erzielen, aber die Teilaufgaben bleiben dieselben, nur die Abfolge ändert sich. Dies wird durch die nachfolgende Darstellung beleuchtet.

Aufgabe: 218 × 365 = ? (218 Multiplikator, 365 Multiplikand).

Vorstellung des Multiplikators, mit den Einern begonnen.	Vorstellung, mit den Hundertern begonnen.	Nachstellung, mit den Einern begonnen.
218 × 365	218 × 365	365 × 218
2920	730	2920
365	365	365
730	2920	730
79570	79570	79570

Nachstellung des Multiplikators, mit den Hundertern begonnen.	Nachstellung, mit den Zehnern begonnen.	Nachstellung, Multiplikand als Zehnervielfaches ausgewertet.
365 × 218	365 × 218	365 × 218
730	365	2920
365	2920	730
2920	730	79570
79570	79570	

Ein Vergleich dieser sechs Darstellungen zeigt, daß immer wieder die gleichen Teilaufgaben vorkommen, nämlich 8×365, 1×365, 2×365. Es ist der gleiche Lösungsgedanke, der in allen Varianten zur Geltung kommt. Sofern die Schüler die schriftliche Multiplikation in irgendeiner dieser Formen wirklich erfaßt haben, werden sie ohne weiteres auch die andern verstehen können. Diese Einsicht in die Grundlagen, auf denen das Verfahren beruht und die es logisch rechtfertigt, muß mit dem Schüler an einer Darstellungsform erarbeitet werden. Der Lehrer kann dieses erworbene Verständnis dadurch lebendig erhalten, daß er selbst gelegentlich dieselbe Aufgabe in allen möglichen Darstellungsformen löst und den Schüler auffordert zu erklären, wie gerechnet wurde, und warum so gerechnet werden darf.

Diese Darlegungen mögen den wesenhaften, durch die Verschiedenheit der Ziele bedingten Unterschied zwischen dem schriftlichen Verfahren und dem Kopfrechnen zeigen. Jenes vollzieht sich in der Gebundenheit an ein Normalverfahren, damit Geläufigkeit und Sicherheit garantiert werden, dieses bietet größere Freiheit in der Wahl des Lösungsweges im Interesse einer gründlichen Klärung und Vertiefung der Zahlbeziehungen. Es stellt damit größere Anforderungen an das beziehende Denken. Weil zudem die schriftliche Fixierung höchstens auf das Notieren der Aufgabe beschränkt wird, stellt es auch höhere Ansprüche an die Konzentrationsfähigkeit und das Zahlengedächtnis. In diesen Tatsachen liegt der große formale Bildungswert des Kopfrechnens begründet. Er kommt aber nur dann zur Geltung, wenn sich das Rechnen nicht in der starren Gebundenheit an diktierte Normalverfahren erschöpft, sondern wenn neben den Normalverfahren, auf deren Bedeutung und didaktische Vermittlung später hingewiesen werden soll, auch andere Lösungswege beschritten werden. Die Variation der Lösungswege ist ein treffliches Mittel zur Klärung der Zahlbeziehungen, die geklärten und vertieften Zahlbeziehungen wiederum ermöglichen das Auffinden neuer Wege. Die Frage: „Wie könnten wir diese Aufgabe auch noch lösen?“ hat darum im Hinblick auf die formale Aufgabe des Kopfrechnens große Bedeutung. Auf diese Weise kann im reinen Zahlenrechnen der starre Mechanismus überwunden und die geistige Inanspruchnahme gesteigert werden.

Diesem Ziele dient auch das sogenannte Rechnen nach Vorteil, an dem ganz besonders die theoretisch begabten Schüler große Freude bekunden. Es handelt sich bei diesen Übungen nicht in erster Linie darum, durch Auswertung besonderer Eigenschaften einzelner Zahlen ein abgekürztes Verfahren einzuschlagen, um Zeit und Kraft zu sparen. Es kommt auch nicht in erster Linie dabei in Betracht, durch Benützung von Vorteilen den Anwendungsbereich des Kopfrechnens auf jene schwierigeren Fälle auszudehnen, die nach dem Normalverfahren infolge zu starker Belastung der Aufmerksamkeit und des Gedächtnisses nicht mehr bewältigt werden können und darum schriftlich ausgerechnet werden müssen. Das Rechnen nach Vorteil bezweckt vielmehr die Erweiterung und Vertiefung der bereits bewußt erfaßten Zahlbeziehungen, wobei das scharfe, eindringende Betrachten und das kombinierende Denken geübt werden.

Von großer Bedeutung für eine didaktische Gestaltung des Kopfrechnens, die den Schüler nicht nur zur gedächtnismäßigen Einprägung von Rechensätzen und Ausführungsbestimmungen, sondern zum Erwerb einer elementaren mathematischen Bildung und damit zur Entwicklung des geistigen Lebens führt, ist für den Lehrer die Kenntnis der Rechengesetze und ihrer logischen Ableitung. Diese Gesetze, welche den Vollzug der Operationen beherrschen, die Zurückführung auf Grundbeziehungen ermöglichen und Rechenvorteile bieten, beruhen auf der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe, die es ermöglicht, „Intervalle mit gleicher Gliederanzahl einander gleichzusetzen und die Intervalle in Unterabteilungen zu zerlegen, die einzeln oder in beliebiger Zusammenfassung abgezählt werden können"[1]. Wir weisen nachfolgend auf die wichtigsten Gesetze und ihre Bedeutung hin und zeigen anschließend an einem Beispiel, wie sie dem Schüler vermittelt werden können.

Das kommutative Gesetz der Addition weist darauf hin, daß die Summanden vertauscht werden dürfen. Die formelhafte Darstellung lautet: $a+b = b+a$. Die Anwendung dieses Gesetzes erleichtert den Vollzug der Addition, weil die Möglichkeit geboten wird, das große Intervall als Ausgangssummand zu benützen: $180+5340 = 5340+180$. Die Anzahl der additiven Grundbeziehungen, die eingeprägt werden müssen, wird durch die Vertauschung der Summanden wesentlich reduziert: $7+2 = 2+7$, $4+9 = 9+4$.

Das kommutative Gesetz der Multiplikation betont die Vertauschung der Faktoren, denn es gilt $a \times b = b \times a$. Es kommt ganz besonders bei der Einprägung der Einmaleinssätze als Rechenhilfe zur Geltung, $5 \times 7 = 7 \times 5$, $4 \times 8 = 8 \times 4$ usw. Die Vertauschung gestattet die Auswertung bekannter Reihen und damit die Zurückführung schwerer Aufgaben auf leichtere, z. B.: $37 \times 12 = 12 \times 37$.

Für die Addition und die Multiplikation gilt weiter das assoziative Gesetz. Für die Addition kann es in der folgenden Formel ausgedrückt werden: $(a+b)+c = a+(b+c)$. Wir wenden es an, wenn wir den zweiten Summanden

[1] Lipps, G. F., Mythenbildung und Erkenntnis, S. 117.

unter Bezugnahme auf die Systemstufengrenze in zwei Teilsummanden zerlegen und diese nacheinander zum ersten Summanden hinzuzählen: $5+8 = 5+(5+3) = (5+5)+3 = 10+3 = 13$. Es kommt weiterhin zur Geltung in folgenden Beispielen:

$$40+25 = 40+(20+5) = (40+20)+5 = 60+5 = 65$$
$$56+27 = 56+(20+7) = (56+20)+7 = 76+7 = 83$$
$$568+957 = 568+(900+50+7) = (568+900)+(50+7) = (1468+50)+7$$
$$= 1518+7 = 1525.$$

Wir wenden es auch an bei der schriftlichen Addition, wenn wir die gleichwertigen Einheiten der verschiedenen Summanden zusammenfassen, zum Beispiel:

$$\begin{array}{r|l}
342 & 342+567+368 \\
567 & = (3H+4Z+2E)+(5H+6Z+7E)+(3H+6Z+8E) \\
\underline{368} & = (2E+7E+8E)+(4Z+6Z+6Z)+(3H+5H+3H) \\
1277 & = 17E+16Z+11H = 7E+(1Z+16Z)+11H = 7E+7Z+(1H+11H) \\
 & = 7E+7Z+12H = 1277.
\end{array}$$

Das assoziative Gesetz der Multiplikation lautet: $a(bc) = (ab)c$. Es kann als Rechenhilfe wirksam werden in folgenden Fällen:

$$8 \times 375 = 8 \times (125 \times 3) = (8 \times 125) \times 3 = 1000 \times 3 = 3000$$
$$27 \times 324 = (3 \times 9) \times 324 = (3 \times 324) \times 9 = 972 \times 9 = 8748$$
$$400 \times 370 = (4 \times 100) \times 370 = 4 \times (100 \times 370) = 4 \times 37000 = 148000.$$

Das distributive Gesetz, das besagt, daß $a(b+c) = ab+ac$ ist, kommt besonders beim Vervielfachen mehrstelliger Zahlen zur Anwendung:

$$8 \times 345 = 8 \times (300+40+5) = (8 \times 300)+(8 \times 40)+(8 \times 5)$$
$$= 2400+320+40 = 2760.$$

Natürlich kann es sich bei der Einführung in diese Gesetze nicht darum handeln, dem Schüler eine streng logische Begründung zu geben. Zum denkenden Eindringen in den logischen Ursprung der Zahl, der für die Beweisführung als Grundlage in Betracht kommt, reicht die geistige Fassungskraft des Volksschülers nicht aus. Diese Tatsache darf aber nicht dazu verleiten, die Gesetze einfach in der Form von Rezepten zu übermitteln oder deren Gültigkeit durch den Hinweis auf das identische Ergebnis zu verifizieren, z. B.: $4 \times 2 = 8$, $2 \times 4 = 8$, also ist $4 \times 2 = 2 \times 4$. Solche Scheinbeweise sind ebenso abzulehnen wie die unzulänglichen räumlichen Umformungen. Wir können uns im Volksschulunterricht, wie Henkler[1] gezeigt hat, so behelfen, daß wir die Gültigkeit des Gesetzes in der Anwendung auf einen Einzelfall zeigen, die so gewählt wird, daß das gewonnene Verfahren auf alle Fälle ausgedehnt werden kann. Henkler schreibt: „Die Erinnerung an die Gesetze soll ihn dazu auffordern, stets ein Verfahren zu wählen, von dem er wissen muß und der Schüler vielleicht ahnen mag, daß

[1] Henkler, P., Rechnen und Raumlehre in der Volksschule, S. 32 ff.

es auf alle Fälle ausgedehnt werden könnte; so wird er vor Scheinbeweisen und logischen Erschleichungen bewahrt"[1].

Beispiel einer Einleitung, die diesen Anforderungen genügt:

$$2\times 3 = 3\times 2 \text{ (Kommutatives Gesetz der Multiplikation)}$$

2×3 bedeutet letzten Endes, daß zwei Zählungen ausgeführt worden sind, von denen jede drei Glieder umfaßt. Der Sachverhalt kann wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{c}\circ-\circ-\circ\\ 1\quad 2\quad 3\end{array}}_{3} + \underbrace{\begin{array}{c}\circ-\circ-\circ\\ 1\quad 2\quad 3\end{array}}_{3} \\ 2\times 3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c}1\quad 2\quad 3\\ \left.\begin{array}{c}\circ-\circ-\circ\\ \circ-\circ-\circ\end{array}\right\} 3+3 = 2\times 3\\ 1\quad 2\quad 3\end{array}$$

Damit ist die Aufgabe auf eine Addition zurückgeführt, denn sie lautet nun: Das Intervall mit dem Anzahlwert 3 wird um ein Intervall mit 3 Gliedern erweitert. Welche Gliederanzahl hat das erweiterte Intervall? Da die Zahlenreihe homogen beschaffen ist, die beiden Intervalle zudem den gleichen Anzahlwert haben, kann die Gliederanzahl des Gesamtintervalls in der Weise gewonnen werden, daß zuerst die ersten, dann die zweiten, hierauf die dritten Glieder der gegebenen Intervalle zu einem neuen zusammengefaßt werden, was durch die folgende Darstellung veranschaulicht werden kann:

$$\begin{array}{c}1\quad 2\quad 3\\ \left.\begin{array}{c}\circ-\circ-\circ\\ \\ \circ-\circ-\circ\end{array}\right\} 2\times 3\\ 1\quad 2\quad 3\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}1\quad 1\quad 1\\ \circ\quad \circ\quad \circ\\ |\quad\; |\quad\; |\\ \circ\quad \circ\quad \circ\\ 2\quad 2\quad 2\\ 2+2+2\\ 3\times 2\end{array}$$

Dieses Verfahren ist nun in der Tat verallgemeinerungsfähig, denn infolge der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe ist es gestattet, das Gesamtintervall auch in der Weise zu bestimmen, daß zuerst die Anfangsglieder der Teilintervalle zu neuen Teilintervallen zusammengefaßt werden, hierauf die zweiten und schließlich die dritten Glieder. Das Beachten der gleichen Ergebnisse bei der Lösung der beiden Aufgaben 2×3 und 3×2 kann hingegen nur als Mittel zur Erkenntnis des Problems gewertet werden. Wir stimmen auch hier Henkler zu, wenn er sagt, der Schüler könne „ein logisches Verfahren auf keinem andern Wege kennen lernen, als auf dem, der aus der Logik der Sache selbst gefolgert werden muß"[2]. Damit bekennen wir uns keineswegs zu einem „didaktischen Logizismus". Es wurde schon in der Vorbetrachtung auf die Bedeutung der psychologischen Besinnung im didaktischen Gestalten hingewiesen. Sie kommt zur Geltung im Versuch, im Schüler die Problemstellung zu erwecken und zu entwickeln, und wenn wir die Lösung entspre-

[1] Henkler, P., a. O.. S. 36.
[2] Henkler, P., a. O., S. 13.

chend der anschaulich-gegenständlichen Auffassungsweise des Kindes von zweckmäßigen Veranschaulichungen aus erstreben. Sie äußert sich, wenn wir den Zögling zur fortwährenden Darstellung des Aufgefaßten und damit zur eindringenden Besinnung und Rechenschaft zwingen, wenn wir aus der Darstellung Rückschlüsse auf das Verständnis ziehen und allenfalls zu ergänzen und vertiefen suchen. Psychologische Besinnung bekundet sich auch dann, wenn wir bei zu erwartenden Schwierigkeiten das Unterrichtstempo bewußt verlangsamen, Zeit zur stillen Besinnung geben, wenn wir durch lebendige Übungs- und Anwendungsarbeit den erarbeiteten Stoff von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten und durch Anregung zum wiederholten Vollzug der Denkschritte weiter klären. Alle diese Maßnahmen sind wirksame Hilfen, um die Selbsttätigkeit des Kindes in der Gestaltung des Stoffes zu ermöglichen und zu steigern, damit wirkliche Erkenntnisbildung zustandekommt, die das geistige Leben durch Überwindung von Widerständen zur Entwicklung bringt. Grundlegende Bildung, die die weitere Entwicklung der Auffassung begünstigt und der insofern Zukunftswirkung beschieden ist, kann aber nur durch den Unterricht erweckt werden, der mit der psychologischen Orientierung auch dem Wesen der Sache gerecht wird. Das kann nur dadurch geschehen, daß in allen Maßnahmen, die wir zur Vermittlung einer Erkenntnis treffen, diese selbst unverfälscht zur Geltung kommt. Wenn der Rechenunterricht von dieser Grundeinstellung beherrscht wird, wird auch jene einseitige Wertung des reinen Zahlenrechnens als einer mechanisch-geistlosen Arbeit, die nur noch als Mittel zum Zweck beachtet wird, ihre Berechtigung verlieren. Sie kann ja nur so lange aufrecht erhalten werden, als man der objektiven Ordnung in der Welt der Zahlen durch rein gedächtnismäßig einzuprägende Rezepte beizukommen versucht.

Die in diesen Darlegungen betonte grundlegende Bedeutung des Kopfrechnens für den Erwerb einer elementaren mathematischen Erkenntnis darf aber nicht dazu verleiten, dessen zweite Aufgabe zu vernachlässigen: die Einprägung der Zahlbeziehungen und Rechenverfahren bis zur Geläufigkeit und Sicherheit. Die Lösung dieser didaktischen Aufgabe ist aus verschiedenen Gründen eine unabweisbare Notwendigkeit. Es darf nämlich nicht übersehen werden, daß dem Kopfrechnen auch im täglichen Leben zur Bewältigung der einfachen Rechenfälle eine große Bedeutung zukommt. Es kann die durch das Leben gestellten Ansprüche nur erfüllen, wenn die elementaren Rechenvorgänge gedächtnismäßig verfügbar sind. Zudem kann das Kopfrechnen nicht nur dadurch Grundlage des schriftlichen Rechnens werden, daß es eine klare Auffassung vom Wesen des Positionssystems und der Zahl- und Operationsbegriffe vermittelt. Die Analyse des schriftlichen Multiplikationsbeispiels auf Seite 18 zeigt, daß letzten Endes gewisse Grundbeziehungen gedächtnismäßig zur Verfügung stehen müssen. Es sind dies nicht nur die multiplikativen Beziehungen, wie sie im Einmaleins vorliegen, sondern auch die daraus abgeleiteten Messungs- und Teilungssätze sowie die Additions- und Subtraktionssätze. Ohne ein verfügbares Wissen um diese Beziehungen wären wir genötigt, jede Aufgabe auf den Grundprozeß des Zählens zurückzuführen. Man muß überdies berücksichtigen, daß gerade durch die Einprägung dieses Wissens geistige Kraft für die Bewältigung der Denkansprüche beim Lösen zusammengesetzter Aufgaben frei wird. Es ist somit auch im Kopfrechnen Geläufigkeit und Sicherheit beim Vollzug der elementaren Zahlbeziehungen und der Rechenverfahren im Interesse einer Steigerung der rechnerischen Gesamtleistungsfähigkeit von größter Bedeutung. Um diese Einprägung zu erleichtern, bedienen wir uns auch beim Kopfrechnen der Normalverfahren. Diese Forderung nach Normalverfahren steht keineswegs mit jener andern im Widerspruch, welche die Variation der Lösungswege im Interesse der Erkenntnisbildung betont. Dies soll durch die nachfolgenden Darstellungen über Wesen, Bedeutung und Einführung des Normalverfahrens belegt werden.

IV. Bedeutung und Erwerb des Normalverfahrens.

Die Wendung von der Vermittlung zum Erwerb des Wissens und Könnens ist ein Grundzug der didaktischen Reform seit der Jahrhundertwende. Es entwickelte sich damit eine pädagogische Grundhaltung, die dem Bildungsprozeß entscheidende Bedeutung beimißt, weil sie von der Voraussetzung ausgeht, echte Bildung könne nur auf dem Wege der selbsttätigen Gestaltung der Einwirkungen entstehen. Wohl wird diesem Bildungsbegriff entsprechend wahre Bildung als formale und materiale Bildung zugleich begriffen, aber der Akzent liegt nicht auf dem Bildungsinhalt, auf dem materialen Ertrag und dessen Fixierung, sondern auf dem zur Erweiterung und Vertiefung der Bewußtseinszusammenhänge führenden Vollzug der geistigen Funktionen. Mit dieser Wertungsweise ist die Gefahr verbunden, daß Bildung in einem Formalismus und Funktionalismus erstarrt, der den Wert eines gesicherten Besitzes an Kenntnissen und Fertigkeiten für die Erarbeitung und Verarbeitung neuer Bildungsstoffe verkennt und überdies die grundlegende Bedeutung einer Hingabe an die inhaltlichen Ansprüche des Gegenstandes für die formale Bildung selbst außer acht läßt. Weil man in erster Linie die Erweckung einer produktiven Grundhaltung erstrebt, welche die selbständige Aneignung neuer Stoffe begünstigen soll, aber den für die Erreichung dieses Zieles notwendigen Besitz eines verfügbaren Wissens zu gering einschätzt, kommt die Übung als planmäßige Wiederholung zur Einprägung von Kenntnissen und Fertigkeiten zu kurz. Darum schenkt man auch der Einübung von Normalverfahren im Rechenunterricht zu wenig Aufmerksamkeit.

Unter einem Normalverfahren versteht man ein eindeutig festgelegtes Verfahren zur Lösung von Aufgaben gleicher Art. Mit der Normierung der Lösungsverfahren will man günstige Bedingungen für die Steigerung der Rechenfertigkeit und Rechensicherheit schaffen. Durch die in gleicher Form erfolgte Wiederholung eines Rechenvorganges tritt nach und nach an Stelle des einsichtigen, bewußten Vollzugs die automatisierte Ausführung in vorwiegend passiver Bewußtseinslage. Gerade darum aber lehnen die Vertreter der oben skizzierten Grundhaltung die Normalverfahren ab, weil sie befürchten, daß dieser Weg zur Vermittlung einer blinden Technik führe.

Die hier betonte Gefahr besteht zweifellos dort, wo das Normalverfahren einfach in der Form eines Diktates übermittelt und hierauf durch gleichförmige Wiederholung eingeprägt wird. In dieser Form hat das Rechnen weder formale noch materiale Bedeutung. Daß die spezifisch formalen Bildungswerte, vor allem die Bedeutung des Rechnens für die Entwicklung des Denkens, bei diesem Verfahren nicht zur Geltung kommen können, leuchtet ohne weiteres ein, denn durch bloße Übermittlung und rein gedächtnismäßige Einprägung wird die geistige Inanspruchnahme auf ein Minimum reduziert. Aber auch der Lebenswert einer solchen Rechentechnik ist sehr problematisch, denn ohne geistige Beherrschung eines Werkzeuges ist auch dessen sinnvolle Anwendung auf die Rechenfälle des Lebens unmöglich. Indem die Vertreter jener Auffassungen, die den Erwerb des Wissens und Könnens betonen, gegen diese Form der Übermittlung und Einübung von Normalverfahren protestieren, erweisen sie der Schule einen großen Dienst. Der mögliche Mißbrauch einer didaktischen Maßnahme gibt aber noch keine Berechtigung, diese Maßnahme selbst abzulehnen. Es soll nachfolgend gezeigt werden, wie in ein solches Normalverfahren eingeführt werden kann.

Wenn wir in ein neues Verfahren einführen, werden wir zunächst die Problemhaltung zu erwecken versuchen, in welcher die Beziehung zur neuen rechnerischen Aufgabe geknüpft wird. Wir können dabei von reinen Zahlenaufgaben oder von eingekleideten Aufgaben ausgehen. Wichtig ist, daß die Problemstellung so vertieft wird, daß sich die Schüler der neuen Schwierigkeiten, des Andersseins gegenüber dem bereits bekannten Wissen, bewußt werden. Aus der erzeugten Spannung heraus, die gerade durch dieses Bewußtwerden des Andersseins erweckt wird, versucht die Klasse in stiller Besinnung den Weg ins Neuland. Spannung erweckt Initiative. Es werden Vorschläge zur Lösung gemacht, begründet und geprüft. Die Lösungen des rechnerischen Problems werden an zweckmäßigen Veranschaulichungsmitteln demonstriert. Die möglichen Lösungswege werden einander gegenübergestellt und nun unter dem Gesichtspunkt der Einfachheit und der Sicherheit gewertet. Das so unter Mitarbeit der Klasse gewonnene Normalverfahren wird noch einmal veranschaulicht, die Einzelschritte und der Zusammenhang der Teilbetätigungen werden erfaßt, damit der Schüler nicht nur das äußere Vorgehen, nicht nur das Wie, sondern auch das Warum begreift. Auf die Auffassung folgt die Darstellung, bei welcher auf eine einfache, klare Formgebung geachtet wird. Das Normalverfahren ist also das Endglied einer rechnerischen Entwicklung, „die präzise Formgebung einer mathematischen Entwicklungsreihe, auf die man im Interesse der mathematischen Schulung nicht verzichten sollte“[1]. Aus diesen Darlegungen wird ersichtlich, daß beim Erwerb des Normalverfahrens die Forderung nach Variation der Lösungswege am Anfang zur Geltung kommt. Wenn wir beispielsweise in die Ad-

[1] Seemann, J., Die Rechenfehler, S. 112.

dition der mit reinen Hundertern gemischten Tausender einführen, werden wir zunächst die möglichen Lösungswege suchen, begründen und festhalten:

Aufgabe: 3300 + 5400

I. Lösung	II. Lösung	III. Lösung
3300 = 3000 + 300	3300 + 700 = 4000	5400 = 5000 + 400
5400 = 5000 + 400	700 + 4700 = 5400	3300 + 5000 = 8300
3000 + 5000 = 8000	4000 + 4700 = 8700	8300 + 400 = 8700
300 + 400 = 700	3300 + 5400 = 8700	3300 + 5400 = 8700
8000 + 700 = 8700		
3300 + 5400 = 8700		

Bei der Wahl des Normalverfahrens aus den drei Lösungswegen sind nicht wie beim schriftlichen Rechnen Erwägungen über die Zweckmäßigkeit der äußeren Anordnung maßgebend, die das Absondern und das Zusammenfassen der Einheiten erleichtern, weil hier die schriftliche Fixierung überhaupt nicht oder dann nur in der „Form der Notiz" verwendet wird. Entscheidend ist hier vielmehr, daß an Stelle der schriftlichen Fixierung andere Mittel gesucht werden, die die Aufmerksamkeit und das Gedächtnis entlasten. Wir untersuchen unter diesem Gesichtspunkt die Abfolge der Teilaufgaben, die zum Ergebnis führen. Wir achten darum darauf, daß möglichst wenig Zerlegungen vorgenommen werden müssen, weil das Behalten der Zahl als Ganzes weniger Schwierigkeiten bereitet, als das Festhalten der dem Bildungsgesetz der Zahl entsprechenden Zerlegungen. Aus dem gleichen Grunde beginnt man, teilweise im Gegensatz zum schriftlichen Rechnen, mit den höchsten Teilanzahlen und sorgt dafür, daß die Teilergebnisse womöglich immer zugleich Endergebnisse sind, das heißt am Schlusse nicht noch einmal zusammengefaßt werden müssen. Ein Vergleich der drei Lösungswege, die oben angegeben wurden, ergibt:

I. Lösungsweg: Hier sind zwei Zerlegungen notwendig, die im Gedächtnis während des Vollzuges der Rechnung festgehalten werden müssen, wodurch Gedächtnis und Aufmerksamkeit belastet werden. Das gilt auch von den beiden Zwischenergebnissen, die im Schlußsatz zum Endergebnis führen.

II. Lösungsweg: In diesem Falle erfolgt eine Zerlegung des zweiten Summanden mit Rücksicht auf die nächste Tausendergrenze. Diese Zerlegung ist viel schwieriger als die nach dem Bildungsgesetz der Zahl.

III. Lösungsweg: 3300 wird als Ganzes festgehalten. 5400 wird nach dem Bildungsgesetz der Zahl in 5000 und 400 zerlegt. Durch das Zuzählen der 5000 zu 3300 wird ein Zwischenresultat erreicht, das gleich den Fortgang zum Endergebnis ermöglicht. Dieser Weg eignet sich darum am besten als Normalverfahren.

Nach diesen Grundsätzen wählen wir auch das Normalverfahren für die entsprechenden Subtraktionen. Damit beim Vervielfachen mit reinen Zehnern und Hundertern die Sicherheit gewahrt bleibt, werden wir den Multiplikator in ein Zehner- bzw. Hundertervielfaches zerlegen. Dieser Grundsatz gilt auch für die entsprechenden Divisionen. Die folgenden Beispiele sollen dies erläutern:

$$500 \times 430 = ?$$

$$\begin{aligned} 500 &= 100 \times 5 \\ 500 \times 430 &= (100 \times 5) \times 430 \\ &= 5 \times (100 \times 430) \\ 100 \times 430 &= 43000 \\ 5 \times 43000 &= \underline{215000} \end{aligned}$$

$$26800 : 80 = ?$$

$$\begin{array}{rcll} 80 &=& 10 \times 8 & \\ 26800 : 80 &=& 26800 : 10 : 8 & \\ 26800 : 10 &=& 2680 & \\ 2680 : 8 &=& ? & \\ 2680 &=& 2400 + 280 & \\ 2400 : 8 &=& \underline{300} & \text{Teilergebnis 1} \\ 280 &=& 240 + 40 & \\ 240 : 8 &=& \underline{30} & \text{Teilergebnis 2} \\ 40 : 8 &=& \underline{5} & \text{Teilergebnis 3} \\ 300 + 30 + 5 &=& \underline{\underline{335}} & \text{Gesamtergebnis} \end{array}$$

Das erworbene Normalverfahren ist bis zur Geläufigkeit und Sicherheit einzuüben. Zugleich ist dafür zu sorgen, daß es als geistiger Besitz lebendig bleibt. Wir werden zu diesem Zwecke immer wieder auf die Grundlagen zurückkommen, auf denen es beruht. Sodann ist die Möglichkeit geboten, die Aufmerksamkeit des Schülers auch auf andere Lösungswege zu lenken, die als Kontrollen benützt und damit sinnhaft mit dem Rechnen nach Normalverfahren verbunden werden. In diesem Zusammenhange sei auch auf die Bedeutung des Schätzens, der sogenannten Überschlagsrechnung, hingewiesen, die überdies vor groben Fehlern bewahrt. Das nachstehende Beispiel zeigt, wie diese Forderungen verwirklicht werden können.

Aufgabe: 60×3800

I. Schätzung: 3800 liegt zwischen 3000 und 4000, näher bei 4000. Das Ergebnis liegt also zwischen 60×3000 und 60×4000, also zwischen 180000 und 240000, aber näher bei 240000.

II. Normalverfahren:

$$\begin{aligned} 60 \times 3800 &= (10 \times 6) \times 3800 \\ &= 6 \times (10 \times 3800) \\ &= 6 \times 38000 \\ 6 \times 30000 &= 180000 \\ 6 \times 8000 &= 48000 \\ 180000 + 48000 &= \underline{228000} \end{aligned}$$

III. Kontrollverfahren:

a)
$$\begin{aligned} 60 \times 3800 &= 60 \times (4000 - 200) = (60 \times 4000) - (60 \times 200) \\ &= 240000 - 12000 = \underline{228000} \end{aligned}$$

b) $60 \times 3800 = (12 \times 5) \times 3800 = 12 \times (5 \times 3800) = 12 \times 19000 = \underline{\underline{228000}}$

c) $228000 : 60 = (180000 : 60) + (48000 : 60) = 3000 + 800 = \underline{\underline{3800}}$

V. Formen des Kopfrechnens.

Da die Schwierigkeit des Kopfrechnens durch die Art der Darbietung der Aufgabe mitbedingt ist, erscheint es zweckmäßig, folgende Formen zu unterscheiden:

1. das freie Kopfrechnen, bei dem die Aufgabe nur akustisch wahrnehmbar dargeboten wird,

2. das fixierende Kopfrechnen, bei dem die Aufgabe bleibend visuell wahrnehmbar dargeboten wird.

Es ist durch die wissenschaftliche Fehlerforschung erwiesen und wird durch die Unterrichtserfahrung immer wieder bestätigt, daß das freie Kopfrechnen größere Schwierigkeiten bereitet als das fixierende Rechnen. Seemann hat auf Grund seiner Experimente festgestellt, daß die Fehlerzahl bei der akustischen Darbietung der Aufgabe wesentlich höher ist als bei der optischen, und zwar bei allen Operationen und auf allen Schulstufen. Diese Tatsache ist wohl verständlich, denn beim freien Kopfrechnen fällt die im visuell wahrnehmbaren Reiz gegebene Hilfe weg, welche die Auffassung der Aufgabe und deren Lösung erleichtert, weil Gedächtnis und Aufmerksamkeit wirksam entlastet werden. Bei der akustischen Darbietung wirken sich darum Aufmerksamkeitsstörungen folgenschwer aus, weil der dargebotene Reiz ein verklingendes Gebilde ist, das nachträglich nicht mehr als Stützpunkt und Korrektiv zur Geltung kommen kann.

Diese Zusammenhänge begründen die Notwendigkeit, für die beiden Formen des Kopfrechnens besondere Bestimmungen aufzustellen, die den besonderen Schwierigkeiten gerecht werden. Die Erfahrung zeigt, daß durch planmäßige Übung die geistigen Betätigungen, das Zahlengedächtnis, die Aufmerksamkeit und das Denken zur Entwicklung kommen, so daß nach und nach gesteigerte Ansprüche bewältigt werden können. Die Aufstellung eines Kopfrechenlehrplans setzt die Beurteilung der durchschnittlichen Leistungsfähigkeit voraus, die in den aufeinander folgenden Klassen bei zweckmäßiger methodischer Hilfe erreicht werden kann und auch vom formalen und lebenspraktischen Standpunkt aus erstrebenswert ist. Um übersteigerte Ansprüche zu verunmöglichen, wurden im Stoffprogramm für das Kopfrechnen Grenzen festgelegt, die nicht überschritten werden sollten. Auch innerhalb dieser Grenzen sind Aufgaben möglich, die maximale Anforderungen stellen. Wenn sich beim Lösen solcher Aufgaben Schwierigkeiten ergeben, müssen Hilfen geboten werden, welche die Steigerung der

Leistungsfähigkeit ermöglichen und nachher überflüssig werden. Es sei in diesem Zusammenhang auf die Möglichkeit verwiesen, bei der Einübung neuer Verfahren zunächst Zwischenergebnisse zu notieren, damit nicht zu viele Schwierigkeiten auf einmal bewältigt werden müssen. Grenzen, die der durchschnittlichen Leistungsfähigkeit gezogen sind, durch drillmäßiges Üben auf Kosten der Erkenntnisbildung und einer freudigen Einstellung des Schülers zum Stoff sprengen zu wollen, hat keinen Sinn.

VI. Die Gestaltung der Übungsarbeit.

1. Das Ziel der Übungsarbeit.

Ziel der Übung ist die Entwicklung des einsichtig erworbenen Wissens zu einem lebendigen Können. Die Unterrichtserfahrung zeigt, daß wir ohne intensive Übung nicht auskommen, wenn wir dieses Ziel erreichen wollen. Die Forderung der Wiederholung gilt schon für den Prozeß der Erkenntnisgewinnung. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß das einmalige Erfassen der Beziehungen, auf denen ein Rechenverfahren beruht, noch keineswegs verbürgt, daß es geistiges Eigentum geworden ist. Wir stimmen darum Gerlach voll und ganz zu, wenn er fordert: „Einsichten müssen eben auch wiederholt gewonnen werden.“[1] Der wiederholte Erwerb einer Erkenntnis bedarf überdies der Ergänzung durch die wiederholte Anwendung, welche die erfaßten Beziehungen verlebendigt, wenn das erarbeitete Wissen verfügbarer, persönlicher Bildungsbesitz werden soll. Die Forderung nach wiederholtem Vollzug gilt aber vor allem dort, wo im Interesse einer Bewältigung komplexer Leistungen die in ihnen enthaltenen Elementarbetätigungen bis zur Geläufigkeit gesteigert werden müssen. Diese Bildungsaufgabe ist ein wichtiges Teilziel des Rechenunterrichtes, das nur erreicht werden kann, wenn jene Form der Wiederholung intensiv gepflegt wird, die wir als Übung bezeichnen und die den geläufigen und sicheren Vollzug einer Betätigung ohne weitgehende Inanspruchnahme des Bewußtseins ermöglicht. Das Leben und der bereits zu geistigem Gehalt verarbeitete Stoff stellen die Probleme. Durch wiederholte, dem Wesen des Erkenntnisgegenstandes entsprechende Veranschaulichung werden die Beziehungen erarbeitet, welche die Erkenntnismittel zur Lösung der gestellten Aufgabe darbieten. In der weiteren Entwicklung werden die auf anschauliche Einzelfälle angewandten Beziehungen in der begrifflich-allgemeinen Form erfaßt und auf der Stufe der Übung im Lösen reiner Zahlaufgaben bis zur Fertigkeit immer wieder vollzogen. Die erworbenen Begriffe werden hierauf durch Einkleidung in sachliche Zusammenhänge verlebendigt, wobei das Rechnen mit benannten Zahlen zur Geltung kommt. In den angewandten Aufgaben treten sie in Beziehung zum bereits erworbenen Wissen und Können und werden damit Element einer mathematischen Folge. Ohne eine durch Übung

[1] Gerlach, A., Lebensvoller Rechenunterricht, I. Teil, S. 150.

erzielte, hinreichende Rechenfertigkeit würde beim Lösen dieser komplexen Aufgaben eine geistige Gesamtbeanspruchung gefordert, welche die Leistungsgrenze übersteigen und damit die Rechensicherheit gefährden würde, weil dann das Bewußtsein nicht nur durch die logische Denkarbeit im Erfassen des Lösungsweges, sondern auch durch die aktive Einstellung auf die elementaren Rechenvorgänge belastet wäre[2]. Die Übung gestattet somit, das Prinzip der Ökonomie, das den Aufbau des mathematischen Stoffes beherrscht, für die Steigerung der Leistungsfähigkeit auszuwerten. Der durch Übung erzielte, geläufige und sichere Vollzug der rechnerischen Verfahren hat zudem große lebenspraktische Bedeutung.

Jene didaktischen Grundhaltungen, welche der anschaulichen Erarbeitung des Stoffes primäre Bedeutung beimessen und die Übung vernachlässigen, verkennen wichtige Grundtatsachen des geistigen Lebens und sind sowohl vom Standpunkt der formalen als auch der materialen Wertung unhaltbar. Sie sind ebenso einseitig wie jene Unterrichtsweise, welche die Übung betont, sie aber drillmäßig gestaltet und damit nur zur Übermittlung und mechanisch-gedächtnismäßigen Einprägung einer blinden Technik führt. Die Einsicht, daß für die Entstehung einer soliden Bildungsgrundlage das eindringende Erarbeiten und das intensive Üben notwendig sind, hat das Ringen um eine neue Unterrichtsgestaltung erweckt, in der die einseitigen Einstellungen zur Synthese kommen sollen. Dabei ist man aber der Gefahr einer bloß äußeren Verbindung der beiden Grundsätze nicht immer entgangen, denn indem man das Prinzip des selbsttätigen Erwerbs mit dem der Übung im Sinne eines drillmäßig-mechanischen Einpaukens verbindet, schließt man einen Kompromiß mit nicht weniger bedenklichen Konsequenzen, als die einseitigen Grundhaltungen sie zeitigten, die man damit zu überwinden hoffte. Wirkliche Aneignung kommt nicht in einem Prozeß zustande, in dem das lebendige, unter maximaler Inanspruchnahme des Bewußtseins sich vollziehende Zusammenwirken mit der Sache jäh abgebrochen wird und an Stelle des bewußt-aktiven Ergreifens ein mechanischer Vollzug mit passiver Bewußtseinslage tritt. Die weitere Klärung und Überführung des erarbeiteten Wissens in ein lebendiges Können ist nur dadurch möglich, daß in der Übung immer wieder von neuen Gesichtspunkten aus eine Bezugnahme auf die Grundlagen erfolgt, auf denen der Stoff beruht. So wird eine Einprägung erreicht, die den Vollzug eines Verfahrens mit reduzierter Bewußtseinstätigkeit ermöglicht, zugleich aber das Durchdenken der Beziehungen gestattet, auf die es sich gründet. So bleibt der Sinn eines erarbeiteten Stoffes auch auf der Stufe der Übung lebendig. Eine auf erworbener Erkenntnis beruhende, bis zur Geläufigkeit und Sicherheit gesteigerte und durch Besinnung auf die logischen Grundlagen lebendig erhaltene Rechenfertigkeit erweist sich auch als ein anwendungsfähiges und fortzeugendes Können. Von dieser Zielstellung muß darum die Gestaltung der Übungsarbeit beherrscht werden.

[2] Siehe Seemann, J., Die Rechenfehler. Ihre psychologischen Ursachen und ihre Verhütung, S. 110.

2. Grundsätze für die Gestaltung der Übung.

a) Notwendigkeit und Bedeutung des Vorrechnens.

Bevor im Unterricht mit der eigentlichen Übung begonnen werden kann, muß festgestellt werden, ob der Schüler den Stoff erkenntnismäßig erfaßt hat. Diese Feststellung ist aus verschiedenen Gründen notwendig. Einmal besteht die Möglichkeit, daß bei fehlender Prüfung des Verständnisses fehlerhafte Leistungen wiederholt und dadurch eingeprägt werden. Sodann bietet erst diese Kontrolle die Gelegenheit zur Feststellung, ob der Schüler nur auf Grund gedächtnismäßig-assoziativer Leistung zum richtigen Ergebnis kommt, oder ob er sein Tun auch zu begründen vermag. Es ist außerdem auch möglich, daß der Schüler nicht das erarbeitete, einfache und sichere Normalverfahren, sondern einen umständlichen, zeitraubenden und mit Fehlerquellen behafteten Lösungsweg einschlägt und durch Übung fixiert. Diese Hinweise mögen genügen, um zu zeigen, daß der Lehrer nicht nur das objektive Leistungsergebnis feststellen, sondern auch einen Einblick in den Arbeitsprozeß des Schülers gewinnen sollte. Scheibner betont als Mittel zur Bestimmung der „psychologischen Wertigkeit" einer Leistung „die unmittelbare Beobachtung des Arbeitsvorganges in der Folge seiner Teilarbeiten"[1]. Wir verwirklichen diese berechtigte Forderung, indem wir den Schüler vorrechnen und die Wahl der einzelnen Schritte und deren Folge begründen lassen. Durch solche Kontrollen sollte sich der Lehrer nicht nur vor, sondern auch während der Übungsarbeit immer wieder einen Einblick in die geistigen Vorgänge zu verschaffen versuchen. Die durch das Vorrechnen ermöglichte Analyse orientiert ihn nicht nur über die allgemeinen Schwierigkeiten bei der Bewältigung eines Rechenfalles, über Möglichkeiten und Grenzen des Verständnisses, sondern vermittelt ihm auch wertvolle „individualpsychologische Aufschlüsse". So kann er beispielsweise einen Einblick gewinnen in das Erfassen und gedächtnismäßige Behalten der Zahlen während der Ausführung der Rechnung, insbesondere in die Hilfsmittel, durch welche diese Tätigkeiten unterstützt werden. Da zeigt es sich, daß der eine Schüler die Zahlen vor allem auditiv erfaßt, ein anderer sich visueller Zahlbilder bedient, ein dritter im unartikulierten oder lautlichen Nachsprechen, also in sprechmotorischen Phänomenen eine Stütze sucht. Ausgeprägte Motoriker schreiben die Zahlen auf die Bank und benützen die Bewegung als Hilfe für die Auffassung der Zahlen. Auf diesem Wege lernt der Lehrer aber nicht nur die verschiedenen Auffassungs- und Gedächtnistypen, sondern auch die „verschiedenen typenhaften Ausprägungen der mathematischen Anlage" kennen. Diese Kenntnis gibt ihm wertvolle Hinweise für die Gestaltung des Unterrichts.

Es sei in diesem Zusammenhange auf die von Müller[2] aufgestellten Begabungsrichtungen verwiesen, deren Kenntnis für das didaktische Gestalten fruchtbar gemacht werden kann:

[1] Scheibner, O., Zwanzig Jahre Arbeitsschule in Idee und Gestaltung, S. 66ff.

[2] Müller, A., Wege zur Zahl, S. 7ff.

a) Der theoretische Typ bekundet Verständnis für die Gesetzmäßigkeit im Zahlaufbau, interessiert sich für besondere Eigenschaften der Zahlen, sucht gerne nach dem Lösungsweg. Er zeigt große Freude an Überschlags- und Kontrollrechnungen. In seinem Verhalten und in seinen Leistungen offenbart sich also eine große innere Bereitschaft und eine ausgesprochene Fähigkeit für das konstruktiv-theoretische Denken. Er rechnet deshalb auch ohne äußeren Antrieb.

b) Der mechanische Typ zeigt Fähigkeit zum „Reproduzieren früher erfaßter und erlernter Ergebnisse mit ausgesprochen ausschließlicher Konzentration der Aufmerksamkeit auf diesen Reproduktionsvorgang". Er will das Rezept haben, wissen, wie man es macht. Er zeigt Freude am gedächtnismäßig-mechanischen Vollzug gemerkter Ausführungsbestimmungen, am Lösen von Aufgaben gleicher Art, vor allem am reinen Zahlenrechnen. Angewandte Aufgaben, deren Lösung eben eine logische Durchdringung der sachlichen und zahlenmäßigen Beziehungen voraussetzt, schätzt er nicht. Dafür setzt er sich beim Wettrechnen im Gebiet der reinen Zahlen besonders ein. Er faßt die Zahlen gut auf, verfügt über ein treffliches Zahlengedächtnis und erreicht einen hohen Grad der Geläufigkeit.

c) Der ausgesprochene Anschauer und Anwender bekundet Freude und Fähigkeit „am zahlenmäßigen Erfassen und Gestalten von Erscheinungen und Geschehnissen der Umwelt". Er ist „Wirklichkeitsfanatiker". Er fragt nach der Möglichkeit und dem Sinn einer Rechnung. In seiner Zahlauffassung zeigt sich ausgeprägt die Gebundenheit an die räumliche Anschauung. Typisch für diesen Rechner ist auch das Haften am Einzelfall und die gesteigerte Schwierigkeit beim Übergang zur abstrakten Zahlauffassung.

Aus solchen Ergebnissen, die durch einen Einblick in die Arbeitsweise beim Vorrechnen vermittelt werden können, müssen dann aber auch die richtigen pädagogischen Folgerungen gezogen werden. Wir dürfen solche Aufschlüsse nicht dazu benützen, um die festgestellten Einseitigkeiten durch Übung im Unterricht weiter zu pflegen und dadurch unter Umständen die Entwicklung hemmender Gewohnheiten zu begünstigen. Wir benützen sie vielmehr zur Gestaltung einer psychologisch differenzierten Übungsarbeit, die zur Überwindung der Einseitigkeiten durch intensive Pflege der weniger entwickelten Betätigungen führt. Der Stoff muß so behandelt werden, daß alle dem Fache gestellten Bildungsziele nach Möglichkeit von allen Schülern erreicht werden. Die Einsicht in typische Besonderheiten des geistigen Lebens erleichtert dem Lehrer insofern die Verwirklichung dieser Forderung, als sie ihn über die zu erwartenden Schwierigkeiten bei den verschiedenen Schülern der Klasse orientiert, die sich bei der Bewältigung von Aufgaben ergeben können, welche ihrer besonderen Veranlagung nicht entsprechen. Der Einblick in den Arbeitsprozeß zeigt uns ferner, ob die anschaulichen Vorstellungen, die die Auffassung der Zahlen und den Rechenvorgang begleiten, die Ausführung der Rechnung begünstigen oder hemmen. So kann es beispielsweise vorkommen, daß ein Schüler im Kopfrechnen infolge der visuellen

Gebundenheit an typische, zahlbildhafte Darstellungs- und Zerlegformen versagt, vor allem die Stufe der Geläufigkeit nicht erreicht. Scheibner erwähnt einen sehr instruktiven Fall, wo durch Befragung festgestellt werden konnte, daß eine Schülerin deshalb sehr langsam im Kopf rechnete, weil sie dabei „mit den Zahlen nach dem schriftlichen Verfahren operierte, sich also von Ziffer zu Ziffer fortbewegte und mühsam Bilder von der folgenden Art konstruierte"[1]:

$$
\begin{array}{l}
39 \times 13 \\
\underline{117} \\
507
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
321 \\
+\ \underline{212} \\
533
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
500 : 12 = 41{,}6 \\
\ \ 20 \\
\ \ \ \ 8
\end{array}
$$

Sehr oft kann auch die Wahl schwieriger Zerlegungen die Steigerung der Sicherheit und der Geläufigkeit beim Kopfrechnen hemmen. Ich erinnere mich an einen Schüler, der bei der Ausführung von Zu- und Wegzählaufgaben immer zunächst bis zur nächsten Systemstufengrenze ergänzte oder verminderte, was bedingte, daß er oft schwierige Zerlegungen im Kopfe auszuführen hatte, z. B.:

$$
\begin{array}{r}
\underline{1204 - 780 = ?} \\
1204 - 204 = 1000 \\
780 = 204 + 576 \\
1000 - 576 = \underline{424}
\end{array}
$$

Nicht selten kommt es bei ausgeprägten Motorikern auch vor, daß sie die Ziffern der vorgesprochenen Zahlen auf die Bank schreiben, sich dabei aber durch die Sprechweise zu fehlerhaften Darstellungen verleiten lassen. Der Lehrer spricht fünfhundertsechsunddreißig, der Schüler schreibt 563. Da der Schüler auditiv schlecht auffaßt und das auditiv Erfaßte schlecht behalten kann, ist er bemüht, die vorgesprochene Zahl möglichst rasch zu schreiben. Darum wird die unlogische Abfolge der gesprochenen Einheiten maßgebend für die Darstellung der Zahl.

Das Vorrechnen, die Beobachtung des Schülers während der Ausrechnung und die Befragung bieten die Möglichkeit, die Ursache der Hemmung in der Entwicklung des Könnens und der Fehlleistungen zu erfassen und zu beseitigen, bevor daraus durch die Übung hemmende Gewohnheiten entstanden sind, die nur durch ein zeitraubendes und mühsames Umlernen behoben werden können. Die Anwendung dieser didaktischen Hilfsmittel ist für die richtige Beurteilung der Schülerleistungen und damit für die zweckmäßige Förderung des mathematischen Denkens unerläßlich. Sie bildet zudem eine wichtige Voraussetzung für den Erwerb einer sicher und geläufig gehandhabten Rechentechnik. Dem Schüler können so Umwege erspart werden. Der Einblick in die Vollzugsweise des Rechnens wird deshalb auch durch das Prinzip der Ökonomie gefordert.

1 Scheibner, O., a.O. S. 67.

b) Allmähliche Steigerung der Ansprüche.

Ein weiterer wichtiger Grundsatz für die Gestaltung der Übung ist die Forderung nach allmählicher Steigerung der Schwierigkeiten. Solange der Schüler noch bei der Reproduktion eines Verfahrens seine Aufmerksamkeit mit vollem Bewußtsein auf alle Teilschritte und deren Folge richten muß, werden wir ihm Hilfen gestatten, die das Gedächtnis entlasten, damit nicht eine Gesamtbeanspruchung erfolgt, die die momentane Leistungsmöglichkeit übersteigt. Eine wirksame Hilfe im Sinne einer Gedächtnisstütze ist das ausführliche Vorrechnen. Das Sprechen der Teilschritte und der Teilergebnisse entlastet das Gedächtnis, denn durch das Wiederholen der Aufgabe, die sprachliche Fixierung der Teilergebnisse und die dabei wirksamen sprechmotorischen Momente wird die Einprägung begünstigt. Die Anforderungen können auch durch das Anschreiben der Aufgabe und eines oder mehrerer Teilergebnisse erleichtert werden. Sobald der Schüler den Lösungsweg beherrscht, erfolgt eine Reduktion der Hilfen. Eine weitere Steigerung der Ansprüche ist dadurch möglich, daß das Verfahren in der kürzesten Form reproduziert wird. Die Teilsätze werden nicht mehr gesprochen, sondern nur noch die Teilergebnisse. Schließlich wird nur noch das Endergebnis erwähnt.

Ausführliche Form	Abgekürzte Formen	
$3 \times 357 = ?$	a) $3 \times 357 = ?$	b) $3 \times 357 = ?$
$3 \times 300 = 900$	900	900
$3 \times 50 = 150$	150	1050
$900 + 150 = 1050$	1050	1071
$3 \times 7 = 21$	21	
$1050 + 21 = 1071$	1071	

Eine solche Aufgabe kann erst dann Gegenstand der Übung werden, wenn die Teilaufgaben bereits gesondert geübt worden sind. Dem Grundsatz nach systematischer Steigerung der Schwierigkeiten entsprechend muß ganz allgemein gefordert werden, daß zusammengesetzte Aufgaben, deren Lösung über eine Kette von Teilaufgaben erreicht wird, erst dann Gegenstand der Übung werden dürfen, wenn im Lösen dieser Teilaufgaben selbst durch die Übung eine hinreichende Sicherheit und Geläufigkeit erworben worden ist. Überdies muß gefordert werden, daß der Zusammenhang, in dem sie als Glieder auftreten, klar erkannt worden ist. Die Lösung der oben gestellten Aufgabe erfolgt nach dem distributiven Gesetz der Multiplikation, das bestimmt, daß $a\,(b+c) = a \times b + a \times c$ ist. Angewandt auf das Beispiel 3×357 lautet es:

$$3 \times 357 = 3 \times (300 + 50 + 7) = 3 \times 300 + 3 \times 50 + 3 \times 7.$$

Diesen Zusammenhang muß der Schüler erfaßt haben, bevor wir mit der Übung beginnen können.

Eine weitere Steigerung der Anforderungen erfolgt beim Lösen der Kettenaufgaben, die nicht nur vom psychologisch-mathematischen, sondern auch vom lebenspraktischen Gesichtspunkt aus gerechtfertigt sind. Unter Kettenrechnungen versteht man eine Folge von Aufgaben, bei denen der Ausgangswert identisch ist mit dem Ergebnis der unmittelbar vorher gelösten Aufgabe. Die einzelnen Teilaufgaben werden also durch die Teilergebnisse miteinander verkettet. Das Ergebnis der zuletzt gelösten Aufgabe stellt zugleich das Schlußergebnis dar.

Wir geben nachfolgend einen Überblick über die Formen der Kettenaufgabe, in dem diese als Glieder einer methodischen Entwicklungsreihe aufgeführt werden. Wir unterscheiden:

1. Kettenaufgaben, bei denen sowohl die Operation als auch die Funktionalzahl konstant bleibt, z. B.:

$$443+17+17+17+17+17$$
$$1104-49-49-49-49-49$$
$$55\times 6\times 6\times 6\times 6 \qquad (6=\text{Multiplikator})$$
$$32400:6:6:6:6$$

Die Konstanz der Operation und des Operators erleichtern ohne Zweifel die rechnerische Leistung. Sie bewirken eine „latente Einstellung“ mit perseverativem Charakter, so daß die determinierenden Tendenzen, das Erfassen und das Festhalten der Ziele, das Bewußtsein nicht mehr wesentlich belasten. Seemann erklärt im Hinblick auf diesen Zusammenhang: „Durch die mehrmalige Wiederholung derselben Operation ist das ursprüngliche Wollen und mit ihm die Determinierung dergestalt abgeflacht, daß sie für den Ablauf des Geschehens nur noch die regulierende Nachwirkung des Bereitseins bilden und die Intentionalität sich dem Nullpunkt nähert. Mit dieser Verflachung des Wollens geht die Automatisierung der Lösung Hand in Hand. Die Lösungsform wird zum Schema, das angewandt wird, ohne daß es in allen seinen Teilen bewußt wird. Dazu kommt als wesentliche Tatsache, daß das geübte Wollen in der Form der Einstellung ebenso perseverativen Charakter hat wie die Vorstellungen“[1]. Durch die Wiederholung wird überdies das Festhalten des Operators erleichtert und damit die Gedächtnisleistung reduziert. Die Konstanz des Operators bewirkt, daß bei den Additions- und Subtraktionsaufgaben immer dieselben Zerlegungen vorkommen und in den Multiplikations- und Divisionsbeispielen ein relativ einheitliches multiplikatives Wissen verwendet wird. Sie erleichtert zudem die Lokalisierung, d. h. die Einordnung der durch die Rechenvorschrift in bestimmter Weise zueinander in Beziehung gesetzten Zahlen in das Zahlsystem. Die dabei erforderliche bewußte Einstellung der Aufmerksamkeit auf die relativ gleichförmige Veränderung des wechselnden Ausgangswertes in den einzelnen Teilaufgaben ist deshalb leicht, weil sie nicht durch die Konzentration auf andere Beziehungen belastet wird.

[1] Seemann, J., a.O. S. 53.

2. Kettenaufgaben, bei denen die Operation gleich bleibt, aber der Operator wechselt, z. B.:

$$865 + 209 + 2500 + 6 + 180$$
$$14000 - 6500 - 900 - 2950 - 1600$$
$$85 \times 6 \times 8 \times 5 \times 3 \quad (6, 8, 5, 3 = \text{Multiplikatoren})$$
$$480000 : 80 : 150 : 5$$

Bei Bezugnahme auf die oben gegebene Analyse ist leicht ersichtlich, daß diese Form schon größere Anforderungen stellt und anderen Zielen dient. Infolge der Umstellung auf einen neuen Operator und damit auch auf neue Zerlegungen und auf Multiplikationssätze, die nicht innerhalb derselben Reihe liegen, werden Aufmerksamkeit und Gedächtnis stärker in Anspruch genommen.

3. Kettenaufgaben mit wechselnder Operation und wechselndem Operator. Es ist selbstverständlich, daß diese Form erst gepflegt wird, wenn im Lösen der Einzelaufgaben, aus denen sich die Kette zusammensetzt, eine gewisse Sicherheit und Geläufigkeit erreicht worden ist. Die hier geforderte Umstellung auf neue Zahlverhältnisse fällt dem Schüler nicht leicht. Man kann beim Lösen solcher Aufgaben immer wieder feststellen, daß beispielsweise die Einstellung auf eine bereits vollzogene Operation nachwirkt und zu einer perseverativ bedingten Fehlleistung führt. Der Schüler beachtet die Aufforderung zur Subtraktion nicht. Weil vorher zwei Additionsaufgaben gelöst worden sind, wirkt die Einstellung auf die additive Beziehung unbewußt nach und führt zu einer Fehlleistung. Gerade diese Tatsache zeigt die Notwendigkeit dieser Form der Kettenaufgaben zur Steigerung des aufmerksamen Verhaltens, die zur Beweglichkeit führt. Die Beweglichkeit bekundet sich in der bewußten Einstellung und im richtigen Erfassen der wechselnden Einwirkungen. Sie ist Voraussetzung für den Vollzug komplexer Leistungen.

Ganz allgemein muß festgestellt werden, daß das Lösen der Kettenaufgaben, besonders in der unter Punkt 2 und 3 erwähnten Form, an die Konzentrationsfähigkeit des Schülers größere Anforderungen stellt als das Lösen von Einzelaufgaben. Damit die Rechensicherheit nicht gefährdet und infolge sich wiederholender Fehlleistungen der spontane Leistungswille nicht geschwächt wird, darf man die Leistungsansprüche nicht zu hoch stellen. Die Ketten sollten nicht mehr als fünf Teilaufgaben enthalten. Bei der Beurteilung des Kettenrechnens darf nicht vergessen werden, daß die Lösung eingekleideter und angewandter Aufgaben meistens auch über eine Folge von Teilaufgaben gewonnen wird, die eine Kette darstellt. Das Leben stellt nicht nur Einzelaufgaben mit zwei Gliedern, sondern sehr häufig mehrgliedrige Kettenaufgaben. Wir haben deshalb auch vom lebenspraktischen Standpunkt aus allen Grund, diese Aufgabenform zu pflegen. Daß Kettenrechnungen zu interessanten Problemstellungen führen können, sei durch folgende Beispiele belegt:

a) $14+49+49+49+49=$? Beachte die Einer in den Teilergebnissen! 63, 112, 161, 210. Warum?

b) Die gleiche Aufgabe mit Variation des Lösungsweges:

$14+(50-1)+(50-1)+(50-1)+(50-1)=$

$14+4\times(50-1)=14+200-4=\underline{210}.$

c) $126+78-34+78-34 =$?

$126+(78-34)+(78-34) = 126+44+44 = 126+(2\times 44) = \underline{214}.$

d) $4400 : 8 : 2 : 5 : 11 = 4400 : 880 = \underline{5}.$

e) $7+14+21+28+35+42+49+56+63 =$

$(7+63)+(14+56)+(21+49)+(28+42)+35 =$

$(4\times 70)+35 = 280+35 = \underline{315}.$

Diese Aufgaben werden zuerst in der Form der Kettenrechnung gelöst. Nachdem der Schüler die ganze Aufgabe überblicken kann, fordern wir ihn auf, nach Zahlbeziehungen zu suchen, die das Rechnen erleichtern. Wir bezwecken mit solchen Rechenvorteilen nicht ein rascheres Lösen der Aufgabe. Wichtig ist dabei vielmehr, daß durch das scharfe Beobachten und das kombinierende Denken die Zahlbeziehungen geklärt werden. Durch solche Beispiele können wir die Übungsarbeit beleben. Vor allem die konstruktiv-theoretisch begabten Schüler werden an dieser Rechenarbeit große Freude bekunden.

Das Kettenrechnen kann auch dadurch interessant gestaltet werden, daß der Lehrer dem Schüler gestattet, das Anfangsglied der Kette selbst zu wählen. Der Schüler nennt nur das Ergebnis, und der Lehrer sagt ihm, von welcher Zahl er ausgegangen ist. Solche Aufgaben erwecken nicht zuletzt deshalb großen Eifer und große Freude, weil der Lehrer sich als Mitrechnender in die Arbeitsgemeinschaft der Klasse einfügt. Die rätselhafte Fähigkeit, die gedachte Ausgangszahl mit Bestimmtheit auf Grund des mitgeteilten Ergebnisses feststellen zu können, weckt geistige Spannung und treibt zur Ergründung des Geheimnisses an. Ein Beispiel:

Denkt euch eine Zahl! Vervielfacht sie mit 5! Zählt 26 hinzu! Vervielfacht das Ergebnis mit 4! Zählt davon die zuerst gedachte Zahl weg!

Der Lehrer stellt die Gleichung auf, deren Lösung zur Bestimmung der gedachten Zahl führt. Bezeichnen wir diese mit X. Die Gleichung lautet:

$(5X+26)\times 4-X =$ das Schlußergebnis, z. B. 446.

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} 19X+104 &= 446 \\ 19X &= 342 \\ \underline{X} &\underline{= 18} \end{aligned}$$

Damit sich für die Schüler nicht zu schwierige Aufgaben ergeben, ist es notwendig, den Zahlenraum, aus dem die Ausgangszahl gewählt werden soll, zu begrenzen. (Siehe E. Fettweis, Methodik für den Rechenunterricht, Paderborn 1929.)

c) Die Regelung des Rechentempos.

Von großer Bedeutung für den Erfolg der Übung ist die Regelung des Rechentempos. Es wurde bereits erwähnt, daß Verständnis, Beweglichkeit, Sicherheit und Geläufigkeit das lebendige Können kennzeichnen, welches Ziel der Übungsarbeit im Kopfrechnen ist. Zum Begriff der Geläufigkeit gehört als wesentliches Merkmal die Forderung der Rechenschnelligkeit. Didaktische Experimente haben gezeigt, daß diese durch zielbewußte und planmäßige Übung gesteigert werden kann. Dieselbe Aufgabe wird in den oberen Klassen wesentlich schneller gelöst als in den untern. In dieser Verkürzung der Rechenzeit in den aufeinander folgenden Klassen offenbart sich eine Entwicklung der Rechengeschwindigkeit. Diese Entwicklungsmöglichkeit und deren positive Wertung, welche vom mathematischen und vom lebenspraktischen Standpunkt aus gerechtfertigt werden kann, dürfen den Lehrer aber nicht dazu verleiten, gleich von allem Anfang an maximale Ansprüche zu stellen. Es gibt auch hinsichtlich der Schnelligkeit eine Leistungsgrenze, die nicht überschritten werden darf, wenn nicht ungünstige Nebenwirkungen erfolgen sollen. Seemann weist in diesem Zusammenhange auf Grund der Ergebisse der Fehleranalyse auf die beachtenswerte Tatsache hin, daß es eine Grenzgeschwindigkeit gibt, die nicht ohne Gefährdung der Rechensicherheit überschritten werden kann. Er stellt fest, daß durch übersteigerte Ansprüche an die Schnelligkeit vor allem die Perseveration als Fehlerquelle zur Geltung kommt. Wir ziehen aus diesen Zusammenhängen die pädagogische Folgerung, indem wir den Grundsatz aufstellen: Das Rechentempo ist so zu steigern, daß die Rechensicherheit gewahrt bleibt.

Geläufigkeit ohne Sicherheit ist wertlos. Wer aus falschem Ehrgeiz oder infolge mangelnder Kenntnis der Grundtatsachen des geistigen Lebens das, was nur Ergebnis einer Entwicklung sein kann, die sich unter dem Einfluß planmäßig gesteigerter Anforderungen vollzieht, gleich am Anfang verlangt, begeht einen Irrweg. Jede Entwicklung braucht Zeit. Dies gilt auch von der Entwicklung der Rechenschnelligkeit. Die langen Reaktionszeiten am Anfang einer Übung werden dadurch bedingt, daß der Schüler noch jeden einzelnen Schritt eines Rechenvorganges mit vollem Bewußtsein vollziehen muß. Der Lehrer muß sich bewußt sein, daß auf dieser Stufe ein Hindrängen auf einen schnellen Vollzug auf Kosten der Gründlichkeit und damit der Sicherheit geht. Er wird darum dem Schüler die nötige Zeit zur eindringenden Besinnung geben und ihm durch seine Haltung zeigen, daß ihm einstweilen die Richtigkeit des Ergebnisses das höchste Ziel ist. Er sorgt durch das deutliche und langsame Vorsprechen der neuen Aufgaben dafür, daß diese auch richtig aufgefaßt werden können. Dies ist vor allem nötig bei Aufgaben mit gleichen oder ähnlichen Zahlen, weil sonst leicht die nach Ranschburg bezeichnete Hemmung als Fehlursache zur Geltung kommt, welche auf einer verstärkten Perseverationstendenz beruht, die sich im Ergebnis bemerkbar macht, z. B. $333+9=343$. Er wird vor allem auch auf dieser ersten Stufe der Übungsarbeit dafür besorgt sein, daß nicht einzelne Schüler der Klasse ein übersteigertes Rechentempo aufzwingen. Erst nach erfolgter sicherer Grundlegung darf das Rechentempo allmählich gesteigert werden. Dabei muß er sich der Tatsache bewußt sein, daß innerhalb der Klasse die Leistungsfähigkeit große Schwankungen aufweisen kann. Sofern er bestrebt ist, nicht nur mit einzelnen Schülern, sondern mit der ganzen Klasse das gestellte Ziel zu erreichen, wird es zweckmäßig sein, die Leistungsanforderungen hinsichtlich Schnelligkeit nicht nach den Begabtesten zu richten, sondern nach dem Durchschnitt der Klasse. Die Häufung der Fehlreaktionen ist ihm ein untrügliches Kennzeichen für den übersetzten Anspruch, vor dem im Interesse der Rechensicherheit gewarnt werden muß. Jene einseitige Auffassung der Bildungsaufgabe, die Geläufigkeit als höchstes Ziel wertet, sie mit Akrobatik verwechselt und dazu verleitet, die zur Verfügung stehende Zeit ausschließlich zur Mechanisierung der Rechenvorgänge zu verwenden, muß mit allem Nachdruck zurückgewiesen werden.

Es sei in diesem Zusammenhange auf jene Übungsform verwiesen, die als Wettrechnen bezeichnet wird. Wir berühren damit das schwierige Problem, ob überhaupt und in welchem Ausmaß die Triebenergien in der pädagogischen Situation ausgenützt werden sollen. Es besteht kein Zweifel darüber, daß im Volksschulalter ein spontanes Bedürfnis besteht, sich mit Kameraden im Wettstreit zu messen. Ein ausgesprochenes Streben nach Geltung, nach Steigerung des Selbstbewußtseins durch das Sichbehaupten gegenüber den Kameraden, wirkt als Antrieb. Die Durchführung des Wettkampfes ermöglicht den Leistungsvergleich, der die Grundlage für die Beurteilung der eigenen Leistungsfähigkeit bildet und je nach dem Ergebnis zu einem erhöhten Selbstvertrauen, zu neuen Vorsätzen und Hoffnungen oder zur Entmutigung führt. Die oft geradezu leidenschaftliche Hingabe zeigt deutlich, daß sich elementare Triebkräfte auswirken. Es ist im Hinblick auf diese Tatsachen wohl verständlich, daß versucht wird, Antriebe, die zu einem so starken persönlichen Einsatz führen, für jene Form des Lernens dienstbar zu machen, die wir als Übung bezeichnen. Jeder Lehrer weiß aus Erfahrung, daß es nicht leicht ist, beim Schüler eine innere, geistig-sachliche Bereitschaft für diese didaktisch notwendige Arbeitsform zu erwecken und den Willen zur Leistung über längere Zeit wach zu halten. Das Bestehen dieser Schwierigkeit wird verständlich, wenn man bedenkt, daß Übung leicht in Gleichförmigkeit erstarrt, weil die neuen stofflich-objektiven Antriebe fehlen. Es darf auch nicht übersehen werden, daß das immer wieder sich erneuernde Ringen mit denselben Schwierigkeiten beim Schüler Unlustgefühle auslöst, die nur durch einen zähen Willen überwunden werden können. Da der Übungserfolg erst nach längerer Anstrengung sichtbar wird, kann das sonst so mächtig antreibende Erfolgsgefühl gerade in jener Phase nicht zur Geltung kommen, in der sich der Schüler der Schwierigkeiten in ausgeprägter Weise bewußt wird. Es ist wohl nicht zuletzt gerade diese Problematik, die dazu verleitet, das Geltungsstreben als Antriebmittel zu benützen.

Wir müssen uns aber dabei bewußt sein, daß solche Maßnahmen auch unerwünschte Nebenwirkungen haben können. An Stelle der sachlichen Motivation, des Willens zur Selbststeigerung durch das Überwinden von Widerständen, tritt der vom Streben nach Geltung erweckte Einsatz, der auch im Rahmen einer „planvollen Intensivierung der triebhaften Anteilnahme an der Schularbeit"[1] zu Hemmungen führen kann. Ziegler weist auf die möglichen Gefahren hin, wenn er schreibt: „Niederlagen und Enttäuschungen müssen sich um so verhängnisvoller im Sinne einer Belastung — unter Umständen traumatischer Art — auswirken, je leidenschaftlicher vorher der seelische Einsatz war, und es wäre vielleicht häufig zu erwägen, ob die betreffende Energie nicht besser in ihrem Schlummer belassen werden sollte. Die Gefahr einer solchen Verfrühung oder Überbelastung besteht sowohl für die Aktivierung der Ichtriebe als auch der erotischen Energien".

Es sei in diesem Zusammenhange auf die Tatsache hingewiesen, daß nicht selten theoretisch gut begabte Rechner, welche die zur Selbstbehauptung nötige Fertigkeit nicht erreichen, beim Wettrechnen versagen. Es können durch solche Niederlagen Minderwertigkeitsgefühle ausgelöst werden, die unter Umständen die günstige Einstellung zum Fache schwer schädigen. Denken wir auch an die ängstlichen Schüler, bei denen durch solche Veranstaltungen Affekte erweckt werden, welche einen Erfolg zum vorneherein ausschließen. Zudem bereitet die Durchführung des Wettrechnens, sofern in gerechter Weise die Rangordnung ermittelt werden soll, fast unüberwindbare Schwierigkeiten und beansprucht soviel Zeit, daß der eigentliche Übungswert nicht zur Geltung kommt. Wer sich dieser Zusammenhänge bewußt ist, wird diese Übungsform mit aller Vorsicht und nur gelegentlich verwenden. Vor allem wird man dafür besorgt sein, daß jeder intensive Einsatz, auch wenn er nicht zum Erfolge führt, gewürdigt wird. Damit wir gegenüber jenen Schülern nicht ungerecht werden, die erst nach langer Arbeit zu einem Übungserfolg kommen, werden wir das Wettrechnen erst nach Abschluß der eigentlichen Übungsarbeit durchführen. Bedenken wir überdies, daß es auch andere Mittel gibt, um den Leistungswillen zu erregen. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, daß wir den Schüler von der Bedeutung der durch intensive und planmäßige Übung erreichten Rechenfertigkeit für die Bewältigung komplexer Aufgaben überzeugen, indem wir ihn die aufbauende Wirkung eines lebendigen Könnens erleben lassen. Wie umständlich ist das Zusammenzählen einer Reihe gleicher Summanden gegenüber der abgekürzten multiplikativen Lösungsform! Wie wertvoll ist darum die durch Übung erworbene Beherrschung des Einmaleins! Solche Möglichkeiten, im Schüler über das erweckte Wertbewußtsein den Leistungswillen zu beeinflussen, bestehen überall. Ohne äußere Antriebe, durch die der Wille zur Leistungssteigerung aufgerufen wird, kommen wir im Unterricht, vor allem bei der Übungsarbeit, nicht aus. Die Voraussetzung, daß ohne Anpassung an die bereits bestehende, aus dem Innersten quellende

[1] Ziegler, H. W., Zur neueren Psychologie des Lernens, „Erziehung" VIII, 311.

Bereitschaft überhaupt keine Bildungswirkung möglich sei, widerspricht der Erfahrung.

d) Die Variation der Übungsform.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Übungsarbeit leicht in einer Gleichförmigkeit erstarrt, die die Anteilnahme des Schülers beeinträchtigt. Es ist deshalb wohl verständlich, daß der Lehrer versucht, die Arbeits- und Einsatzbereitschaft durch Anregung des Geltungs- und des Wissenstriebes lebendig zu erhalten. Es äußert sich in solchen Maßnahmen ganz allgemein das Streben, die Übung zu beleben und damit Freude und Hingabe an Tätigkeitsformen zu wecken und wach zu halten, die an sich wenig anreizend wirken. Dieses Streben nach Belebung der Übung durch Variation der Übungsform[1] ist pädagogisch wertvoll und kann als Grundsatz für die Gestaltung der Übungsarbeit anerkannt werden, sofern die gewählten Formen sich im Hinblick auf die gestellte Bildungsaufgabe als zweckmäßig erweisen. Damit werden zum vornherein alle jene Übungsweisen abgelehnt, die dadurch Freude und Interesse am Gegenstand der Arbeit erwecken wollen, daß sie ihn mit lustbetonten Betätigungen verbinden, welche mit der zu übenden Tätigkeit nichts zu tun haben. Durch solche Maßnahmen erreicht man, daß die Aufmerksamkeit abgelenkt wird und der Gegenstand der Übung nur noch als Begleitphänomen zur Geltung kommt. Wir denken in diesem Zusammenhang beispielsweise an die Verbindung der rechnerischen Betätigungen mit gesprochenen und gesungenen Versen, die zur Spaltung der Aufmerksamkeit und damit zur Zerstreuung führt. Die gleichen Bedenken müssen gegenüber jener Auffassung des didaktischen Gestaltens erhoben werden, die Bewegung als Prinzip mit uneingeschränkter Gültigkeit wertet und dementsprechend durch die Verbindung des Rechenunterrichts mit Bewegungsspielen eine lustbetonte Einstellung des Schülers zur Übung erreichen will. Die Bewegung, die als Mittel zur Veranschaulichung einzelner elementarer Vorgänge eine gewisse Bedeutung haben mag, darf im Rechenunterricht nicht zum Grundsatz ausgeweitet werden. Die prinzipielle Wertung der Bewegung verleitet leicht zu Maßnahmen, welche die stille, eindringende Besinnung, die geistige Konzentration auf den Gegenstand des Unterrichts, die eine Grundvoraussetzung des Bildungserfolges darstellt, eher hemmen als fördern, weil sie ablenkend wirken. Es liegt ein Trugschluß vor, wenn man betont, daß das Kind das Interesse, das es am Bewegungsspiel bekundet, auch auf den Gegenstand der Übung übertrage. Es muß sich am Stoffe selbst entzünden, in lebendiger Auseinandersetzung mit dem Gegenstand selbst erweckt werden, wenn es Kraftquelle sein soll.

Wir erwähnen nachfolgend eine Reihe von Übungsformen, welche sich im Hinblick auf das Übungsziel als zweckmäßig erweisen. Sie sollen den Begriff „Übungsform" beispielhaft verdeutlichen und zugleich zeigen, daß eine Variation der Übungsform möglich ist, welche zur inneren Belebung des Unterrichtsgegenstandes beitragen kann.

[1] Vgl. Weise, M., Pädagogische Übung. Begriff, Formen, Grenzen. Alwin Huhle, Dresden, 1932.

e) Übungsformen und deren Bedeutung, mit Beispielen aus dem Stoffgebiet des 4. bis 6. Schuljahres.

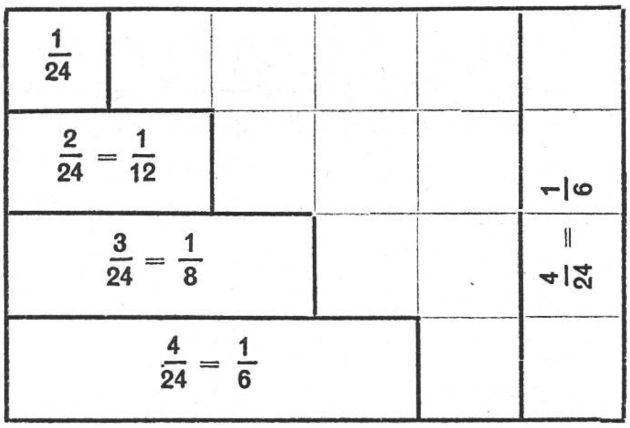
1. Übung mit Bezugnahme auf eine Anschauungsgrundlage.

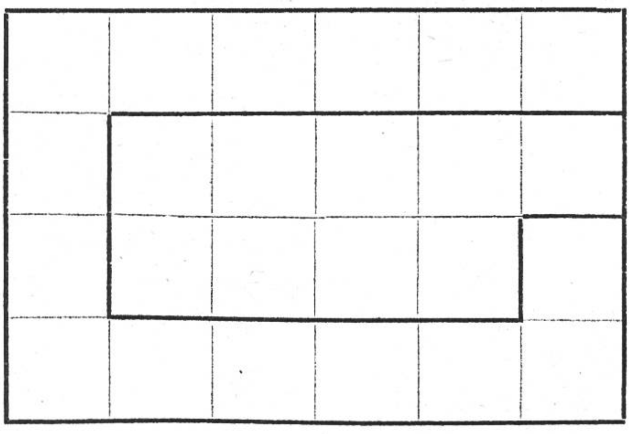
Übungsstoff: Bruchrechnen, die Beziehung Ganzes — Teil, wobei das Ganze durch ein Rechteck repräsentiert wird. Es wird in 24 Quadrate aufgegliedert. Der Lehrer grenzt innerhalb dieses Rechteckes Flächen ab, die sich aus solchen Quadraten zusammensetzen. Die Schüler drücken in Brüchen die Verhältnisse des Ganzen zu den Teilflächen aus. Sobald der Sinn der Übungsaufgabe verstanden worden ist, können auch die Schüler solche Aufgaben stellen. Später werden vom Lehrer Brüche genannt, und der Schüler zeigt die entsprechenden Flächen.

Voraussetzung: Der Schüler ist in das Wesen des Bruchbegriffes eingeführt worden, das sich in der Entfaltung der Einheit zur Vielheit und in der Gleichsetzung der Vielheit mit der Einheit bekundet.

Ziel der Übung: In Anlehnung an anschauliche Grundlagen soll der Schüler im Erfassen der Beziehung Ganzes — Teil zur Sicherheit und Geläufigkeit geführt werden. Es werden Beziehungen gewählt, die nicht nur rechnerisch wertvoll sind, sondern denen auch eine praktische Bedeutung zukommt, z. B.: 24, Tag — Std., 12, Dtz. — Stck., 60, Std. — Min., usw.

a





$$\frac{9}{24} = 3 \times \frac{3}{24} = 3 \times \frac{1}{8}$$

b[1]

Dtz.												
Stck.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$\frac{1}{2}$						$\frac{2}{2}$
Brüche				$\frac{1}{3}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{3}{3}$
			$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{4}$			$\frac{3}{4}$			$\frac{4}{4}$
		$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{6}{6}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$

c) Die Schüler schneiden aus Halbkarton eine Kreisfläche von 7 cm Durchmesser aus, teilen die Kreislinie in 12 Teile und tragen die Stundenzahlen ein. Hierauf wird die Minuteneinteilung eingezeichnet. In dieses Zifferblatt werden die Zeiger eingesetzt. Die Kreislinie stellt das Ganze dar. Wir bestimmen nun den Weg, den der große Zeiger in 1, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 12, 45, 25, 35, 58 Minuten zurücklegt. Es werden die durch die beiden Zeiger begrenzten Flächenausschnitte als Bruchteile der Kreisfläche angegeben,

z. B.: 1 Uhr —— $\frac{1}{12}$ 3 Uhr —— $\frac{1}{4}$ 6 Uhr —— $\frac{1}{2}$

9 Uhr —— $\frac{3}{4}$ 4 Uhr —— $\frac{1}{3}$ 7 Uhr —— $\frac{7}{12}$

Es werden zu gegebenen Brüchen die entsprechenden Zeigerstellungen gesucht, z. B. $\frac{1}{3}$ —— 4 Uhr, $\frac{1}{4}$ —— 3 Uhr, $\frac{2}{3}$ —— 8 Uhr. Der große Zeiger legt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$ zurück, wie viele Minuten braucht er dazu? Der große Zeiger rückt 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 45, 17, 23, 59 Minuten vor. Drücke die in den angegebenen Zeiten zurückgelegten Wege in Brüchen aus!

Das Zifferblatt kann auch in der Geometrie zur Darstellung von Winkeln verwendet werden. Wir können es später wiederum als anschauliche Grundlage für die Berechnung der Winkel benützen, welche die Zeiger zu einer angegebenen Zeit bilden, z. B.:

Es ist 8.20 Uhr. Wie groß ist der Winkel, den die beiden Zeiger bilden? Der große Zeiger steht auf 4, der kleine zwischen 8 und 9. Die Fläche zwischen

[1] Vgl. Henkler P., a.O. S.57

4 und 8 entspricht $\frac{1}{3}$ der Kreisfläche. Dazu kommt noch $\frac{1}{36}$. Der durch die beiden Zeiger begrenzte Flächenausschnitt entspricht somit $\frac{1}{3}+\frac{1}{36} = \frac{13}{36}$ der ganzen Fläche. $\frac{13}{36}$ von $360^\circ = 130^\circ$.

2. Übung auf Grund einer Zusammenstellung von Aufgaben, die an die Wandtafel geschrieben wird oder im Rechenbuch vorliegt.

Übungsstoff: Vervielfachen zwei- und dreistelliger Zahlen mit reinen Hundertern. Der Lehrer zeigt die Aufgabe, die Schüler lösen sie. Zunächst werden die Aufgaben vorgerechnet, nachher werden nur noch das Zwischen- und das Endergebnis erwähnt und zwar durch verschiedene und durch den gleichen Schüler. Wenn die Schüler im Vollzug des Lösungsverfahrens die nötige Sicherheit erreicht haben, kann auf die Angabe des Zwischenergebnisses verzichtet werden. Aufgabenbildung durch die Schüler.

Übungsziel: Einübung des erarbeiteten Normalverfahrens, das eine Anwendung des assoziativen Gesetzes der Multiplikation darstellt: $a\ (b \cdot c) = (a \cdot b)\ c$.

Normalverfahren: $200 \times 73 = (2 \times 100)\ 73 = 2\ (100 \times 73) = 2 \times 7300 = \underline{14600}$

Zusammenstellung von Aufgaben mit reinen Zahlen:

200 × 54, 86, 73, 21, 540, 860, 290, 370, 630, 980, 105, 509
500 × 48, 32, 79, 65, 810, 470, 906, 305, 709, 207, 101, 606
300 × 27, 88, 35, 77, 160, 720, 490, 980, 206, 805, 507, 706
600 ×
800 ×
400 ×
900 ×

Nachstehend soll noch ein Beispiel für die gleiche Übungsform erwähnt werden, bei dem es sich um Kettenrechnungen handelt. Die Ergebnisse der waagrechten Reihen ergeben eine neue Kette, deren Resultat die additive Zusammenfassung der Summanden sämtlicher Ketten darstellt. Die Addition der senkrechten Reihen ermöglicht eine Kontrollösung mit neuen Aufgaben. Die Zusammenstellung enthält somit 11 Kettenrechnungen, die im ganzen 38 Einzelaufgaben enthalten[1].

$$\begin{array}{r}
1900+3500+2800+1700 = 9900 \\
600+1400+4200+1800 = 8000 \\
2600+900+1400+500 = 5400 \\
400+1300+700+2100 = 4500 \\
\underline{3600+1700+800+3900 = 10000} \\
\hline
9100+8800+9900+10000 = \underline{\underline{37800}}
\end{array}$$

[1] Müller A., a. O., II. Teil, S. 30.

3. Übung mit Verwendung von Rechenkärtchen.

Übungsstoff: 24er-Reihe.

Die Klasse wird in zwei gleich große Gruppen aufgeteilt. Die eine Hälfte erhält die Karten mit den Aufgaben, die andere diejenigen mit den Ergebnissen. Ein Schüler liest die Aufgabe, der Schüler mit dem entsprechenden Ergebnis meldet sich, die Klasse kontrolliert. Nachher werden die Karten vertauscht. Es können nun zunächst die Produkte gelesen und nachher die ihnen entsprechenden Faktorenpaare gesucht werden.

7×24	168

4. Übung durch Ausfüllung von Tabellen, in denen die gegebenen Zahlen als Glieder eines bestimmten Zusammenhangs in Betracht gezogen werden.

I. Beispiel.

Aufgabe: Es wird eine Straße gebaut, von der bereits $\frac{1}{3}$ der ganzen Länge, nämlich 450 m, geteert ist. Wie lang ist das ungeteerte Stück? Wie lang wird die Straße? Die in der Tabelle enthaltenen Aufgaben sind alle vom gleichen Typus.

Geteert	m 450		m 780		m 240		m 1800		m 2400		m 4200	
$\frac{1}{3}$	900	1350	1560	2340	480	720	3600	5400	4800	7200	8400	12600
$\frac{3}{4}$												
$\frac{2}{5}$												
$\frac{3}{10}$												
$\frac{5}{6}$												
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

a = ungeteert, b = Länge der Straße

II. Beispiel.

Posten	Einkauf	Unkosten 3%	Selbstkosten	Gewinn 10%	Verkauf
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
I	800	24	824.00	82.40	906.40
II	2000	60	2060.00	206.00	2266.00
III	360	10.80	370.80	37.08	407.88
IV	1200	36	1236.00	123.60	1359.60
I — IV	4360	130.80	4490.80	449.08	4939.88

Kontrollrechnung. S. Maennchen: Mathematik, S. 51. (Die Kontrollrechnung n. schriftl. Verfahren.)

5. Übung in Verbindung mit bereits behandelten Stoffgebieten unter Hinweis auf den inneren Zusammenhang, die innere, auf der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe beruhende Gesetzmäßigkeit im Aufbau des Zahlsystems.

Übungsstoff: Die zusammengesetzten Reihen, Multiplikator 1—10, Multiplikand das 11-, 12-, 15-, 24- oder 25fache dekadischer Einheiten.

Übungsziel: Gewinnung einer lebendigen, auf der Einsicht in den dekadischen Aufbau des Zahlsystems beruhenden Fertigkeit im Lösen dieser Aufgaben. Das Zahlsystem gestattet die Reduktion der zusammengesetzten Aufgaben auf einfache Grundbeziehungen. Genau so wie das Zählen, das Zuzählen und Wegzählen der Einer auf die höheren Einheiten übertragen werden kann, darf auch die beim kleinen Einmaleins vorliegende nichtdezimale Gruppierung auf die Zehner, Hunderter usw. angewandt werden. Die Einsicht in diesen „Parallelismus" muß in diesen Übungen zur Geltung kommen. (Siehe Müller, Wege zur Zahl II. Teil, S. 49.)

Beispiel:

Einfache Reihen

Einer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zehner . . .	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Hunderter . .	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Einer	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Zehner . . .	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Hunderter . .	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000

Zusammengesetzte Reihe

Z+E	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
H+Z	120	240	360	480	600	720	840	960	1080	1200
T+H	1200	2400	3600	4800	6000	7200	8400	9600	10800	12000

Zusammenhang: Aufgabe: $7 \times 12000 = ?$

$7 \times 12000 = 7\,(12 \times 1000) = 7 \times 12\,T = 7\,(10\,T + 2\,T) = (7 \times 10\,T) + (7 \times 2\,T) =$
$70\,T + 14\,T = 84\,T \;\; = \underline{84000}.$

6. Übung in Verbindung mit einem Sachgebiet.

Das Sachgebiet muß planmäßig gewählt werden, d. h. die sachlichen Grundlagen und das bezügliche Zahlenmaterial müssen eine rechnerische Auswertung gestatten, die zur Verwirklichung des gestellten Übungszieles beiträgt. Wenn beispielsweise das Umrechnen gegebener Prozentsätze in Sortenwerte geübt werden soll, muß ein Stoffgebiet gesucht werden, dessen rechnerische Erfassung diese spezifische Aufgabe zur Geltung bringt. Wertvollen Übungsstoff bietet in diesem Falle das Thema „Rabatt im Ausverkauf". Nachdem wir in kurzen Zügen die sachlichen Zusammenhänge, vor allem Notwendigkeit, Bedeutung und Durchführung des Ausverkaufs, erörtert haben, prüfen wir genauer die in den Ausverkaufsplakaten enthaltenen Angebote und wählen hierauf ein solches als Grundlage für die Berechnungen.

Ausverkauf

Schuhwarenhaus Werder, Zürich 1.

10% Rabatt auf alle Waren 10% Rabatt

Kinderschuhe Fr.	Damenschuhe Fr.	Herrenschuhe Fr.	Sportschuhe Fr.	Berg- u. Skischuhe Fr.
4.50	6.50	12.50	18.—	28.50
6.—	8.50	15.—	22.50	30.—
7.50	10.50	19.50	25.—	32.50
9.50	12.50	22.—	27.50	34.—
11.50	15.—	25.50	30.—	40.—

Die Klasse wird in zwei Gruppen aufgeteilt. Die erste Gruppe kauft ein, stellt also die Aufgaben und kontrolliert den auf der Kassaquittung berechneten Verkaufspreis, die zweite Gruppe stellt die Quittungen aus. Nachher sind die Schüler der ersten Gruppe die Verkäufer, die Schüler der zweiten Gruppe besorgen die Einkäufe.

Das folgende Beispiel ist ganz anderer Art. Die Vielgestaltigkeit der sachlichen und rechnerischen Beziehungen führt zu einer großen Fülle verschiedenartiger Aufgaben. Solche Sachgebiete eignen sich darum vor allem für die zusammenhängende Wiederholung der in systematischer Übung bereits bis zur Sicherheit und Geläufigkeit gesteigerten Tätigkeiten. In solchen Wiederholungen erscheinen die bereits geübten Verfahren als Glieder eines Zusammenhanges, der durch das einheitliche Sachgebiet geschaffen wird. Sie sind ein vorzügliches Mittel, um das erworbene Können lebendig zu erhalten.

Säntis-Schwebebahn.

Talstation Schwägalp 1361 m ü. M., Säntis 2483 m ü. M. Fahrzeit 10 Minuten. Die Kabine faßt 35 Personen. Seillänge 2170 m.

Fahrplan.

Gleichzeitige Abfahrten ab Schwägalp und Säntis:

f6^{00} u7^{15} u8^{15} 8^{45} 9^{30} f9^{45} 10^{15} 11^{15} 12^{00} 12^{45} 13^{30} 14^{00} 14^{30} 15^{15} 15^{45} 16^{40} 17^{15} 18^{00} 18^{45} u19^{30} u20^{15} y21^{15}

f Sonntags im Juli und August. u Vom 1. VI.—31. VIII. y Nach Bedarf an Samstagen im Juli und August.

Fahrpreise.

Bergfahrt Fr. 6.—, Talfahrt Fr. 4.—, Hin- und Rückfahrt Fr. 10.—. Kinder von 4—12 Jahren die Hälfte, ebenso Militär. Schüler, die in Begleit des Lehrers reisen, zahlen bei Gruppen von mindestens 10 Personen ebenfalls die halbe Taxe, und zwar ohne Altersunterschied. Handgepäck bis 10 Kilo taxfrei. Höhere Gewichte nach Güter- und Gepäcktarif.

Abonnements.

Familienabonnements zu 5 Fahrten Säntis und zurück Fr. 40.—.
Jahresabonnements (persönliche) für 12 einfache Fahrten Schwägalp—Säntis oder umgekehrt Fr. 36.—.

Gesellschaftsbillette.

	Bergfahrt	Talfahrt	Hin und zurück
10— 50 Teilnehmer	5.—	3.—	8.—
51—100 „	4.50	2.50	7.—
101 u. mehr „	4.—	2.—	6.—

Einige Aufgaben: Gesamtsteigung in m, Stundengeschwindigkeit der Säntis-Schwebebahn.

Berechnung der Ermäßigung in %: a) Abonnements, b) Gesellschaftsbillette.

Ein Verein, der 70 Mitglieder zählt, fährt von Schwägalp auf den Säntis. Wieviel kostet das Gesellschaftsbillett?

Berechnung der Tageseinnahmen der Säntisbahn aus dem Personenverkehr:

Beförderte Personen Berg- u. Talfahrt	Bergfahrt zu Fr.				Talfahrt zu Fr.			
	6.—	5.—	4.50	3.—	4.—	3.—	2.50	2.—
650	150	85	60	95	120	35	60	45

Hauswirtschaft, Gemeinde- und Staatshaushalt, Landwirtschaft, Gewerbe, Industrie, Handel und Verkehr liefern eine Fülle rechnerisch wertvoller Sachgebiete, deren zahlenmäßige Durchdringung von großer lebenspraktischer Bedeutung sein kann. Wir verweisen in diesem Zusammenhange auf die Ausführungen Gaudigs, der die rechnerische Bearbeitung jener Gebiete des nationalen Lebens fordert, die der Volksschüler verstehen kann. Er betont, daß ein auf die Lebenswirklichkeit bezogener Rechenunterricht nicht nur zur Vermittlung eines wertvollen Sachwissens führe, sondern daß der Geist des Schülers auf diesem Wege überdies „auf größenmäßig genaue Erfassung der Erscheinungen des Volkslebens" gerichtet werde. „... Einer phantasiemäßigen, vielleicht gar phantastischen Auffassung der Wirklichkeit begegnet nichts so sehr wie ein guter Rechenunterricht"[1].

Sachliche Grundlagen bieten auch die realistischen Fächer[2] und die Handarbeit. Kühnel fordert, daß die qualitative Behandlung der Sachfächer ergänzt werde durch die quantitative, die zu einer vertieften Auffassung der Sachverhalte beitrage. Kerschensteiner weist darauf hin, daß „das Rechnen in völliger Isoliertheit, wenn auch in der fiktiven Annahme sogenannter praktischer Aufgaben, fern von aller praktischen, von stärksten Kinderinteressen erfüllten Tätigkeit" die Schuld trage am mangelnden Interesse. Die Zahlbegriffe haben sich ursprünglich im Zusammenhang mit den in Handwerk und Handel sich vollziehenden Tätigkeiten entwickelt. „Die Schule kann daher nichts Besseres für die Entwicklung der Zahlbegriffe und des Rechnens tun, als in der Werkstätte durch ständiges Schätzen, Messen und Berechnen der Werkstücke und ihrer Teile und im Schulzimmer durch beständiges Zählen, Messen, Wägen, Kaufen und Verkaufen den Schüler in die vom ureigensten Interesse an diesen Tätigkeiten geschaffene Zwangslage zu versetzen, täglich, stündlich Zahlbegriffe zu bilden und Rechenoperationen vorzunehmen." Nach seiner Erfahrung bewirkt die Verbindung des Rechnens mit der Werktätigkeit, „daß die ganze Fülle des Interesses, welches das Kind allem Tun entgegenbringt, restlos in die rechnerische Tätigkeit überströmt"[3].

Die Forderung nach lebensnaher Gestaltung des Rechenunterrichts hat dazu geführt, daß statistische Tabellen, Kalender, Fahrpläne, Wetterberichte, Marktberichte, Preislisten, die Ergebnisse amtlicher Zählungen, die Ergebnisse eigener Messungen und Wägungen usw. als Berechnungsgrundlagen Verwendung finden. Es bekundet sich in solchen Maßnahmen ein realistischer Grundzug, der insofern gerechtfertigt ist, als dadurch die Eigengesetzlichkeit und die spezifisch formalen und materialen Bildungswerte des Faches gewahrt bleiben. Wer die Forderung nach Lebensnähe des Unterrichts zum Prinzip erhebt, wird leicht dazu verleitet, die Zahl nur noch als Mittel zum Zweck, nämlich als Werkzeug zur quantitativen Erfassung der Dinge und Erscheinungen der Wirklichkeit zu werten und dementsprechend den dem

1 Gaudig, H., Die Schule im Dienste der werdenden Persönlichkeit, Bd. II, S. 391.
2 Gremminger, O., Rechenbeispiele auf Grund des Arbeitsprinzipes im 4.—6. Schuljahr.
3 Kerschensteiner, G., Begriff der Arbeitsschule, 7. Aufl., 238/239.

Fache eigenen Bildungswerten nur noch sekundäre Bedeutung beizumessen. Wenn die wesentliche Bedeutung der Beschäftigung mit der Zahl in der praktischen Anwendung auf das Leben gesehen wird, droht die Gefahr, daß die Orientierung des Rechenunterrichts nach den Sachgebieten in den Vordergrund tritt und damit der durch Wesen und logische Entwicklung des Zahlbegriffs begründete Aufbau zum Schaden der Entwicklung des mathematischen Denkens vernachlässigt wird. Wenn Übung nur in wirklichkeitsgetreuer Einkleidung, nicht aber mit reinen Zahlen gestattet wird, entbehrt ein solcher Unterricht jener absolut notwendigen Systematik, die nicht nur für das Verständnis der Zahl-, der Operationsbegriffe und der Rechenverfahren, sondern auch für den geläufigen und sicheren Vollzug der mathematischen Betätigungen von entscheidender Bedeutung ist. Wir stimmen darum Stöcklin vorbehaltlos zu, wenn er betont: „Wo es in natürlicher ungezwungener Weise geschehen kann, soll das Aufgabenmaterial nach sachlichen Gesichtspunkten geordnet werden, doch dürfen nicht die Sachgebiete das höhere ordnende Prinzip sein, dieses ist vielmehr dem Wesen des arithmetischen Stoffes zu entnehmen"[1].

Wir anerkennen die lebenswahre Einkleidung als ein wertvolles Mittel zur Verlebendigung der Zahl- und Operationsbegriffe, die durch vielseitige Anwendung auf Sachverhältnisse geklärt und vertieft werden können, wie umgekehrt die Auffassung der Sachzusammenhänge durch die zahlenmäßige Durchdringung eine Klärung erfahren kann. Die Einkleidung ist überdies für die Belebung der Übungsarbeit wertvoll, sofern bei der Wahl des Übungsstoffes darauf geachtet wird, daß die zu übende Tätigkeit hinreichend zur Geltung kommt. Daß die Einkleidung auch lebenspraktischen Wert hat, wird niemand bezweifeln. Nicht zutreffend aber ist es, wenn behauptet wird, daß der Rechenunterricht nur dann interessebetont sei, wenn der Zögling den Nutzen der Zahl bei der Ausführung praktischer Arbeiten und bei der Erfassung der Erscheinungen des Natur- und des Geisteslebens erfahre. Wir können diesen Standpunkt nicht anerkennen, durch den, wie Wichmann treffend sagt, „die lebendige Kraft eines den menschlichen Geist beschwingenden und befruchtenden Denkinhalts und damit der gegenständliche Wert der Mathematik überhaupt in Frage gestellt erscheint"[2]! Auch im Kinde liegt schon keimhaft das Streben nach Wahrheit um der Wahrheit willen, das unter dem Einfluß einer geistig lebendigen, vom Wesen der Faches ergriffenen Lehrerpersönlichkeit zur Entwicklung kommt.

7. Übung in Verbindung mit angewandten Aufgaben.

Damit die folgenden Darlegungen verständlich werden, ist zunächst eine kurze Begriffsanalyse notwendig. Wir unterscheiden die eingekleideten von den angewandten Aufgaben. In den eingekleideten Aufgaben werden die zur Lösung führenden Zahlbeziehungen durch die gegebenen sach-

[1] Stöcklin, J., Schweizer Kopfrechenbuch und Methodik des Volksschulrechnens, II. Teil, 10.
[2] Wichmann, O., Eigengesetz und bildender Wert der Lehrfächer, S. 73.

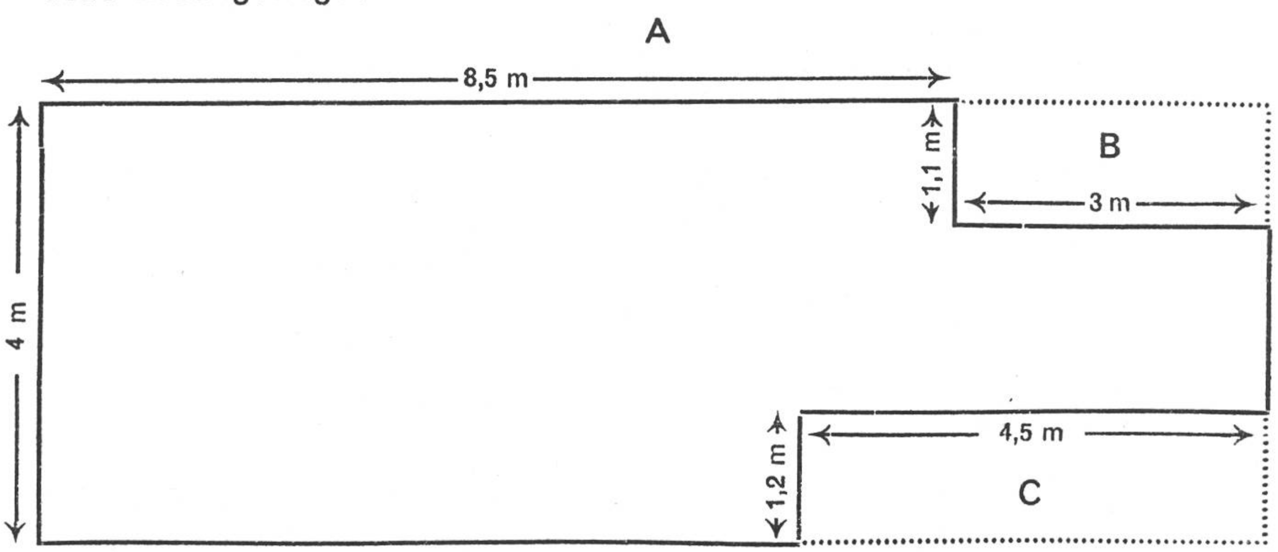
lichen Grundlagen veranschaulicht, so daß eine direkte Reduktion des gegebenen Sachverhaltes auf die Rechenvorgänge möglich wird. Sofern mehrere Operationen zur Verwirklichung des gestellten Zieles führen, bezeichnet die zeitliche Abfolge der sachlichen Vorgänge, von denen jeder eine bestimmte Zahlbeziehung veranschaulicht, die Folge der Operationen. Diese Folge wird oft sogar durch die sprachliche Formulierung der Frage angedeutet. Die angewandten Aufgaben unterscheiden sich von den eingekleideten dadurch, daß die Operationen und ihre Abfolge in den gegebenen Bestimmungsstücken nicht unmittelbar mitgegeben sind, sondern erst durch eine eindringende, unter der Wirkung des Zieles sich vollziehende Analyse des Gegebenen erschlossen werden müssen.

Die vollständige Lösung jeder angewandten Aufgabe enthält zwei Teile: 1. den auf einem bestimmten Lösungsgedanken beruhenden Lösungsweg, welcher im Ansatz das Gegebene, im Schlußsatz das Gesuchte und in den Mittelsätzen die erschlossenen, zur Verwirklichung des Gesuchten führenden Zwischenglieder aufweist, 2. die Ausrechnung. Weil in jeder vollständigen Lösung Operationen ausgeführt werden, hat auch die angewandte Aufgabe einen gewissen Übungswert. Von einer Übung durch Anwendung, d. h. in Verbindung mit der Lösung angewandter Aufgaben, kann indessen erst dann gesprochen werden, wenn in der Ausrechnung dieselben Rechentätigkeiten wiederholt zur Geltung kommen. In diesem Falle erfolgt durch die Inanspruchnahme des Denkens beim Suchen nach dem Lösungsweg eine Belebung der Übungsarbeit. Das folgende Beispiel soll zeigen, wie diese Form der Übung gedacht ist.

Übungsziel: Vervielfachen von Dezimalbrüchen.

Übungsstoff: Flächenberechnung[1].

Aufgabe: Der Inhalt der nachstehenden Figur, die ein Grundstück darstellt, soll auf Grund der angegebenen Maße berechnet werden. Verschiedene Lösungswege!



[1] Vgl. K. Falk, G. Rohrauer u. K. Wais, Arbeitsbuch für den Unterricht aus Rechnen und Raumlehre an Hauptschulen, 1. Kl. S. 103.

I. Lösungsweg: Die Figur wird zu einem Rechteck ergänzt. Von diesem mit A bezeichneten Rechteck werden die Rechtecke B und C weggezählt.

1. Berechnung des Rechteckes A:

   Länge $8{,}5\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{m} = 11{,}5\ \mathrm{m}$
   Breite $4\ \mathrm{m}$
   Inhalt $4 \times 11{,}5\ \mathrm{m}^2 = 46\ \mathrm{m}^2$

2. Berechnung des Rechteckes B:

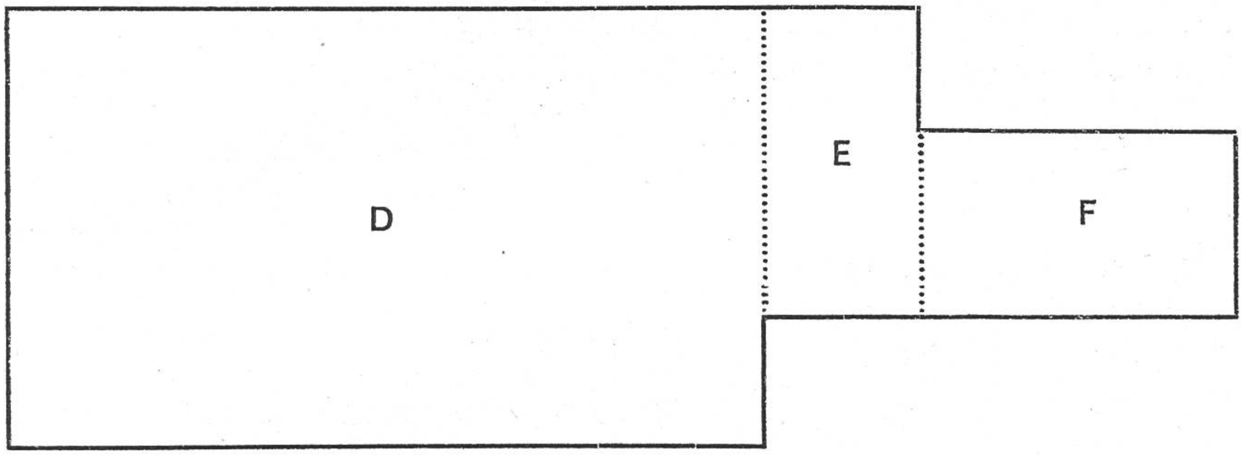
   Länge $3\ \mathrm{m}$
   Breite $1{,}1\ \mathrm{m}$
   Inhalt $3 \times 1{,}1\ \mathrm{m}^2 = 3{,}3\ \mathrm{m}^2$

3. Berechnung des Rechteckes C:

   Länge $4{,}5\ \mathrm{m}$
   Breite $1{,}2\ \mathrm{m}$
   Inhalt $1{,}2 \times 4{,}5\ \mathrm{m}^2 = 5{,}4\ \mathrm{m}^2$

4. Inhalt der gegebenen Figur:

   $46\ \mathrm{m}^2 - (3{,}3\ \mathrm{m}^2 + 5{,}4\ \mathrm{m}^2) = 46\ \mathrm{m}^2 - 8{,}7\ \mathrm{m}^2 = \underline{37{,}3\ \mathrm{m}^2}$

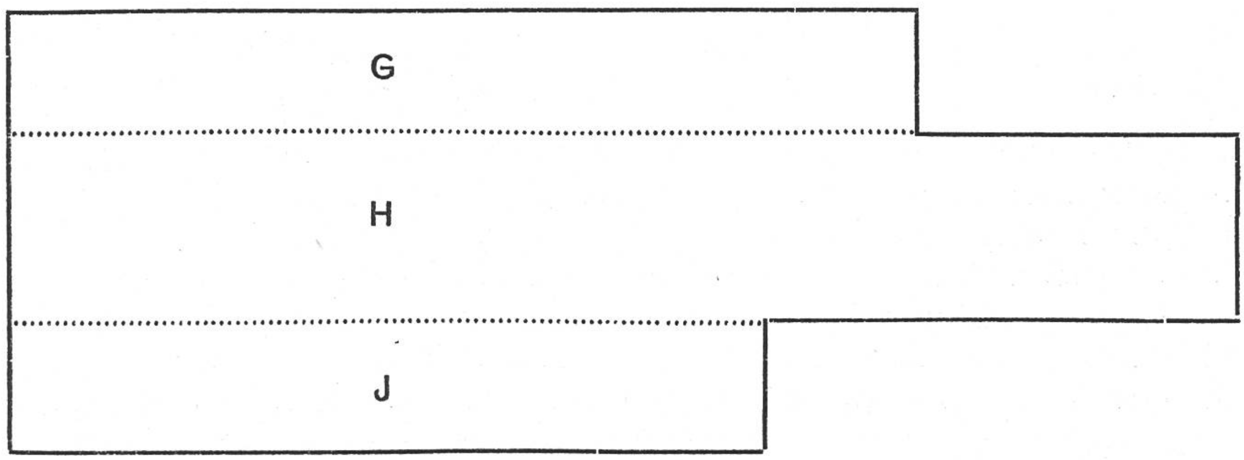


II. Lösungsweg:

$$\begin{aligned} D &= 4 \times 7\ \mathrm{m}^2 &&= 28\ \mathrm{m}^2 \\ E &= 1{,}5 \times 2{,}8\ \mathrm{m}^2 &&= 4{,}2\ \mathrm{m}^2 \\ F &= 3 \times 1{,}7\ \mathrm{m}^2 &&= 5{,}1\ \mathrm{m}^2 \\ \hline D+E+F & &&= 37{,}3\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

III. Lösungsweg:

$$\begin{aligned} G &= 1{,}1 \times 8{,}5\ \mathrm{m}^2 &&= 9{,}35\ \mathrm{m}^2 \\ H &= 1{,}7 \times 11{,}5\ \mathrm{m}^2 &&= 19{,}55\ \mathrm{m}^2 \\ J &= 7 \times 1{,}2\ \mathrm{m}^2 &&= 8{,}4\ \mathrm{m}^2 \\ \hline G+H+J & &&= 37{,}3\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$



8. Übung mit Variation der Ausrechnung.

Auch in der Übungsarbeit können formallogische Bildungswerte zur Geltung kommen. Wir sind wohl überzeugt von der Notwendigkeit, erarbeitete Normalverfahren bis zur Sicherheit und Geläufigkeit einüben zu müssen, betonen aber anderseits im Interesse einer Entwicklung des elementaren mathematischen Denkens, daß das Verständnis für die vielgestaltigen Zahlbeziehungen auch durch die Übung gefördert werden sollte. Die Beweglichkeit des Könnens ist neben der Sicherheit und der Geläufigkeit ein erstrebenswertes Ziel der Übung. Unter Beweglichkeit verstehen wir die Fähigkeit, auf Grund der Einsicht in die Zahlbeziehungen verschiedene Lösungswege gehen zu können. Indem im Unterricht auf die Variationsmöglichkeiten der Rechenverfahren hingewiesen wird und die Varianten eine Begründung erfahren, erfolgt eine geistige Belebung der Übung, für die vor allem die theoretisch begabten Schüler dankbar sein werden. Dem Einwand, daß die durchschnittlich begabten und die schwachen Schüler doch nur das Normalverfahren anwendeten und beim Beschreiten anderer Wege langsamer und unsicher rechneten, so daß sich der vermeintliche Vorteil als ein Nachteil erweise, begegnen wir mit dem Hinweis, daß auch bei diesen Schülern durch die Variation der Verfahren eine Vertiefung der Einsicht in die Zahlbeziehungen erreicht werden kann. Wir betonen überdies, daß die Schule nicht nur das Recht, sondern auch die Pflicht hat, die begabten Schüler ihren Fähigkeiten entsprechend zu fördern.

Wir rechnen zunächst nach dem Normalverfahren und stellen hierauf die Frage: Wie könnten wir diese Aufgabe auch noch lösen? Z. B.:

$$\underline{7 \times 375 = ?}$$

I. $7 \times 375 = 7 \times (300+70+5) = (7 \times 300) + (7 \times 70) + (7 \times 5) \underline{= 2625}$

II. $7 \times 375 = 7 \times (400-25) = (7 \times 400) - (7 \times 25) \underline{= 2625}$

III. $7 \times 375 = 7 \times (15 \times 25) = (7 \times 15) \times 25 = 105 \times 25 \underline{= 2625}$

IV. $7 \times 375 = (3 \times 750) + 375 = (1 \times 1500) + 375 + 750 \underline{= 2625}$

V. $7 \times 375 = 7 \times (3 \times 125) = 21 \times 125 = (21 \times 1000) : 8 \underline{= 2625}$

9. Übung mit Bezugnahme auf die Grundlagen, auf denen das Normalverfahren beruht.

Ziel der Übung ist ein lebendiges, d. h. ein anwendungsfähiges und aufbauend wirkendes Können. Damit dieses Ziel verwirklicht wird, ist es nötig, daß immer wieder auf die Grundlagen hingewiesen wird, auf denen das Verfahren beruht. Die logische Berechtigung des zu übenden Normalverfahrens, das ja Endglied einer Entwicklungsreihe ist und in der kurzen, abstrakten Form nicht mehr alle Schritte aufweist, die bei der Erarbeitung zur Geltung kamen, muß wiederum erwiesen werden. Der Schüler merkt sich beim wiederholten Vollzug eines Verfahrens gewisse Ausführungsbestimmungen in der Form von Regeln, die die Mechanisierung begünstigen, so daß die Frage nach Sinn und Berechtigung des Verfahrens ganz zurücktritt. Es ist deshalb notwendig, daß wir mitten in der Übung den Schüler zur Besinnung auf die Grundlagen zwingen, indem wir die Frage stellen: Warum dürfen wir so rechnen? Die folgenden Beispiele sollen die Durchführung dieser Forderung beleuchten:

I. Wir üben das Vervielfachen, wobei der Multiplikator eine Grundzahl, der Multiplikand eine mit Zehnern und Einern gemischte Hunderterzahl ist, z. B. 6×768. Die Schüler rechnen nach dem Normalverfahren: $6 \times 768 = 6 \times (700+60+8) = (6 \times 700) + (6 \times 60) + (6 \times 8)$. Nun stellen wir die Frage: Was heißt eigentlich 6×768, und warum dürfen wir so rechnen? Der Schüler wird dadurch gezwungen, sich wieder einmal auf die Bedeutung des Multiplikationsbegriffs und auf den Aufbau der Zahlen zu besinnen. Durch die folgende Darstellung wird die Frage beantwortet:

$$768 = 700+60+8$$

$$\begin{aligned} 6 \times 768 &= 768+768+768+768+768+768 \\ &= 700+700+700+700+700+700 \\ &\quad + 60+60+60+60+60+60 \\ &\quad + 8+8+8+8+8+8 \\ &= (6 \times 700) + (6 \times 60) + (6 \times 8) = \underline{4608.} \end{aligned}$$

II. Wir stehen bei der Behandlung des Bruchrechnens und lösen Aufgaben von der folgenden Art: 3 : 7, 5 : 8, 11 : 12, 17 : 3, 27 : 8. Der Schüler beobachtet schon nach der Lösung der ersten Beispiele, daß der Dividend im Ergebnis als Zähler, der Divisor als Nenner auftritt und beachtet deshalb nur noch das „Wie“, nicht mehr das „Warum“ des Lösungsverfahrens. Die Besinnung auf die Berechtigung dieses Verfahrens führt zur folgenden Darlegung:

$$\underline{3 : 4 = ?}$$

$3 = 1+1+1$ — Jede 1 bedeutet ein Ganzes, beispielsweise eine Kreisfläche, alle drei Scheiben sind gleich groß.

$$\begin{aligned} 3 : 4 &= (1+1+1) : 4 \\ &= (1 : 4) + (1 : 4) + (1 : 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 3 \times \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Wir teilen jede Kreisfläche in vier gleichgroße Teile und nehmen je einen solchen Teil.

Oder:

$$\begin{aligned} 3 : 4 &= (3 \times 1) : 4 = 3 \times (1 : 4) \\ &= 3 \times \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Wir legen die drei Scheiben aufeinander, teilen die oberste in vier Teile und schneiden nun die drei Viertel auf einmal aus.

10. Übung in der Form des Rechenspiels.

Es mag befremdend, ja direkt paradox erscheinen, wenn nachfolgend auf die Möglichkeit hingewiesen wird, die Übung durch Rechenspiele zu beleben, nachdem doch früher wiederholt wurde, daß sie ernste, zielbewußte Arbeit sein soll. Wir begegnen diesem möglichen Vorwurf mit dem Hinweis, daß trotz der Einkleidung in die Form des Spiels die unterrichtliche Behandlung so erfolgen kann, daß der Geist der Arbeit im Lösen wertvoller Übungsaufgaben zur Geltung kommt. Zudem muß betont werden, daß bei der Wahl des Rechenspiels darauf geachtet wird, daß es sich als zweckmäßiges Glied in den unterrichtlichen Zusammenhang einfügt. Vergessen wir ferner nicht, daß das Rechenspiel nur eine der vielen Möglichkeiten darstellt, die bei der Verwirklichung der Forderung nach Variation der Übungsform ausgenützt werden kann. Gerlach, der in seinem Buche „Schöne Rechenstunden"[1] zeigt, wie solche Rechenspiele gewinnbringend behandelt werden können, schreibt: „Auf die meisten übt sichtbar schon die Regelmäßigkeit des Zahlaufbaues den Reiz des Geheimnisvollen aus. Für die Wenigen aber, die noch unempfänglich dafür sind, gilt es doch immerhin, nachzuprüfen, ob das stimmt, was sie selber oder ihre Mitschüler erdacht, errechnet haben. Und das interessiert."

Ein Beispiel: Wir stehen bei der Einübung der 24er-Reihe. Wir schreiben nach Diktat der Schüler die Produkte der Reihe auf. Darunter zeichnen wir ein Quadrat, das in neun Felder eingeteilt wird. Nun fordern wir die Schüler auf, die Produkte so in die Felder einzusetzen, daß die Produktensummen in jeder der drei Waagrechten, der drei Senkrechten und der beiden Diagonalen gleich groß sind.

I. Wir betrachten zuerst die gesetzmäßig gebaute Produktenreihe.

24	48	72	96	120	144	168	192	216
1 ×	2 ×	3 ×	4 ×	5 ×	6 ×	7 ×	8 ×	9 × 24

Wir beachten nun die Bestimmung, daß jede der aus drei dieser Zahlen bestehenden Gruppen gleich groß sein soll. Wir berechnen die Größe der Gruppe, indem wir zunächst den Anzahlwert der ganzen Reihe bestimmen und diesen durch 3 teilen.

$$24+48+72+96+120+144+168+192+216$$
$$=4\times(24+216)+120=(4\times240)+120=960+120=\underline{1080}$$

Oder: $4\times[(1\times24)+(9\times24)]+(5\times24) = \underline{15\times24}$

$1080 : 3 = \underline{360}$ $\quad$ $(45\times24) : 3 = \underline{15\times24.}$

Der Anzahlwert jeder Teilreihe beträgt $360 = 15\times24$.

II. Nun handelt es sich darum, die Zahlen so in die Felder des Quadrates einzuordnen, daß die Summe der drei waagrechten, der drei senkrechten und der beiden schrägen Reihen je 360 oder 15×24 ergibt.

[1] Gerlach, A., Schöne Rechenstunden, S. 96ff., I. Bd.

Wir suchen aus der Reihe Gruppen zu je drei Zahlen heraus, die diese Bestimmung erfüllen. Wir erhalten so folgende Tabelle:

$$\begin{aligned}
24+120+216 &= 1\times 24+5\times 24+9\times 24 = 15\times 24\\
48+120+192 &= 2\times 24+5\times 24+8\times 24 = 15\times 24\\
72+120+168 &= 3\times 24+5\times 24+7\times 24 = 15\times 24\\
96+120+144 &= 4\times 24+5\times 24+6\times 24 = 15\times 24\\
48+\ 96+216 &= 2\times 24+4\times 24+9\times 24 = 15\times 24\\
72+\ 96+192 &= 3\times 24+4\times 24+8\times 24 = 15\times 24\\
24+144+192 &= 1\times 24+6\times 24+8\times 24 = 15\times 24\\
48+144+168 &= 2\times 24+6\times 24+7\times 24 = 15\times 24
\end{aligned}$$

Wir betrachten diese Tabelle und stellen fest, wie oft die einzelnen Zahlen vorkommen, nämlich:

24	48	72	96	120	144	168	192	216
2×	3×	2×	3×	4×	3×	2×	3×	2×

Die untere Reihe, deren Glieder angeben, wie oft die Produkte der 24er-Reihe in den Gruppen vertreten sind, ist symmetrisch gebaut.

Das in neun Einzelfelder aufgegliederte Quadrat zeigt, daß die Zahl im Mittelfeld als Glied jener vier Zahlengruppen in Betracht kommt, welche in den Mittellinien und in den Diagonalen liegen. Da nach der obigen Zusammenstellung einzig 120 diese Bedingung erfüllt, muß diese Zahl in das Mittelfeld gesetzt werden. Wir sehen weiter, daß jede Zahl in den Eckfeldern als Summand in drei Gruppen zur Geltung kommt. Diese Bedingung erfüllen einzig die Zahlen 48, 96, 144, 192. Jeder der äußeren Zahlen auf der Mittellinie ist Glied von zwei Gruppen. Für diese Felder kommen somit die Zahlen 24, 72, 168, 216 in Betracht. Damit sind die Richtlinien für die Anordnung der Zahlen festgelegt. Wir setzen nun 120 in das Mittelfeld, in die linke obere Ecke irgend eine Zahl, die in drei Gruppen vorkommt, also beispielsweise 48. Wir zählen hierauf 48 und 120 zusammen und ergänzen das Ergebnis zu 360. $48+120 = 168$. $168+192 = 360$. In die rechte untere Ecke kommt also die Zahl 192. Wir setzen nun in die rechte obere Ecke eine andere Zahl, die in drei Gruppen vorkommt, beispielsweise 144. Durch das Ergänzen zu 360 können wir hierauf bestimmen, in welche Felder die noch übrigen Zahlen gesetzt werden müssen. Die folgenden Darstellungen zeigen den Lösungsweg:

48		
	120	
		192

a

48		144
	120	
		192

b

48	168	144
216	120	24
96	72	192

c

Die Kontrolle gibt Gelegenheit, die Produkte der 24er-Reihe in die Faktorenpaare zu zerlegen, wenn wir sie in der folgenden Form vornehmen:

Gruppe	48	120	192	_____	$(2\times 24)+(5\times 24)+(8\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	48	168	144	_____	$(2\times 24)+(7\times 24)+(6\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	48	216	96	_____	$(2\times 24)+(9\times 24)+(4\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	96	120	144	_____	$(4\times 24)+(5\times 24)+(6\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	96	72	192	_____	$(4\times 24)+(3\times 24)+(8\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	144	24	192	_____	$(6\times 24)+(1\times 24)+(8\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	168	120	72	_____	$(7\times 24)+(5\times 24)+(3\times 24)=15\times 24=360$
Gruppe	216	120	24	_____	$(9\times 24)+(5\times 24)+(1\times 24)=15\times 24=360$

Wir können nun im Anschluß an diese erste Lösung auch noch andere Möglichkeiten suchen, indem wir z. B. in die linke obere Ecke statt 48 die Zahlen 96, 144 oder 192 setzen. Es ist für die Schüler eine recht hübsche Aufgabe festzustellen, wie viele Variationen möglich sind. Interessant ist dann auch der Vergleich der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten. Er zeigt, daß die aus der ersten Lösung ablesbaren Gruppen beisammen bleiben und somit nur eine Umstellung der Gruppen erfolgt.

Das magische Quadrat bietet sehr viel Übungsstoff, weil auch andere Reihen verwendet werden können. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die folgenden Werke, die eine Fülle von Anregungen dieser Art vermitteln: Mathematische Mußestunden von Dr. H. Schubert, neubearbeitet von Prof. Dr. Fitting, Walter de Gruyters Verlag, und Mathematische Spiele von Ahrens, Aus Natur und Geisteswelt.

11. Übung mit Bildung der Aufgaben durch die Schüler.

Im Rechenunterricht wird der Leistungsanspruch an den Schüler vorwiegend in der Form der Aufgabe gestellt. Es ist darum kein Zufall, daß die Rechenlehrmittel fast ausschließlich Aufgabensammlungen sind. Die neuere Didaktik fordert aber nicht mehr bloß die Lösung fertig und eindeutig formulierter Aufgaben, sondern verlangt das Selbstbilden der Aufgaben durch die Schüler. Vor allem die Vertreter der Arbeitsschulidee betonen mit allem Nachdruck die Bedeutung der „selbsttätigen Aufgabenbildung“, „der eigentätigen Problemstellung“[1]. Diese Ausdrücke zeigen deutlich, daß es sich bei dieser Forderung nicht nur um eine Aufgabenstellung durch den Schüler handelt, wobei dieser die Rolle des Lehrers spielt, indem er einfach Aufgaben nach einem bereits bekannten Vorbild wiederholt. Der Schüler soll vielmehr im Interesse einer gesteigerten Selbsttätigkeit und inneren Anteilnahme die Aufgaben selbst bilden, nicht nur nachbilden. So wird beispielsweise in der Schule Gaudigs dem gebundenen Unterricht der von den Prinzipien der Freitätigkeit und der Arbeit getragene Unterricht gegenübergestellt und gefordert: „Aus dem Selbst soll die bildende Tätigkeit in schöner Freiwilligkeit herausbrechen, getragen von dem Selbst soll sie in dem Selbst und durch das Selbst

[1] Kühnel, J., Neubau des Rechenunterrichts, II. Teil, S. 73ff.

geschehen — ohne Eingreifen voreiliger, unnötiger, aufdringlicher Hilfe." So schreibt Scheibner und betont dementsprechend als Kennzeichen der freien Unterrichtshaltung das „freie Unterrichtsgespräch, Wahlfreiheit für Lernstoffe und Betätigungsweisen, freie Bemerkung, freier Fragenaufwurf, freie Kinderzeichnung, freie Geste, freier Aufsatz, freie Aufgabenbildung u.s.f."[1].

Die starke Betonung der Selbsttätigkeit im Sinne der freien geistigen Schularbeit wird verständlich, wenn man die Auffassung des geistigen Lebens berücksichtigt, die dieser didaktischen Grundhaltung als Stützpunkt dient. So ist für Gaudig das Bildungsideal die freie, in sozialer Gebundenheit wirkende Persönlichkeit, „der seiner selbst mächtige, die Kräfte seiner Natur zur Verwirklichung des Ideals seiner Individualität zusammenfassende, auf den Gebieten des Lebens sich frei aus sich heraus bestimmende Mensch". Diese Persönlichkeitsidee soll wegleitend sein für die gesamte Bildungsarbeit. Die Schule hat dafür zu sorgen, daß das gegebene Selbst, die Individualität in ihrer Eigenwesenheit, durch die freie Auswirkung der ihr innewohnenden Kräfte sich zur Persönlichkeit entwickelt. Selbsttätigkeit wird darum zum „Grundprinzip" erhoben. Bei echter Selbsttätigkeit, die der Natur der Seele entspricht, liegt der Ursprung der Tätigkeit im Selbst, das in seiner Totalität zur Auswirkung kommen soll. Neben der Betätigung der Denkkräfte wird vor allem das Wirken der Gefühls- und der Willenskräfte betont. Selbsttätigkeit als ein vom Willen geleitetes und von Gefühlen getragenes und belebtes denkendes Wirken wird zum Formalprinzip erhoben, das den geistigen Erwerb beherrscht. Im Vollzug dieser Selbsttätigkeit ist die Beziehung auf ein Material gegeben, das gestaltet wird. Das formale Prinzip bedarf deshalb der Ergänzung durch ein materiales, das bestimmt, an welchen Bildungsinhalten sich der Geist betätigen soll. Bevorzugt werden die dem Zögling unmittelbar zugänglichen Stoffe, mit denen ihn Wertgefühle verbinden, und die er aus eigenem Antrieb zu ergreifen und in willenhaft geleiteter Selbsttätigkeit zu geistigem Gehalt zu formen vermag. Das materielle Prinzip wird somit als Rücksichtnahme auf die Lebenswirklichkeit aufgefaßt, in die der Zögling eingefügt ist und in der er sich dereinst als selbständige Persönlichkeit zu bewähren hat[2].

Diese von Gaudig begründete und von Scheibner weiter entwickelte Auffassung betont somit die Beziehung des Lernens zum Selbst und zum Leben und wertet darum vor allem jene Leistung als bildend, welche aus freiem Antrieb erfolgt und mit eigener Kraft auf selbstgewähltem Wege zur Verwirklichung eines selbst gesetzten Zieles führt. Gaudig weiß aber, daß der Zögling auf dem Wege reiner Selbstbestimmung die geforderte Selbständigkeit nicht zu erreichen vermag. Darum fordert er wohl, daß der Lehrer die eigene „Inaktivierung" erstrebe, betont aber anderseits, daß die Verwirklichung dieses Zieles nur dadurch möglich werde, daß der Lehrer den Zögling planmäßig auf stoffeigene Arbeitsweisen, auf die geistige Arbeits-

1 Scheibner, O., a.O. S. 4.
2 Gaudig, H., Didaktische Präludien, S. 33ff.

technik einschule. Die Grenzen des Prinzips der freien geistigen Schularbeit werden von den Anhängern Gaudigs mit dem Hinweis betont, daß eine besonnene Führung notwendig sei, weil die „natürliche Selbstentwicklung“ nicht ohne Hilfe zur „lebenstüchtigen Persönlichkeit“ führe (Scheibner). Diese Einschränkungen zeigen aber, daß Selbsttätigkeit in dem von Gaudig bestimmten Sinne für die Gestaltung der Bildungsarbeit nicht ausreicht.

Die gekennzeichnete Grundhaltung führte zur Forderung, daß der Schüler im Rechenunterricht zum Selbstbilden der Aufgaben erzogen werden solle, denn: „Wird die Rechenaufgabe vom Lehrer oder vom Rechenbuch geformt, also das Endziel dem Schüler fertig gegeben, so sind die Zahlen der Aufgabe dem Kind nicht genügend mit Inhalt gefüllt, sie sind ihm dann häufig irgendwelche gleichgültige Benennungen, nicht aber Sinnbilder für Werte, Größen und Größenverhältnisse. Aus einem solchen Rechenunterricht nimmt der Schüler schwerlich die Anregung mit, im Leben der Zahl nachzuspüren, Dinge und Erscheinungen der Umwelt auch zahlenmäßig zu erfassen“[1]. Wir erkennen in diesen Sätzen die oben aufgezeigte Grundwertung, die hier auf den Rechenunterricht angewandt wird: Die Bereitschaft und Fähigkeit zur selbständigen zahlenmäßigen Durchdringung der Dinge und der Erscheinungen der Umwelt wird betont. Die Zahl kommt vor allem zur Geltung als Werkzeug zur einsichtigen Erfassung der Wirklichkeit. Bei der Behandlung des Stoffes muß auf einen möglichst selbsttätigen Erwerb geachtet werden, der durch den Willen bewegt und durch die Gefühle belebt wird. Diese emotionalen Faktoren kommen vor allem dann zur Wirkung, wenn bei der Auswahl und der Behandlung des Stoffes die Beziehung zum Erleben des Schülers berücksichtigt wird. Das ist dann der Fall, wenn der Rechenunterricht an die im Erlebniskreis des Kindes liegenden Sachverhältnisse anknüpft und den Schüler dazu anregt, dort selbst Berechnungsgrundlagen zu suchen, die notwendig und hinreichend sind für die Verwirklichung der selbst gestellten mathematischen Ziele.

Es besteht bei dieser Wertung nicht nur die Gefahr, daß den formalen Bildungswerten des rein arithmetischen Stoffes, dieser von Gesetzen beherrschten, logisch wunderbar klar gegliederten Welt der reinen Zahlen, zu wenig Beachtung geschenkt wird. Wer Selbsttätigkeit als Prinzip wertet, wird leicht dazu verleitet, ihm uneingeschränkte Gültigkeit beizumessen. Notwendigkeit und Bedeutung einer planmäßigen Entwicklung des Stoffes durch die Darbietung und die Frage des Lehrers werden dann zu wenig gewürdigt. Dafür wird der Fragestellung des Zöglings, die sich aus der bestehenden seelisch-geistigen Beschaffenheit ergibt, maßgebliche Bedeutung zuerkannt. Damit aber wird die geistige Kraft des Schülers überschätzt, denn sie reicht niemals aus zu einer Zielsetzung, die den planmäßigen Bildungsfortschritt im Gebiet des Rechenunterrichts ermöglichen könnte. Die Anpassung des Unterrichts an die selbstbestimmende Aktivität des Schülers müßte darum auf den Bildungserfolg verhängnisvoll wirken. Es ist nicht zu-

[1] Müller, L., Ein Unterrichtsbild mit freier geistiger Arbeit im Rechnen. „Arbeitsschule“ 1925.

fällig, daß heute gerade von den Vertretern des Prinzips der Selbsttätigkeit vor Übertreibungen gewarnt wird. Ohne zielbewußte Leitung, die zur Vermittlung von Entwicklungsimpulsen führt, welche über die bestehende Beschaffenheit des geistigen Lebens der Schüler hinausweisen, werden die erstrebten Bildungsziele nicht verwirklicht. In den Einwirkungen des Lehrers treten die von ihm in umfassenderen und tiefer greifenderen Beziehungen erlebten Gehalte dem enger umgrenzten Geistesleben des Zöglings als ein Anderssein entgegen, setzen es vor Widerstände und erwecken in ihm Gegenwirkungen, die zum aktiven Aufgreifen neuer Beziehungen führen. Wir lehnen darum die Einstellung ab, die dazu führt, im Rechenunterricht nur noch die durch den Schüler gestellten Aufgaben gelten zu lassen, betonen aber neben dem Lösen gegebener Aufgaben auch die Aufgabenbildung durch den Schüler, soweit sie der Bildungsaufgabe des Faches zu dienen vermag. Auf die fertig geformte Aufgabe können wir nicht verzichten, weil ohne sie ein planmäßig aufbauender Unterricht gar nicht möglich wäre. Ob ein Selbstbilden solcher Aufgaben durch den Schüler möglich ist und welche Formen der Aufgabenstellung didaktisch gerechtfertigt sind, soll nachfolgend geprüft werden. Wir stützen uns dabei auf die gründliche Untersuchung dieses Problems, die A. Müller in seiner Arbeit „Wege zur Zahl"[1] II. Teil, gibt.

Müller bestimmt zunächst das Wesen der Aufgabe im eigentlichen Sinne. Jede Aufgabe besteht aus dem Gegebenen und dem Aufgegebenen. Sie fordert den Empfänger auf, von den bekannten Bestimmungsstücken aus eine aufgegebene, also neue Erkenntnis zu gewinnen. „Die geforderte Neuleistung gehört zum Wesen der Aufgabe." Sie ist dann vollziehbar, wenn die gegebenen Bestimmungsstücke hinreichend sind. Von der im Schulunterricht gestellten Aufgabe fordert man überdies, daß sie nur die notwendigen Angaben enthält. Diese Zusammenhänge zeigen, wie vermessen die an den Schüler gestellte Forderung nach selbsttätiger Aufgabenbildung ist. Kennt nämlich der Schüler die Lösung der Aufgabe schon, dann fehlt ihr der spezifische Aufgabencharakter, weil sie ihn nicht mehr vor eine neue Situation stellt. Weiß er aber die Lösung beim Bilden der Aufgabe selbst noch nicht, dann kann er auch nicht darüber entscheiden, ob die gegebenen Bestimmungsstücke notwendig und hinreichend sind. Daraus folgt, daß der Schüler nicht ohne weiteres zum Selbstbilden von Aufgaben fähig ist, welche vom Aufgabensteller selbst den Vollzug einer Neuleistung fordern, „die dem planmäßigen Bildungsfortschritt dient". Es zeigt sich auch hier wieder, daß die reine Selbsthilfe des Schülers beim Eindringen in die Welt des Geistes nicht ausreicht, und es ist gut, wenn sich der Lehrer der Hilfsbedürftigkeit und damit der Grenzen und Möglichkeiten der kindlichen Leistungsfähigkeit bewußt bleibt. Der Prozeß des Erarbeitens im didaktischen Sinne erweist sich als ein Zusammenwirken im Hinblick auf nähere und fernere Ziele, die vom Lehrer unter Mitarbeit des Schülers gestellt werden. Diese durch den Lehrer erweckte und geleitete Mitarbeit bei der Bildung von

[1] Müller, A., Wege zur Zahl, II. Teil, S. 7ff.

Aufgaben kann nach und nach gesteigert werden, so daß sie „immer bewußter, planmäßiger und selbständiger wird". Müller erwähnt als Formen, in denen die Mitarbeit des Schülers bei der Aufgabenbildung zur Geltung kommen kann: die Wiederholung, die Nachbildung, die Weiterführung und die Fragestellung aus einer lebendig erfaßten Sachlage heraus. Es liegt in diesen Leistungen noch kein Selbstbilden von Aufgaben vor, aber sie stellen didaktisch wertvolle Mittel einer planmäßigen Erziehung zur Selbstbildung dar.

Eine Wiederholung liegt beispielsweise vor, wenn bereits bekannte Rechenvorgänge eingekleidet, d. h. „auf zusammenhängende anschauliche Vorgänge abgebildet" werden. Durch diese „Übersetzung" der erarbeiteten Begriffe ins Anschauliche wird dafür gesorgt, daß deren Bedeutung immer wieder bewußt wird. Solche Wiederholungen dienen also vor allem der „fortwährenden Klärung oder Klarhaltung der von der Anschauung abgezogenen Rechenformen und -formeln".

Beispiel: Ein Faß enthält 3 hl 70 l Öl. Das Öl wird in Kannen abgefüllt, die 5 l fassen. Wie viele Kannen können gefüllt werden?

Um Wiederholung handelt es sich auch, wenn der Schüler die Rolle des Lehrers spielt, indem er den Anfang eines bereits bekannten Rechensatzes sagt, z. B. 9×24 usw. Solche Wiederholungen dienen der Übung bereits bekannter Rechenvorgänge.

Eine Nachbildung liegt dann vor, wenn das Wesen eines bestimmten Aufgabentyps erkannt wird und der Schüler auf Grund dieser Erkenntnis gleichgebaute Aufgaben mit anderen Zahlen stellt. Es wird beispielsweise im Zahlenraum bis 10000 das Überschreiten der Tausender durch die Einer geübt und dabei werden Aufgaben von der folgenden Form gelöst: $1095+8$, $2095+8$, $3095+8$, $4095+8$, $5095+8$ usw.

Die Weiterführungsaufgaben stellen schon höhere Ansprüche, weil es sich hier darum handelt, eine begonnene Gedankenreihe zu entwickeln. Z. B.: Wir haben die Aufgabe 8×157 auf folgendem Wege gelöst: Wir denken uns eine Reihe von 8 Summanden, von denen jeder 157 ist. Nun fassen wir je 2 Summanden zusammen und erhalten auf diese Weise 4 Summanden, von denen jeder 314 ist. Die ursprüngliche Aufgabe wird auf diese Weise wie folgt umgeformt und gelöst:

$$8 \times 157 = 4 \times 314 = 2 \times 628 = 1 \times 1256.$$

Der Schüler kann nun diesen Lösungsgedanken weiterführen. Genau so wie im obigen Beispiel je zwei Posten zusammengefaßt wurden, kann man auch je drei zu einem vereinigen. Das wird vorteilhaft sein bei Aufgaben, deren Multiplikator 3×3, oder $3 \times 3 \times 3$, oder $3 \times 3 \times 3 \times 3$ usw. ist. So können Aufgaben gebildet werden wie folgt: $27 \times 180 = 9 \times 540 = 3 \times 1620 = 1 \times 4860$. Die weitere Entwicklung dieses Gedankens führt schließlich zur Bildung folgender Aufgaben: 84×168 soll so gelöst werden, daß nur mit Grundzahlen vervielfacht werden muß! $84 \times 168 = 21 \times 672 = 7 \times 2016 = 14112$.

Wie das Eindringen in Sach- und Lebensgebiete zum Erfassen sachlicher Zusammenhänge und Abhängigkeiten und damit zu Fragestellungen führen kann, die zur Bildung von Rechenaufgaben weiterleiten, wurde bereits gezeigt. (Siehe Beispiel „Säntisschwebebahn“ !)[1].

Zusammenfassend stellen wir unter Hinweis auf die Darlegungen Müllers fest, daß die Aufgabenstellung durch den Schüler wertvoll ist, daß es sich dabei aber nicht um ein Selbstbilden von Aufgaben im eigentlichen Sinne handelt, die zu einer Neuleistung auffordern, sondern um eine Mitarbeit in der Form der Wiederholung, Nachbildung und Weiterführung eines unter der planmäßigen Leitung des Lehrers erworbenen Wissens. Eine Steigerung dieser Mitarbeit im Sinne zunehmender Bewußtheit, Planmäßigkeit und Selbständigkeit ist eine der wichtigsten Bildungsaufgaben. Durch die geforderte Mitarbeit erfolgt nicht nur eine Belebung der Übungsarbeit, sondern eine Verselbständigung des geistigen Wirkens des Schülers, die zur geistigen Selbsthilfe führt. Sie ist das Ziel der Bildungsarbeit und kann nur verwirklicht werden über die Gebundenheit des Zöglings an das zielbewußte und planmäßige Wirken eines Erziehers, das geistige Gemeinschaft zu begründen und damit Entwicklungsimpulse zu vermitteln vermag. Wer sich dieser Zusammenhänge bewußt ist, wird die vom Lehrer geformte Aufgabe als notwendiges und bedeutungsvolles Mittel zur planmäßigen Entwicklung des Stoffes anerkennen, durch sie aber auch die Mitarbeit des Schülers in der Form der eigenen Aufgabenstellung planmäßig zu steigern versuchen. Beim Üben wird vor allem die als Wiederholung und Nachbildung sich bekundende Aufgabenstellung zur Geltung kommen, die eine wertvolle Möglichkeit zur Variation der Übungsform darstellt.

f) Die Übungsdauer.

Von großer Bedeutung für einen optimalen Übungserfolg ist die der Leistungsfähigkeit des Kindes angemessene zeitliche Begrenzung der Übung. Es ist eine Tatsache, daß intensive Übung stark ermüdet, auch wenn durch

[1] Kühnel, der die Grundgedanken der Arbeitsschule auf den Rechenunterricht anwandte, wertet die „eigentätige Problemstellung“ als „die „ideale Gestaltung“ rechnerischer Anwendung. Er fordert, daß der Schüler auf der Stufe der Anwendung die Probleme ausschließlich selbst suche. Der Schüler soll in lebenswahre Situationen versetzt und durch die lebendige Vergegenwärtigung der Sachverhalte zu Fragestellungen angeregt werden, die zur Bildung von Rechenaufgaben weiterführen. Dabei wird er sich der zur Lösung notwendigen Bestimmungsstücke bewußt werden und sie selbst beschaffen. Kühnel zeigt an einer Reihe von Beispielen aus der häuslichen Wirtschaftsführung und aus den Sachgebieten des Unterrichts, deren einseitig qualitative Betrachtung durch die quantitative ergänzt werden soll, wie die eigentätige Problemstellung zur Geltung kommen kann. Jene angewandten Aufgaben, die vollständige Angaben und die Problemstellung enthalten, dienen als Mittel zur Einführung in das Wesen und die Bildung der Aufgaben; „aber sie werden überbaut, gekrönt, in ihren Leistungen überholt, weiter entwickelt durch die neue Form der angewandten Aufgaben mit eigentätiger Problemstellung“. Neubau des Rechenunterrichts, II. Teil, S. 73ff.

Ebenfalls den Ideen der Arbeitsschulpädagogik verpflichtet ist Gustav Rose, der stark die funktionale Bildung betont. Er gibt in seinem Werk „Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht“ eine psychologische Grundlegung der mathematischen Didaktik.

die Variation der Übungsform dafür gesorgt wird, daß immer wieder neue Antriebe zur Hingabe erfolgen. Es darf nicht übersehen werden, daß es sich trotz möglicher „Abwandlung" doch weitgehend um gleichförmige Wiederholung bestimmter Tätigkeiten handelt. Die stofflichen Anreize, die bei einer Neubehandlung belebend wirken, sind auch bei abwechslungsreicher Gestaltung spärlicher vorhanden. Mit zunehmender Ermüdung erfolgt nicht nur eine Reduktion des Übungswertes, sondern es besteht im Ermüdungszustande auch die Gefahr, daß durch die Wiederholung von Fehlleistungen die Sicherheit gefährdet wird. Die Ergebnisse der didaktisch-psychologischen Forschung zeigen, daß kurze, intensive und wiederholte, durch Pausen unterbrochene Übung wirksamer ist als einmalige Übung über längere Zeit. Auf der Stufe der 4. bis 6. Klasse sollte die Übung nicht über eine halbe Stunde ausgedehnt werden.

Wenn ein bis zur Sicherheit und Geläufigkeit eingeübtes Können lebendig erhalten werden soll, ist es nötig, daß es immer wieder Gegenstand der Übung wird. Wer einen neuen Rechenfall nur dann übt, wenn er im systematischen Aufbau auftritt, ihn nachher aber unberücksichtigt läßt, beschreitet einen Irrweg. Bei späteren Wiederholungen empfiehlt es sich, die bereits eingeübten Rechenfälle nicht mehr gesondert, sondern in Verbindung mit verwandten Tätigkeiten zu üben. Der von Scheibner empfohlenen Übung in Gruppen zusammengehöriger Rechenfälle kommt größte Bedeutung zu. Durch diese Wiederholung in Gruppen wird die Verfügbarkeit gesteigert, die deshalb von größter Bedeutung ist, weil bei der Bewältigung komplexer Rechenfälle eine rasche Umstellung gefordert wird.

Vergessen wir zum Schluß aber nicht, daß den Grundsätzen methodischer Gestaltung erst dann volle Wirkungskraft beschieden ist, wenn sie von einer Lehrerpersönlichkeit angewandt werden, die geistige Gemeinschaft zu begründen vermag. Die Verwirklichung solcher Gemeinschaft aber setzt nicht nur eine vom Glauben an die erlösende Macht geistiger Gehalte getragene Hingabe an die Sache voraus, sondern überdies jene Ehrfurcht vor der sich emporringenden Menschlichkeit im Kinde, die zur Hilfe verpflichtet.